Chapitre 6

Suites et séries de fonctions

Dans le chapitre 2 nous avons étudié la convergence de suites numériques[1] (u_n). L'ensemble des méthodes décrites et présentées dans le chapitre 2 peuvent s'étendre simplement à des suites à valeurs dans un espace vectoriel normé (complet) E de dimension k. Autrement dit, ce qui a été exposé reste valable (en travaillant coordonnées par coordonnées) pour des suites (u_n) s'exprimant sous la forme d'un vecteur[2] avec k coordonnées $u_n^{(i)}$ avec $i = 1, \dots, k$:

$$u_n = \left(u_n^{(1)}, \dots, u_n^{(k)}\right)$$

Par exemple[3], il est possible de choisir $E = \mathbb{R}^k$ muni de la norme euclidienne[4]. Cette extension est naturelle et ne comporte pas de difficultés majeures, aussi nous nous attarderons pas dessus. En revanche, nous allons méditer sur un exemple rencontré dans le chapitre 2.

Soient $x \in \mathbb{R}$ et (u_n) la suite définie par

$$u_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{6.0.1}$$

Bien évidemment il s'agit d'une suite numérique mais la présence de la variable x suggère qu'il est également envisageable de considérer l'application

$$x \mapsto \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$

En étudiant la dépendance de ce nouvel objet vis-à-vis de x et de n nous faisons donc face à une **suite de fonctions**. Tout ceci incite à étudier l'espace vectoriel $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ composé des applications $f : D \to \mathbb{R}$ avec $D \subset \mathbb{R}$ (et $D \neq \emptyset$)[5]. Grâce à ce point de vue, la suite de fonctions $x \mapsto u_n(x)$

1. composées de nombres réels
2. lequel est exprimé dans une base de E.
3. De manière générale, nous pouvons munir $\mathbb{R}^k$ de la norme $\|\cdot\|_p$ avec $p \in [1; +\infty]$. Celle ci est définie par $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^k |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$) et $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,k} |x_i|$
4. i.e. si $x = (x_1, \dots, x_k)$ alors $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_k^2}$.
5. Nous aurions pu considérer un cadre beaucoup plus général en étudiant $\mathcal{F}(D, Y)$ avec $D \subset X$ un sous-ensemble non vide d'un espace métrique (X, d_X) et où (Y, d_Y) désigne un autre espace métrique cf. [].

définie par (6.0.1) devient simplement une suite de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

L'espace vectoriel $\mathcal{F}(D,\mathbb{R})$ est très riche, il contient de nombreux sous-ensembles intéressants sur lesquels nous nous focaliserons. Citons par exemple :

- $\mathcal{B}(D,\mathbb{R})$ l'ensemble des applications bornées $f : D \to \mathbb{R}$,
- si $D = [a,b]$, il y a aussi le sous-ensemble des fonctions continues $C^0\big([a,b],\mathbb{R}\big)$.

Le lecteur n'est pas sans savoir que, contrairement à $\mathbb{R}^n$, ce genre d'espaces vectoriels est de dimension infinie. Il semble alors naturel que certaines notions deviennent plus délicates que ce qui a été observé dans le chapitre 2.

Avant d'aborder tout cela, il convient de faire une courte digression. Dans $\mathbb{R}$, la proximité entre deux nombres x et y se quantifie via la quantité suivante[6]

$$|x-y|$$

induite par la valeur absolue[7] $x \mapsto |x|$. Dans $\mathbb{R}^k$, la proximité entre deux vecteurs $x = (x_1,\dots,x_k)$ et $y = (y_1,\dots,y_k)$ s'obtient grâce à la distance induite par la norme $x \mapsto \|x\|_p$ (avec $p \geq 1$) :

$$\|x-y\|_p = \left(\sum_{i=1}^{k}(x_i-y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ici (dans $\mathbb{R}^k$), le choix de la norme choisie pour quantifier la distance entre deux vecteurs n'a pas d'importance. Ceci est une conséquence du théorème de Riesz (cf. chapitre **??**) qui atteste qu'en dimension finie, les normes sont équivalentes. Autrement dit, si N_1 et N_2 sont deux normes[8] sur un espace vectoriel E de dimension k alors il existe deux constantes $c, C > 0$ (lesquelles dépendent de k) telles que pour tout $x \in E$

$$c \times N_1(x) \leq N_2(x) \leq C \times N_1(x).$$

Ceci signifie que, modulo une constante multiplicative, N_1 et N_2 mesurent la taille d'un vecteur de la même manière ; en conséquence, si x et y sont proches pour la distance induite par N_1 alors ils le seront également pour la distance induite par N_2.

---

6. i.e. la distance entre x et y
7. laquelle est une norme sur $\mathbb{R}$
8. Nous indiquons au lecteur qu'une norme sur un espace vectoriel E est une application $N : E \to \mathbb{R}_+$ qui vérifie les trois propriétés suivantes

   1. (séparation) Pour tout $x \in E$, $N(x) = 0 \iff x = 0$.
   2. (homogénéité) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $x \in E$, $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.
   3. (inégalité triangulaire) Pour tout $x, y \in E$, $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.

   Toute norme N sur un espace vectoriel permet de construire une distance $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ sur E. Pour cela, il suffit de poser $d(x,y) = N(x-y)$. Cette nouvelle application vérifie alors les propriétés requises :

   1. (séparation) Pour tout $x, y \in E$, $d(x,y) = 0 \iff x = y$.
   2. (symétrie) Pour tout $x, y \in E$, $d(x,y) = d(y,x)$.
   3. (inégalité triangulaire) Pour tout $x, y, z \in E$, $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Dans $\mathcal{F}(D,\mathbb{R})$, $\mathcal{B}(D,\mathbb{R})$ ou $C^0\big([a,b],\mathbb{R}\big)$, qui sont des espaces vectoriels de dimension infinie, les choses sont moins simples car il est possible d'équiper ces espaces de distances qui mènent à des notions de proximités différentes (cette fois-ci, il n'est pas toujours possible de passer de l'une à l'autre simplement en multipliant par une constante). Cette observation se résume grossièrement en disant qu'il est possible de définir des modes différents de convergence[9] dans l'espace $\mathcal{F}(D,\mathbb{R})$. Nous allons préciser cela dans les sections à venir.

6.1 Modes de convergence

Nous allons étudier les suites[10] (f_n) de $\mathcal{F}(D,\mathbb{R})$, il s'agit donc d'une suite de la forme $\big(f_n(x)\big)$. Ainsi, lorsque $x \in D$ est fixé, nous avons une collection (obtenue en faisant varier n) de fonctions à valeurs réelles

$$x \mapsto f_1(x) \quad ; \quad x \mapsto f_2(x) \quad ; \quad \dots \quad ; \quad x \mapsto f_n(x).$$

Si x est une valeur connue ($x = 0$ par exemple), nous nous retrouvons avec une suite de nombres

$$f_1(0) \quad ; \quad f_2(0) \quad ; \quad \dots \quad ; \quad f_n(0) \quad ; \quad \dots$$

Exemple 6.1.1. Considérons la suite de fonction (f_n) définie par

$$f_n(x) = \frac{x}{x+n} \quad \text{avec} \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad n \in \mathbb{N}.$$

La première question qui vient à l'esprit est la suivante : si x est fixé, que se passe-t-il lorsque $n \to +\infty$?

Définition 6.1.1. *Soient (f_n) une suite de fonctions et $D \subset \mathbb{R}$.*

1. *Nous dirons que la suite converge simplement sur I si, pour tout $x \in D$ la limite $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ existe.*
2. *Nous dirons que la suite (f_n) converge simplement[11] sur D vers la fonction f si, pour tout $x \in D$,*
$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x).$$
Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $x \in D$, il existe $N_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_{\varepsilon,x}$
$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{6.1.1}$$

Remarque. Finalement, cette définition de convergence (et donc de proximité entre une suite (f_n) et sa limite f) revient à procéder comme lorsque nous étudions les suites numériques sans attacher beaucoup d'importance à la dépendance en x (hormis l'ensemble à lequel il appartient).

Voyons cela sur des exemples.

9. Ce qui n'était pas envisageable dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{R}^n$

10. A nouveau, dans un cadre beaucoup plus général, nous aurions des fonctions $f_n : D \to Y$ allant d'un sous-ensemble D (non vide) d'un espace métrique (X, d_X) vers (Y, d_Y) un espace métrique complet.

11. Le lecteur ayant des connaissances avancées en topologie reconnait une notion de convergence faible. Nous reviendrons sur ceci dans un chapitre ultérieur.

Exemple 6.1.2. 1. La suite $f_n(x) = \frac{\sin(x)}{n}$ converge simplement vers la fonction $f \equiv 0$ sur $\mathbb{R}$ puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n} \to 0 \qquad \text{lorsque} \quad n \to +\infty.$$

2. Soit (f_n) la suite de fonctions définie sur $[0,1]$ par $f_n(x) = x^n$. Nous constatons alors que f_n converge simplement (sur $[0,1]$) vers la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'exemple précédent suggère que le choix de x peut avoir un impact non négligeable sur la limite obtenue. Ceci est d'autant plus flagrant sur l'exemple suivant.

Exemple 6.1.3. Soit (f_n) la suite de fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = \frac{n}{1+nx}$. Nous constatons alors que :

- si $x = 0$ la suite ne converge pas.
- si $x \neq 0$ la suite converge vers 1 lorsque $n \to +\infty$.

Remarque. Remarquons que ce genre de situation ne se produisait pas dans l'exemple impliquant la fonction $f_n(x) = \frac{\sin(x)}{n}$. Cette dernière convergeait sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle et ceci indépendamment du choix de x.

Ceci mène à la définition suivante qui cherche à préciser la dépendance en x lorsqu'une suite de fonctions converge.

Définition 6.1.2. *Soient $D \subset \mathbb{R}$ et (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{B}(D,\mathbb{R})$* [12]*. Nous dirons que f_n converge uniformément vers f sur D si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ et tout $x \in D$, nous avons*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

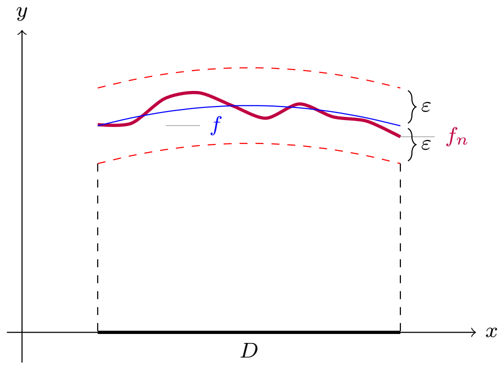
De manière alternative, ceci se reformule en disant que f_n converge uniformément vers f sur D lorsque

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = 0. \tag{6.1.2}$$

Remarque. 1. D pourra ainsi être un intervalle (borné ou non) de $\mathbb{R}$ comme $\mathbb{R}$ tout entier.

2. Graphiquement, la convergence uniforme correspond à la figure ci-dessous : à partir d'un certain rang, les courbes sont, uniformément sur D, proches, à ε près

12. Cette restriction impose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sup_{x\in D} |f_n(x)| < +\infty$ ce qui n'est pas forcément le cas si (f_n) est une suite de $\mathcal{F}(D,\mathbb{R})$.



3. Cette définition est l'occasion d'introduire la norme $\|\cdot\|_\infty$ [13] associée à la convergence uniforme : $\|f-g\|_\infty = \sup_{x\in D}|f(x)-g(x)|$. Ainsi, (6.1.2) se reformule en
$$\lim_{n\to+\infty}\|f_n - f\|_\infty = 0.$$
La notion de proximité entre deux fonctions s'obtient alors uniformément en x. Graphiquement, lorsque f et g sont à valeurs réelles, $\|f-g\|_\infty$ désigne l'écart le plus important entre un point de C_f et celui, de même abscisse, sur C_g.
4. Il est naturel de chercher à comparer la convergence uniforme avec la convergence simple. Tout se joue au niveau de la dépendance entre N et x. En effet, si f_n converge simplement vers f sur D alors, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $x \in D$, il existe un entier N qui dépend à la fois de ε et de x tel que (6.1.1) soit vérifiée. Dans le cas de la convergence uniforme, N ne dépend que de ε, (6.1.2) est donc valable pour n'importe quelle valeur de x. En particulier, la convergence uniforme implique la convergence simple. [14]
5. Il est important de préciser sur quel ensemble à lieu la convergence uniforme. Par exemple, la suite $f_n(x) = x^n$ converge uniformément vers la fonction $f \equiv 0$ sur $[0,1[$ mais pas sur $[0,1]$ (puisque $f_n(1) = 1$).

Voyons cela sur des exemples.

Exemple 6.1.4. 1. Si (f_n) est définie par $f_n(x) = \frac{\sin(x)}{n}$ alors f_n converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle puisque
$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{\sin(x)}{n}\right| \le \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{lorsque} \quad n\to+\infty.$$
2. La suite définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = \frac{x}{x+n}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle puisque $\lim_{n\to+\infty}\frac{x}{x+n} = 0$. En revanche, cette convergence ne peut être uniforme sur $\mathbb{R}_+$ puisque
$$f_n(n) = \frac{1}{2}$$

13. En pratique, grâce au contexte, la confusion entre $\|x\|_\infty$ lorsque $x\in\mathbb{R}^n$ et $\|f\|_\infty$ lorsque f est une fonction est très rare.

14. Contrairement à ce qui se produisait dans $\mathbb{R}$, ici, nous avons plusieurs modes de convergence ainsi qu'une hiérarchie entre eux. La convergence uniforme correspond à une convergence forte, par opposition à la convergence simple qui s'apparente à une convergence faible ; nous étudierons ceci en détail dans un chapitre ultérieur.

D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}_*$,

$$\|f_n\|_\infty \geq f_n(n) = \frac{1}{2} > 0.$$

L'exemple précédent suggère deux choses :

- pour établir la convergence uniforme sur un ensemble D de f_n vers f, il suffit de majorer, indépendamment de $x \in D$, $\|f_n - f\|_\infty$ par une quantité qui tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$.
- au contraire, pour montrer qu'une suite de fonctions ne converge pas uniformément, il suffit de trouver un élément de D pour lequel la convergence est mise en défaut.

Comme le lecteur peut s'en douter, la nouveauté de ce chapitre réside dans la convergence uniforme (plutôt que la convergence simple) et nous allons passer un peu de temps à explorer les résultats liés à cette nouvelle notion. De nombreuses questions viennent à l'esprit à ce sujet. Par exemple, nous avions montré (cf. proposition 12) **qu'une suite numérique (u_n) était convergente si et seulement si il s'agissait d'une suite de Cauchy**. Est-il possible d'établir un résultat analogue nous assurant le même phénomène vis-à-vis de la convergence uniforme de suites de fonctions ? Comme nous le montre la proposition suivante, c'est possible à condition d'imposer une uniformité en x.

Proposition 42 (Critère de Cauchy uniforme)**.** *Soient $D \subset \mathbb{R}$ et (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{B}(D, \mathbb{R})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *La suite (f_n) converge uniformément sur D vers une fonction f.*
2. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, m \geq N$ et tout $x \in D$,*

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

En abrégé, ceci se note $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$.

Remarque. 1. A nouveau, ce critère est un moyen commode permettant d'établir un résultat de convergence uniforme sans avoir à connaitre au préalable la fonction limite. Insistons une fois de plus sur le fait que l'entier N est indépendant de x, il dépend uniquement de ε.

2. En termes savants (cf. [**?**]), le proposition 12 montrait que $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est un espace métrique complet, la proposition 42 montre que $\mathcal{B}(D, \mathbb{R})$ muni de la distance induite par la norme $\|\cdot\|_\infty$ est un espace métrique complet.

Démonstration. Traitons le sens direct. Supposons que f_n converge uniformément vers f. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ et tout $x \in D$, nous avons

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par suite, si $n, m \geq N$, nous avons

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Démontrons la réciproque. Par hypothèse, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, m \geq N$ et pour tout $x \in D$,

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon. \tag{6.1.3}$$

Autrement dit, la suite numérique $\big(f_n(x)\big)$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Il existe donc (cf. proposition 12) $f(x)$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x).$$

Il nous reste à démontrer que cette convergence simple est en fait uniforme. Pour cela, il suffit de faire tendre $m \to +\infty$ dans (6.1.3). En effet, ceci nous assure que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ et tout $x \in D$, nous avons

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Autrement dit, $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$ ce qui est le résultat. □

Remarque. Finalement la clé de la démonstration réside dans le fait que **les suites de Cauchy réelles soient convergentes**. Le lecteur avisé en déduira que le résultat précédent est de nouveau satisfait lorsque les suites de fonctions sont à valeurs dans (Y, d) un espace métrique complet.

Dans les chapitres précédents, nous avions étudié certaines propriétés de régularité (continuité, dérivabilité,...) que pouvait satisfaire une fonction. Il est naturel de chercher à comprendre comment ces notions se comportent vis-à-vis de la convergence simple ou uniforme.

6.2 Utilité de la convergence uniforme

Pour mieux comprendre pourquoi la convergence uniforme est une notion importante, il est essentiel d'étudier quelques exemples afin de voir quelles précautions il est nécessaire de prendre lors de l'étude des propriétés de régularité de suites de fonctions.

6.2.1 Interversion de limites et continuité

Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{B}(D, \mathbb{R})$, il s'agit alors de fonction dépendant de deux paramètres (x et n). Ainsi, lors de l'étude de limites, il est naturel de se demander si l'ordre dans lequel les limites (en x ou en n) sont prises est important. Autrement dit, pour $a \in D$ un point d'accumulation [15], a-t-on,

$$\lim_{x\to 0}\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to 0} f_n(x) \quad ?$$

Voyons ce qui se produit sur un exemple.

Exemple 6.2.1. Soit (f_n) la suite de fonctions définie par $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$ pour tout $x \geq 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$. Si $x > 0$, nous constatons alors que

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 1$$

tandis que $\lim_{x\to 0} f_n(x) = 0$. En conséquence,

$$\lim_{x\to a}\lim_{n\to+\infty} f_n(x) \neq \lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to a} f_n(x).$$

15. i.e. il existe une suite (x_n) d'éléments de D telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

Remarque. Notons que f_n converge simplement sur $[0;+\infty[$ vers la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

mais cette convergence n'est pas uniformément sur $[0+\infty[$.

Il semblerait que la convergence simple ne permettent pas d'intervertir une limite en n avec une limite en x.

Théorème 43 (Interversion de limite)**.** *Soient (f_n) une suite de fonctions définies sur une partie non vide $D \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ et a un point d'accumulation de D. Nous supposons que :*

1. *la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur D vers la fonction f ;*
2. *chaque fonction f_n a une limite $l_n \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers a.*

Alors,

1. *La suite numérique (l_n) est convergente ;*
2. *La fonction f admet une limite $l \in \mathbb{R}$ lorsque $x \to a$. De plus,*

$$l = \lim_{n\to+\infty} l_n.$$

Remarque. Autrement dit, sous une hypothèse de convergence uniforme, il est possible de passer à la limite dans l'ordre que nous souhaitons :

$$\lim_{x\to a} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x).$$

Démonstration. Par soucis de simplicité, la preuve sera donnée [16] dans le cas où $a \in \mathbb{R}$ et $l_n \in \mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. **1ère étape : la suite (l_n) est bornée**. Puisque la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers la fonction f sur D, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x \in D$ et tout $n \geq N$, $|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2}$. Ainsi, pour tout $n \geq N$ et tout $x \in D$, nous avons

$$|f_n(x) - f_N(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_N(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

En conséquence, lorsque x tend vers a, nous en déduisons que pour tout $n \geq N$,

$$|l_n - l_N| \leq 1.$$

C'est pourquoi, pour tout $n \geq N$, nous avons

$$|l_n| \leq |l_n - l_N| + |l_N| \leq 1 + |l_N|.$$

Enfin, en posant $M = \max\big(|l_0|, |l_1|, \ldots, |l_{N-1}|, 1 + |l_N|\big)$, nous avons $|l_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite (l_n) est donc bornée. Par suite, le théorème de Bolzano-Weierstrass 9 nous assure qu'il existe une sous-suite (n_k) ainsi qu'une limite $l \in \mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{k\to+\infty} l_{n_k} = l.$$

16. Le théorème précédent reste valable même si $a \in [-\infty, +\infty]$ ou si $l_n \in [-\infty, +\infty]$ pour tout n (dans ce cas $l \in [-\infty, +\infty]$).

2. **2ème étape : montrons que $f(x)$ converge vers l lorsque x tend vers a.** Soit $\varepsilon > 0$, l'hypothèse de convergence uniforme sur D nous assure qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_0$ et tout $x \in D$,
$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{6.2.1}$$
En outre, puisque (l_{n_k}) converge vers l, il existe un entier N_1 tel que pour tout $k \geq N_1$,
$$|l_{n_k} - l| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{6.2.2}$$
Posons alors $N^* = \max(N_0, N_1)$. Ainsi, si $n \geq N^*$, les inégalités (6.2.1) et (6.2.2) sont satisfaites. De plus, puisque $\lim_{x\to a} f_{N^*}(x) = l_{N^*}$, nous savons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in D$ vérifiant $|x - a| < \alpha$ nous avons
$$|f_{N^*}(x) - l_{N^*}| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{6.2.3}$$
C'est pourquoi, lorsque $n \geq N^*$ et pour tout $x \in D$ tel que $|x - a| < \alpha$, nous avons
$$|f(x) - l| \leq |f(x) - f_{N^*}(x)| + |f_{N^*}(x) - l_{N^*}| + |l_{N^*} - l| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$
Autrement dit, $\lim_{x\to a} f(x) = l$.
3. **3ème étape : montrons que (l_n) converge vers l.** Observons alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in D$, nous avons
$$|l_n - l| \leq |l_n - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - l|$$
grâce à l'inégalité triangulaire. Il suffit ensuite de choisir n suffisamment grand et x suffisamment proche de a pour rende chacun des termes du membre de droite arbitrairement petit. Nous laissons au lecteur le soin de compléter la démonstration [17].

□

Remarque. Notons en passant que la démonstration montre que la convergence uniforme (de (f_n) sur D) permet de montrer la convergence de (l_n) vers l alors qu'a priori cette convergence n'était valable que le long d'une sous-suite.

Sans surprise, puisque la convergence simple n'est pas suffisante pour intervertir des limites, elle ne sera pas suffisante non plus pour conserver la continuité. Voyons cela sur un exemple.

Exemple 6.2.2. Comme nous l'avons vu plus tôt, la suite $f_n(x) = x^n$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction f définie par
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$
Nous avons donc un exemple pour lequel la suite initiale $x \mapsto f_n(x)$ est continue sur $[0; 1]$ alors que sa limite $x \mapsto f(x)$ ne l'est plus.

17. La convergence uniforme permet de traiter le deuxième terme, il suffit ensuite de choisir $x \in D$ tel que $|x-a| < \alpha$ et n suffisamment grand pour traiter les deux autres puisque $\lim_{x\to a} f_n(x) = a$ et $\lim_{x\to a} f(x) = l$

Comme nous l'avons vu dans l'exemple 6.2.2, **la continuité n'est pas conservée par la convergence simple**. Il faut imposer des conditions plus restrictives à la suite de fonctions pour que cela fonctionne. Celui-ci s'apparente à un corollaire du théorème 43 mais nous allons présenter une démonstration directe afin d'habituer le lecteur à jouer avec les ε.

Théorème 44 (Convergence uniforme et continuité)**.** *Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs réelles, définies sur un ensemble (non vide) $D \subset \mathbb{R}$*[18]*. Nous supposons que*

1. *Pour tout n, $x \mapsto f_n(x)$ est continue sur un ensemble D.*[19]
2. *(f_n) converge uniformément vers f sur D.*

Dans ce cas, f est également continue sur D.

Remarque.
1. La réciproque est fausse : une suite de fonctions continues peut converger vers une fonction continue sans que la convergence soit uniforme.
2. Finalement, ce théorème affirme que la convergence uniforme est suffisante pour que l'échange suivant de limites soit valide :

$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{x\to x_0} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \quad \text{avec} \quad x_0 \in D.$$

C'est pourquoi celui-ci doit être vu comme un corollaire du théorème 43.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ et $x_0 \in D$. L'objectif est de montrer qu'il existe $\alpha = \alpha_{\varepsilon,x_0} > 0$ tel que pour tout $x \in D$ vérifiant $|x - x_0| \leq \alpha$ alors

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in D$, nous avons

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|. \tag{6.2.4}$$

via l'inégalité triangulaire. La convergence uniforme nous assure l'existence de N, tel que pour tout $n \geq N$ et tout $x \in D$ nous avons

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{et} \quad |f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

De plus, f_n étant continue en x_0, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in D$ vérifiant $|x - x_0| < \alpha$ nous avons

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

En conséquence, si $n \geq N$ et $x \in D$ est tel que $|x - x_0| < \alpha$, ce qui précède combiné à (6.2.4) nous assure que

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

ce qui conclut la démonstration. □

La convergence uniforme est contraignante. Voyons cela sur un exemple.

18. A nouveau, nous aurions pu considérer D sous-ensemble d'un espace métrique (X, d) complet. D'ailleurs, ce théorème, combinée à la proposition 42 permet de montrer que l'ensemble $C^0(X, \mathbb{R})$ des fonctions continues sur X et à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de la distance induite par la convergence uniforme est un espace métrique complet.
19. i.e. il s'agit d'une suite de $C^0(D, \mathbb{R})$.

Exemple 6.2.3. Soit $f_n(x) = x^n$ avec $x \in [0,1]$ et n un entier. Cette suite converge simplement vers la fonction

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{sinon.} \end{array} \right.$$

Puisque $f_n(1) = 1$ la convergence ne peut-être uniforme. Il est donc naturel de se demander s'il est possible d'obtenir une convergence uniforme sur $[0,1[$. Ceci ne pourra pas être vrai puisque

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(1-\frac{1}{n}) = e^{-1} \neq 0.$$

L'exemple précédent est ennuyeux car, en enlevant ce qui se produit en $x = 1$, nous aimerions avoir une convergence sur $[0,1[$ qui nous assure que la limite f soit continue sur $[0,1[$. En y réfléchissant, il est possible d'assouplir la condition portant sur la convergence uniforme. En effet, la notion de **continuité est locale** (au voisinage d'un point x) tandis que la **convergence uniforme est globale** (doit être valable pour tous les $x \in D$). Il est possible alors d'obtenir le résultat suivant

Proposition 45 (Convergence uniforme sur les compacts)**.** *Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs réelles, définies sur un ensemble (non vide) $D \subset \mathbb{R}$* [20]*. Nous supposons que*

1. *Pour tout n, $x \mapsto f_n(x)$ est continue sur un ensemble D.* [21]
2. *(f_n) converge **uniformément vers f sur tout intervalle (compact)** $[a,b] \subset D$.*

Dans ce cas, f est un également continue sur D.

Remarque. La notion de convergence uniforme sur les compacts est plus faible que la convergence uniforme ; la convergence uniforme sur les compacts entraine la convergence simple. Il faut retenir qu'il s'agit d'une condition suffisante pour préserver la continuité d'une suite de fonctions. Par la suite, nous utiliserons de manière indifférente le théorème précédent ou le théorème 44 suivant ce qui est le plus approprié.

Voyons une application de ceci.

Exemple 6.2.4. Soit $x \in [0,1[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = x^n$. Nous savons que cette suite ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $[0,1]$ (à cause de ce qui se produit en 0). En revanche, nous allons pouvoir montrer que ceci est bien le cas sur $[0,1[$. A cet effet, soit $[a,b] \subset [0,1[$ un ensemble compact. Nous avons alors, pour tout $x \in [a,b]$,

$$|x^n| \leq b^n \to 0 \quad \text{lorsque} \quad n \to +\infty.$$

Donc f est continue sur $D = [0,1[$ d'après la proposition précédente.

Remarque. Cet exemple illustre que la convergence uniforme sur les compacts est bien plus faible que la convergence uniforme.

Si malgré tout nous souhaitons conserver une convergence uniforme, il est normal de s'interroger : que faut-il ajouter comme hypothèse pour qu'une convergence simple (une convergence plus faible donc) se transforme en une convergence uniforme ? Le théorème suivant expose un résultat allant dans cette direction.

20. A nouveau, nous aurions pu remplacer I par un sous-ensemble (non vide) D d'un espace métrique (X, d_X) complet. D'ailleurs, ce théorème, combinée à la proposition 42 permet de montrer que l'ensemble $C^0(X,\mathbb{R})$ des fonctions continues sur X et à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de la distance induite par la convergence uniforme est un espace métrique complet.
21. i.e. il s'agit d'une suite de $C^0(D,\mathbb{R})$.

Théorème 46 (Dini)**.** *Soit (f_n) une suite définie sur l'intervalle fermé et borné $I = [a, b]$ à valeurs réelles. Nous supposons que*

1. *La suite (f_n) est monotone*[22]
2. *Pour tout n, $x \mapsto f_n(x)$ est continue sur I.*
3. *(f_n) converge simplement vers f sur I. La fonction limite f est supposée continue sur I.*

Dans ce cas, f_n converge uniformément vers f sur I.

Remarque. 1. Nous verrons en exercice que toutes les hypothèses du théorème sont fondamentales, l'absence de l'une d'entre elles empêche la conclusion de se réaliser.

2. Ce résultat reste valable si I est remplacé par un espace métrique (X, d) compact. Nous présenterons cette notion de compacité dans le chapitre 8.

Démonstration. Sans perdre en généralité, nous pouvons supposer que (f_n) est décroissante : pour tout $x \in I$, nous avons $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Posons ensuite $g_n = f_n - f$, il s'agit d'une suite décroissante, positive, de fonctions continues sur I qui converge simplement vers la fonction identiquement nulle sur I. D'après, le théorème 24, la fonction g_n est bornée sur $[a, b]$ et atteint ses bornes[23]. Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $u_n \in [a, b]$ telle que

$$\sup_{x \in [a,b]} g_n(x) = g_n(u_n).$$

Ceci nous donne un expression plus manipulable du supremum de la différence entre f_n et f. Ainsi, puisque $\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} g_n(x)$, il nous suffit de montrer que $\lim_{n \to +\infty} g_n(u_n)$ converge vers 0 pour établir le théorème de Dini.

Considérons alors $y_n = g_n(u_n)$. et observons qu'il s'agit d'une suite **numérique, décroissante et minorée** (par 0). En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$y_{n+1} = g_{n+1}(u_{n+1}) \leq g_n(u_{n+1}) \leq g_n(u_n) = y_n$$

où la première inégalité s'obtient grâce à la monotonie de g_n tandis que la deuxième découle de la définition de u_n (valeur pour laquelle le supremum est atteint). En conséquence, puisque (y_n) est décroissante et minorée, nous savons alors (cf. chapitre 2, théorème 4) qu'elle converge vers un nombre $y \geq 0$. Il nous reste à montrer que $y = 0$.

A cet effet, notons que le théorème de Bolzano-Weierstrass 9 nous permet d'extraire une sous-suite convergente[24] de la suite bornée (u_n). Autrement dit, il existe (n_k) et $x \in [a, b]$ tels que

$$\lim_{k \to +\infty} u_{n_k} = x$$

Si $p \in \mathbb{N}$, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$ tels que $n_k \geq p$, nous avons

$$g_p(u_{n_k}) \geq g_{n_k}(u_{n_k}) = y_{n_k}$$

22. Par exemple, la suite (f_n) est croissante : i.e. pour tout $x \in I$, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$. A ne pas confondre avec la monotonie de la fonction $x \mapsto f_n(x)$: i.e. si $x \leq y$ alors $f_n(x) \leq f_n(y)$.

23. C'est ici que l'hypothèse de compacité intervient pour la première fois.

24. Il s'agit de la deuxième fois où l'hypothèse de compacité est employée.

d'après la monotonie de la suite (g_n). Ainsi, en faisant tendre k vers $+\infty$, la continuité de $x \mapsto g_p(x)$ nous assure que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{k\to+\infty} g_p(u_{n_k}) \geq \lim_{k\to+\infty} y_{n_k} \qquad \Longleftrightarrow \qquad g_p(x) \geq y.$$

En conséquence, lorsque $p \to +\infty$, nous en déduisons que

$$0 \geq y.$$

Autrement dit, $y = 0$. Nous avons donc montré que $\lim_{n\to+\infty} g_n = \lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$. Ce qui est précisément ce que nous voulions. $\square$

Voyons ce que permet de faire ce nouveau résultat.

Exemple 6.2.5. Soit $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ définie pour tout $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}$. Nous avons vu (via un développement limité) dans un chapitre précédent que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Autrement dit, f_n converge simplement vers $f(x) = e^x$ sur $\mathbb{R}$. Grâce au théorème de Dini 46, nous allons montrer que cette convergence simple est en fait uniforme sur tout intervalle $I = [-a, a]$ avec $a > 0$. Le seul point à vérifier [25] est celui concernant la monotonie de la suite (f_n). Pour cela, il suffit d'établir que

$$\ln f_{n+1}(x) - \ln f_n(x) \geq 0.$$

Posons alors $\phi(x) = \ln f_{n+1}(x) - \ln f_n(x) = (n+1)\ln(1 + \frac{x}{n+1}) - n\ln(1 + \frac{x}{n})$ et montrons que $\phi(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$. Pour cela, étudions les variations de ϕ sur I : si $n > a$ (pour éviter des complications au dénominateur), un calcul élémentaire montre que

$$\phi'(x) = \frac{x}{(n+1+x)(n+x)} \quad \text{pour tout} \quad x \in I.$$

Ainsi, $\phi'(x)$ est du signe de x sur I. En conséquence, ϕ admet un minimum en 0. Or $\phi(0) = 0$ donc

$$\phi(x) \geq \phi(0) = 0 \quad \text{pour tout} \quad x \in I$$

ce qui est le résultat attendu. Nous avons donc une suite croissante de fonctions continues (f_n) qui converge simplement sur $[-a, a]$ vers une limite continue. Le théorème de Dini 46 nous assure que cette convergence est uniforme sur $[-a, a]$.

Traitons un deuxième exemple dans lequel nous montrons qu'il est possible d'approcher de manière uniforme, sur n'importe quel intervalle $[a, b]$, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto |x|$ par une suite de polynômes.

Exemple 6.2.6. La suite de polynômes est obtenue par récurrence. Pour cela, considérons la suite de fonctions (p_n) définies sur $[0, 1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que $p_1(x) = 0$ pour tout $x \in [0, 1]$ et

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + \frac{1}{2}\big(x - p_n(x)^2\big) \quad \text{pour tout} \quad x \in [0,1] \quad \text{et pour tout} \quad n \geq 1. \tag{6.2.5}$$

25. Le lecteur vérifiera que $f_n(x) > 0$ pour tout $x \in [-a, a]$ et tout $n \geq 0$.

Il n'est pas difficile de montrer par récurrence que, pour tout n, $x \mapsto p_n(x)$ est un polynôme. Il semble naturel de se demander pourquoi la relation de récurrence (6.2.5) est adaptée à ce que nous souhaitons faire. Si jamais p_n converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction g alors, nécessairement celle-ci vérifie (6.2.5). Autrement dit,

$$g(x) = g(x) + \frac{1}{2}\big(x - g(x)^2\big) \quad \Longleftrightarrow \quad g^2(x) = x \quad \text{pour tout} \quad x \in [0,1]$$

et ceci montre que la limite obtenue correspond bien à la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$. Cet argument n'est pas sans rappeler l'étude des suites récurrentes (notamment la recherche de points fixes) d'un chapitre précédent.

A présent, observons que pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \geq 1$,

$$\sqrt{x} - p_{n+1}(x) = \big(\sqrt{x} - p_n(x)\big)\left[1 - \frac{1}{2}\big(\sqrt{x} + p_n(x)\big)\right].$$

A l'aide de cette relation ainsi que de la définition de la suite (p_n), une démonstration par récurrence (que nous laissons au lecteur le soin d'écrire) montre que pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \geq 1$,

$$0 \leq p_n(x) \leq p_{n+1} \leq \sqrt{x} \leq 1.$$

Ainsi, nous avons une suite croissante et majorée de fonctions continues (p_n) sur $[0,1]$. Cette suite converge donc simplement (sur l'intervalle compact $[0,1]$) vers la fonction continue $x \mapsto \sqrt{x}$ (cf. supra). Le théorème de Dini 46 nous assure alors que cette convergence est uniforme.

Remarque. En remplaçant $p_n(x)$ par $p_n(x^2)$ dans (6.2.5), les arguments mis en place montrent qu'il est possible d'approcher $x \mapsto |x|$ par une suite de polynôme et ceci de manière uniforme sur $[0,1]$.

Les deux exemples qui précèdent montre qu'il est **possible d'approcher (uniformément) des fonctions compliquées par des fonctions beaucoup plus simples.** Nous reviendrons sur ce point dans quelques pages afin de l'approfondir. Avant cela, nous allons voir de quelle manière conserver des propriétés de dérivabilité grâce à la convergence uniforme.

6.2.2 Dérivabilité

Avant toutes choses, observons ce qui peut se produire sur un exemple afin de mieux comprendre les obstructions que nous pouvons rencontrer.

Exemple 6.2.7. Soit $f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ avec $x \in \mathbb{R}$. Puisque

$$\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0 \quad \text{lorsque} \quad n \to +\infty,$$

la suite converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle $f \equiv 0$. En outre, $x \mapsto f(x)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto f_n(x)$ sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$f'(x) = 0 \quad \text{et} \quad f_n'(x) = \sqrt{n}\cos(nx) \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Cependant f_n' ne converge pas vers f' puisque, par exemple,

$$f_n'(0) = \sqrt{n} \to +\infty \quad \text{lorsque} \quad n \to +\infty$$

alors que $f'(0) = 0$. Finalement, la convergence (même uniforme) de f_n vers f n'entraine pas la convergence de f'_n vers f'.

Ce qui précède montre que les choses ne sont pas aussi simples que nous l'espérions. Il semble que **la convergence simple n'est pas assez contraignante pour préserver la dérivabilité et la convergence des suites dérivées vers f' (limite de la suite (f_n)).**[26] Voyons d'autres exemples du même acabit.

Exemple 6.2.8. 1. Dans l'exemple 6.2.2, nous avons vu que la suite des fonctions dérivées (f'_n) ne convergeait pas. Nous allons voir qu'il est possible d'obtenir une suite de fonctions de classe $C^1(\mathbb{R})$ qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction dérivable f et dont la suite des dérivées (f'_n) converge également. Cependant la suite (f'_n) convergera vers une fonction $g \neq f'$. A cet effet, posons pour tout $n \in \mathbb{N}_*$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2x^2}.$$

Notons qu'il s'agit bien de fonctions de classe $C^1(\mathbb{R})$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n}. \tag{6.2.6}$$

Autrement dit, $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n}$. En conséquence, la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction $f \equiv 0$ sur $\mathbb{R}$. Pour établir (6.2.6), il suffit d'observer que si $|x| \leq \frac{1}{n}$ alors

$$|f_n(x)| \leq |x| \leq \frac{1}{n}$$

puisque $1 + n^2x^2 > 1$. En outre, si $|x| > \frac{1}{n}$ alors $n^2|x| > n$. D'où, si $n \geq 1$,

$$|f_n(x)| \leq \frac{|x|}{n^2x^2} = \frac{1}{n^2|x|} \leq \frac{1}{n}.$$

Etudions à présent la convergence la suite des dérivées. Un calcul élémentaire montre que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$f'_n(x) = \frac{1 - n^2x^2}{(1 + n^2x^2)^2}.$$

- si $x = 0$ alors $f'_n(0) = 1 \to 1$ lorsque $n \to +\infty$.
- si $x \neq 0$, $f'_n(x) \sim -\frac{1}{n^2x^2} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

Autrement dit, (f'_n) converge simplement vers la fonction g définie par

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et $g \neq f' \equiv 0$.

26. Nous invitons d'ailleurs le lecteur à chercher quelles sont les propriétés, satisfaites par suite de fonctions (f_n), qui pourraient être conservées par convergence simple.

Comme nous allons le voir, **la propriété de dérivabilité sera conservée si la suite (f_n') converge uniformément** ; concernant (f_n) il n'y a pas besoin de supposer plus que de la convergence simple en un point.

Théorème 47 (Convergence et dérivabilité)**.** *Soient (f_n) une suite de fonctions dérivables sur $D \subset \mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$. Supposons que*

1. *f_n converge simplement vers f sur D.*[27]
2. *(f_n') converge uniformément sur D.*

alors

1. *f est dérivable sur D*
2. *(f_n) converge uniformément sur D vers f et*

$$f'(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n'(x) \quad \textit{pour tout} \quad x \in D.$$

Remarque.

1. Finalement l'hypothèse pourtant sur la suite (f_n') a permis de renforcer la convergence de la suite (f_n) (en passant d'une convergence simple à une convergence uniforme) et d'assurer que la limite obtenue est dérivable et coïncide avec la limite des dérivées.
2. La dérivabilité étant une propriété locale, il est également possible d'adapter le théorème en modifiant l'énoncé en remplaçant les mots *convergence uniforme* par **convergence uniforme sur tout compact** $[a, b] \subset D$ comme nous l'avions fait pour la continuité. Nous utiliserons librement par la suite cette version du théorème lorsque cela sera approprié.

Démonstration. L'idée est de se ramener[28] à un résultat connu : ici, il s'agit du théorème 44. A cet effet, il convient d'introduire des nouvelles fonctions : pour $x_0 \in D$ fixé, posons

$$\phi_n(x) = \begin{cases} \frac{f_n(x)-f_n(x_0)}{x-x_0} & \text{si } x \neq x_0 \\ f_n'(x_0) & \text{sinon.} \end{cases} \quad \text{et} \quad \phi(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & \text{si } x \neq x_0 \\ f'(x_0) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Puisque f_n est dérivable en x_0, les fonctions ϕ_n sont des fonctions continues sur D. En outre, la convergence simple sur D de (f_n) vers f montre que (ϕ_n) converge simplement sur D vers ϕ. Finalement, pour aboutir à la conclusion désirée, nous allons devoir intervertir deux limites : celle portant sur n avec celle portant sur x. Plus précisément, nous souhaitons que l'égalité suivante soit vérifiée

$$\lim_{t\to x}\lim_{n\to+\infty} \phi_n(t) = \lim_{n\to+\infty}\lim_{t\to x} \phi_n(t) \quad \Longleftrightarrow \quad f'(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n'(x). \tag{6.2.7}$$

Cette intervertion sera possible lorsque nous aurons établi que (ϕ_n) converge uniformément sur D vers ϕ.

1. **1ère étape : établir un lien entre (ϕ_n) et (f_n').**. Soient $n, m \in \mathbb{N}$ et $x \in D$ et appliquons le théorème des accroissements finis 29 à la fonction $f_n - f_m$: si $x \neq x_0$ alors nous avons

$$|\phi_n(x) - \phi_m(x)| = \left|\frac{(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(x_0)}{x - x_0}\right| \leq \|f_n' - f_m'\|_\infty \tag{6.2.8}$$

27. Au prix de quelques efforts (cf. [?]), cette hypothèse peut être affaiblie en : il existe $x_0 \in D$ tel que la suite $\big(f_n(x_0)\big)$ converge.

28. Ce qui était déjà le cas du théorème 44 qui s'obtient, bien que nous n'ayons pas adopté ce point de vue, à l'aide du théorème 43.

Puisque $|\phi_n(x_0) - \phi_m(x_0)| = |f'_n(x_0) - f'_m(x_0)|$, l'inégalité (6.2.8) est encore valide lorsque $x = x_0$. Finalement, (6.2.8) est valable pour tout $x \in D$.

2. **2ème étape : (f_n) converge uniformément vers f sur D.** Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Puisque (f'_n) converge uniformément sur D, la suite de fonctions vérifie le critère de Cauchy 42. Considérons alors $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, m \geq N$,

$$|f'_n(x) - f'_m(x)| \leq \varepsilon \quad \text{pour tout} \quad x \in D. \tag{6.2.9}$$

En conséquence, grâce à (6.2.8), nous en déduisons que (ϕ_n) vérifie également le critère de Cauchy uniforme. En particulier, pour tout $x \in D$ et tout $n, m \geq N$, nous avons

$$|\phi_n(x) - \phi_m(x)| \leq \varepsilon.$$

Ceci entraine alors, lorsque $m \to +\infty$, que pour tout $x \in D$ et tout $n \geq N$, nous avons

$$|\phi_n(x) - \phi(x)| \leq \varepsilon.$$

Autrement dit (ϕ_n) converge uniformément sur D vers ϕ.

3. **3ème étape : conclusion**. Puisque les fonctions ϕ_n sont continues sur D, le théorème 44 nous assure que la limite ϕ est continue sur D. En particulier,

$$\phi \quad \text{est continue en} \quad x_0 \quad \Longleftrightarrow \quad f \quad \text{est dérivable en} \quad x_0.$$

En outre, le théorème 43 nous permet d'intervertir les limites (celles lorsque $x \to x_0$ et $n \to +\infty$) : i.e. (6.2.7) est vérifiée, ce qui conclut la démonstration.

□

Remarque. Il est possible de simplifier considérablement la preuve du théorème précédent en supposant une hypothèse plus forte sur la suite (f_n) : si, pour tout n, f_n est de classe $C^1(D, \mathbb{R})$ alors il est possible de faire appel au théorème fondamental de l'analyse 63 pour relier f_n avec l'intégrale de f'_n. Nous verrons ceci dans le prochain chapitre qui introduira la notion d'intégrale.

Le lecteur doit s'interroger sur l'utilité du théorème 47. Qu'il se rassure, nous présenterons des applications dans la section suivante.

6.3 Séries de fonctions

Dans le chapitre 3, nous avions présenté l'étude de séries numériques. Lesquelles s'obtenaient en sommant les termes d'une suite donnée. Il semble assez naturel de reprendre ceci dans le contexte des suites de fonctions. Autrement dit, si $u_n \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ que dire de

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_n(x) \quad \text{lorsque} \quad n \to +\infty?$$

Ce genre d'étude se fait d'un point de vue ponctuel ou d'un point de vue uniforme. Nous invitons le lecteur à réfléchir sur ce qui se produit sur les séries de fonctions qui ne sont plus à valeurs dans $\mathbb{R}$ mais dans $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé complet. En particulier, parmi les théorèmes que nous allons exposer lesquels sont conservés (quitte à introduire des modifications mineures dans les démonstrations) dans ce nouveau contexte ?

6.3.1 Convergence simple et absolue de séries de fonctions

Il se trouve que la notion de convergence simple, sur un ensemble D, d'une série de fonctions s'obtient en appliquant la définition 6.1.1 à la suite des sommes partielles (S_n).

Exemple 6.3.1. Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n(x) = x^n$ avec $x \in [0,1]$. Dans ce cas,

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}.$$

Ainsi, nous avons la convergence simple (sur $[0,1[$) de S_n vers S définie par

$$S(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{pour tout} \quad x \in [0,1[.$$

Si $x = 1$, la série diverge grossièrement.

Comme lors de l'étude des séries numériques, il est possible de définir la notion de convergence absolue d'une série de fonctions.

Définition 6.3.1. *Soit (f_n) une suite de $\mathcal{F}(D,\mathbb{R})$. La série de fonctions de terme général (f_n) converge absolument sur D si et seulement si la série numérique $\sum_n |f_n(x)|$ converge simplement sur D.*

Cette notion est plus forte que la convergence simple comme nous allons le voir dans un exemple.

Exemple 6.3.2. Soit $\alpha > 0$ et considérons la série de terme général $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{(x+n)^\alpha}$ avec $x > 0$.

1. Si $\alpha = 1$ alors le critère des séries alternées 2 montre que la série $\sum_n f_n(x)$ converge simplement sur $]0,+\infty[$. Cependant, la convergence de la série n'est pas absolue. En effet si $x > 0$ est fixé, nous avons
$$|f_n(x)| \sim \frac{1}{n} \quad \text{lorsque} \quad n \to +\infty.$$
Autrement dit, les séries $\sum_n |f_n(x)|$ et $\sum_n \frac{1}{n}$ sont de même nature. Cette dernière étant divergente (série de Riemann avec $\alpha = 1$), $\sum_n f_n(x)$ ne converge pas absolument sur $]0,+\infty[$.
2. Si $\alpha = 2$, le raisonnement précédent montre que
$$|f_n(x)| \sim \frac{1}{n^2} \quad \text{lorsque} \quad n \to +\infty.$$
Cette fois-ci, il s'agit du terme général d'une série convergente (critère de Riemann avec $\alpha > 1$), la série converge donc absolument et simplement sur $]0,+\infty[$. Notons en passant que la convergence absolue de la série entraine sa convergence simple puisque
$$\left| \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n}{(x+k)^2} \right| \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(x+k)^2} \quad \text{pour tout} \quad x > 0 \quad \text{et pour tout} \quad n \geq 0.$$

6.3.2 Convergence uniforme et normale de séries de fonctions

Etant donnée une suite (f_n) de $\mathcal{F}(D,\mathbb{R})$, la convergence uniforme de la série de fonctions associée s'obtient en appliquant la définition 6.1.2 à la suite des sommes partielles $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_n(x)$. Autrement dit, la série S_n converge uniformément vers S sur D si

$$\lim_{n\to+\infty} \|S_n - S\|_\infty = \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in D} |S_n(x) - S(x)| = 0.$$

Comme pour les suites de fonctions, la convergence uniforme entraine la convergence simple.

Exemple 6.3.3. [Utilisation des restes] Considérons la série de terme général $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}$ avec $x \geq 0$. Pour montrer que la série associée converge uniformément sur $]0,+\infty[$, il suffit de montrer que le reste $x \mapsto R_n(x)$ de la série converge uniformément vers 0 sur $[0,+\infty[$. Pour cela, il suffit d'observer le fait suivant [29] : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$, nous avons

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x+k} \right| \leq \left| \frac{(-1)^{n+1}}{x+n+1} \right| \leq \frac{1}{n+1}.$$

Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|R_n\|_\infty \leq \frac{1}{n+1} \to 0 \quad \text{lorsque} \quad n \to +\infty.$$

Nous en déduisons alors que la série converge uniformément (et donc simplement) sur $[0,+\infty[$.

Remarque. La comparaison de cet exemple avec ce qui a été obtenu dans l'exemple 6.3.2 montre que la convergence uniforme n'entraine pas la convergence absolue d'une série de fonctions. Nous invitons le lecteur à chercher une série de fonctions qui converge absolument vers S sur D sans que la convergence soit uniforme sur D.

Dans le cadre des séries de fonctions, la proposition 42 se reformule agréablement. Nous rappelons que $\mathcal{B}(D,\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions bornées $f : D \to \mathbb{R}$.

Proposition 48 (Critère de Cauchy uniforme pour les séries de fonctions)**.** *Soit (S_n) une série de fonctions de $\mathcal{B}(D,\mathbb{R})$. Les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *S_n converge uniformément vers S sur D.*
2. *Le reste de la série converge uniformément vers 0. Plus précisément, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que*

$$\sup_{x\in D} \left| \sum_{k=N+1}^{\infty} S_k(x) \right| \leq \varepsilon.$$

Démonstration. La démonstration est évidente puisque $\|S_n - S\|_\infty = \sup_{x\in D} \left| \sum_{k=N+1}^{\infty} S_k(x) \right|$. $\square$

Dans le cadre des séries de fonctions, il est possible de définir un mode de convergence plus fort que la convergence uniforme ou la convergence absolue.

29. Majoration classique du reste d'une série alternée à l'aide du critère d'Abel 19.

Définition 6.3.2. *Nous dirons qu'une série de fonctions* (S_n) *converge normalement sur* D *si la série numérique*

$$\sum_{k=0}^{n} \sup_{x\in D} |S_k(x)|$$

converge.

Cette notion est plus contraignante puisque elle revient à oublier la dépendance en x pour se ramener à l'étude de la série numérique $\sum_n \|S_n\|_\infty$. En revanche, cette notion de convergence entraine la convergence uniforme puisque

$$\sup_{x\in D} \sum_{k=0}^{n} |S_k(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} \sup_{x\in D} |S_k(x)| = \sum_{k=0}^{n} \|S_k\|_\infty. \tag{6.3.1}$$

Notons que la majoration (6.3.1) manque parfois de finesse (car nous avons fait « rentrer le supremum dans la somme » : la majoration obtenue se ramène au cas extrême) mais elle permet souvent d'établir des résultats de convergence sans encombre. C'est d'ailleurs le contenu du résultat suivant.

Proposition 49 (Critère de Weierstrass)**.** *Soit* (f_n) *une suite de* $\mathcal{B}(D, \mathbb{R})$*. S'il existe une suite numérique* (a_n) *telle que pour tout* $x \in D$ *et tout* $n \in \mathbb{N}$

$$|f_n(x)| \leq a_n \quad \textit{et} \quad \sum_n a_n < +\infty$$

alors la série $\sum_n f_n$ *converge normalement sur* D*.*

Remarque. L'avantage de ce critère est qu'il ramène l'étude d'une série de fonctions à celle d'une série numérique. En particulier, il permet de recycler toutes les méthodes présentées dans le chapitre 3.

Voyons un exemple de ceci.

Exemple 6.3.4. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et considérons la série de fonctions de terme général $f_n(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^n g(x)$. Nous avons alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|f_n(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \|g\|_\infty.$$

En outre, la série géométrique $\sum_n \left(\frac{2}{3}\right)^n \|g\|_\infty$ converge puisque $0 < \frac{2}{3} < 1$. Le critère de Weierstrass (cf. proposition 49) nous assure alors que la série $\sum_n f_n$ converge donc normalement sur D.

Comme nous allons le voir dans l'exemple suivant, la convergence uniforme est bien plus faible que la convergence normale.

Exemple 6.3.5. Nous avons déjà observé dans l'exemple 6.3.3 que la série de fonctions de terme général $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}$ avec $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ convergeait uniformément sur $[0, +\infty[$. Montrons que cette série ne converge pas normalement sur $[0, +\infty[$. Pour cela observons que, pour tout $x \geq 0$,

$$\|f_n\|_\infty \geq |f_n(0)| = \frac{1}{n}.$$

Alors, puisque la série $\sum_n \frac{1}{n}$ diverge, le critère de comparaison entre des séries à termes positifs nous assure que $\sum_n \|f_n\|_\infty = +\infty$.

Une synthèse des différents modes de convergence et de leur hiérarchie sera faite à la fin du chapitre. Voyons à présent de quelle manière les séries de fonctions peuvent servir.

6.4 Applications

Voyons ce qui nous pouvons mettre en oeuvre grâce à l'étude des suites et des séries de fonctions. Comme nous allons le voir ces nouveaux objets sont très pratiques pour construire de nouvelles fonctions. Dans un chapitre ultérieur, nous expliquerons de quelle manière des fonctions très simples permettent d'approcher uniformément des fonctions plus complexes.

6.4.1 Séries de fonctions et continuité

Tout d'abord, il convient d'énoncer l'analogue du théorème 44 dans le cadre des séries de fonctions. La démonstration est laissée à l'attention du lecteur.

Proposition 50 (Continuité et série de fonctions)**.** *Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur une partie non vide $D \subset \mathbb{R}$ à valeurs réelles. Supposons que*

1. *la série de fonctions de terme général f_n converge uniformément sur D vers une fonction $f : D \to \mathbb{R}$;*
2. *chaque fonction $x \mapsto f_n(x)$ est continue sur D.*

Alors, la fonction f est continue sur D.

Remarque. Bien entendu, il est possible, en adaptant l'énoncé, d'obtenir une proposition du même acabit à partir du théorème 43. La continuité étant une propriété locale, il est aussi possible d'assouplir l'énoncé du théorème dans l'esprit de la proposition 45

Voyons ce qu'il est possible d'obtenir à partir de cette proposition.

Exemple 6.4.1 (Prolongement de Tietze)**.** Soit $D \subset \mathbb{R}$ une partie fermée non vide et $f \in C_b^0(D, \mathbb{R})$ une fonction bornée et continue sur D. Nous nous demandons s'il est possible de prolonger f sur $\mathbb{R}$ tout entier ; nous imposons de plus que $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ coïncide avec $\sup_{x\in D} |f(x)|$.

Sans perdre en généralité, nous pouvons supposer que $f(x) \in [-1, 1]$ pour tout $x \in D$. L'idée est de construire par récurrence une suite de fonctions continues g_n qui s'approchent (au sens de la distance uniforme) de plus en plus de f ; le prolongement sera alors donnée par la série $x \mapsto \sum_n g_n(x)$.

Introduisons les ensembles D_1 et D_2 définies par

$$D_1 = \left\{x \in D\,;\, \frac{1}{3} \leq f(x) \leq 1\right\} \quad \text{et} \quad D_2 = \left\{x \in D\,;\, -1 \leq f(x) \leq -\frac{1}{3}\right\}$$

Il s'agit de deux ensembles fermés [30] et disjoints. Posons alors g_1 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g_1(x) = \frac{1}{3}\frac{d(x, D_2) - d(x, D_1)}{d(x, D_2) + d(x, D_1)}$$

30. Ce point de terminologie sera détaillé dans le prochain chapitre. En attendant le lecteur doit se contenter de la définition suivante : Soit D un sous-ensemble non vide d'un espace métrique (X, d), D est un ensemble fermé si la limite x toute suite convergente (x_n) de D se trouve encore dans D.

où, pour tout $i \in \{1,2\}$, $d(x,D_i) = \inf_{y\in D_i} |x-y|$ est la distance de x à D_i. Notons que la fonction g_1 est continue sur $\mathbb{R}$ [31] Montrons à présent que g_1 n'est pas trop « grosse » et étudions sa proximité vis-à-vis de f. Tout d'abord, par construction,

$$\|g_1\|_\infty = \frac{1}{3}.$$

De plus, $\|f-g_1\|_\infty \leq \frac{2}{3}$. En effet, si $x\in\mathbb{R}$ alors trois cas de figures s'offrent à nous :

1. si $x \in D_1$ alors $g_1(x) = \frac{1}{3}$ et $\frac{1}{3} \leq f(x) \leq 1$ donc $|f(x)-g_1(x)| \leq \frac{2}{3}$;
2. si $x \in D_2$ alors $g_1(x) = -\frac{1}{3}$ et $-1 \leq f(x) \leq -\frac{1}{3}$ donc $|f(x)-g_1(x)| \leq \frac{2}{3}$;
3. si $x \notin D_1 \cup D_2$ alors $|g_1(x)| \leq \frac{1}{3}$ et $|f(x)| \leq \frac{1}{3}$ donc $|f(x)-g_1(x)| \leq \frac{2}{3}$.

En outre, il est élémentaire de vérifier que $(f-g_1)\big|_D = f$. Il nous suffit ensuite de répéter notre argument pour construire g_2 à partir de la fonction $\widetilde{f} = f - g_1$. Puisque $\widetilde{f}(x) \in [-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}]$, après quelques légères modifications dans notre argumentaire, nous obtenons une fonction g_2 telle que

$$\|g_2\|_\infty = \frac{2}{3^2} \quad \text{et} \quad \|\widetilde{f} - g_2\|_\infty \leq \frac{2^2}{3^2}.$$

Ce procédé se poursuit (à l'aide d'une récurrence) et, après $n \geq 1$ étapes, nous obtenons finalement une famille de fonctions $g_1, \ldots, g_n$, continues sur $\mathbb{R}$, telles que

$$(f - \sum_{i=1}^n g_i)\Big|_D = f \quad ; \quad \|g_n\|_\infty = \frac{2^{n-1}}{3^n} \quad \text{et} \quad \|f - \sum_{i=1}^n g_n\|_\infty \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Il suffit enfin de considérer $\sum_{i=1}^n g_n$ et d'observer que cette série est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ (puisque, pour tout n, $\|g_n\|_\infty = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ est le terme général d'une série convergente). En outre, comme les fonction g_n sont continues sur $\mathbb{R}$ et que la convergence de la série est normale (et donc uniforme) sur $\mathbb{R}$, le théorème 44 nous assure que la limite obtenue $g(x) = \sum_{n\geq 1} g_n$ est continue sur $\mathbb{R}$. Par construction, nous avons aussi

$$g\big|_D = f$$

ce qui était désiré. Enfin, $\|g\|_\infty = \|f\|_\infty$ puisque

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |g(x)| \leq \sum_{n\geq 1} \sup_{x\in\mathbb{R}} |g_n(x)| = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}} - 1\right) = 1$$

ce qui correspond bien à $\sup_{x\in D} |f(x)|$.

Voyons un deuxième exemple reposant sur des idées similaires.

31. Pour établir ceci, il convient de montrer que pour tout fermé F, $d(x,F) = 0 \iff x \in F$ et que l'application $x \mapsto d(x,F)$ est lipschitzienne (et donc continue) :

$$|d(x,F) - d(y,F)| \leq d(x,y) \quad \text{pour tout} \quad x,y \in \mathbb{R}.$$

Nous laissons au lecteur le soin d'établir ces résultats.

Exemple 6.4.2 (Weiertrass)**.** Considérons la fonction $\phi(x) = |x|$ définie pour $x \in [-1, 1]$ et prolongeons par 2-périodicité cette fonction sur $\mathbb{R}$ en posant

$$\phi(x + 2) = \phi(x).$$

Alors, pour tout $s, t \in \mathbb{R}$, nous avons

$$|\phi(s) - \phi(t)| \leq |s - t| \tag{6.4.1}$$

ce qui montre que ϕ est (uniformément) continue sur $\mathbb{R}$.[32] Posons alors

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \phi(4^n x) \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Puisque $\|\phi\|_\infty \leq 1$, il est élémentaire de montrer que la série précédente est normalement convergente sur $\mathbb{R}$. En outre, l'application du théorème 44 montre que f est continue sur $\mathbb{R}$ (puisque les fonctions $x \mapsto \left(\frac{3}{4}\right)^n \phi(4^n x)$ le sont pour tout $n \in \mathbb{N}$).

Nous allons maintenant montrer que cette fonction est dérivable nulle part. Soient $x \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$ et posons

$$\delta_m = \pm\frac{1}{2}4^{-m}$$

le signe de δ_m étant choisi de sorte qu'il n'y ait aucun entier entre $y_1 = 4^m x$ et $y_2 = 4^m(x + \delta_m)$[33] ; cette quantité correspondra à l'accroissement infinitésimal qui interviendra dans l'étude de la dérivabilité de la fonction f. Etudions à présent l'accroissement γ_n de la fonction ϕ :

$$\gamma_n = \frac{\phi\big(4^n(x + \delta_m)\big) - \phi(4^n x)}{\delta_m}.$$

Lorsque $n > m$, $4^n \delta_m$ est un entier pair et donc, par périodicité, $\gamma_n = 0$. En revanche, si $0 \leq n \leq m$, alors (6.4.1) entraine que $|\gamma_n| \leq 4^n$. De plus, grâce à la définition de ϕ et de δ_m, nous trouvons que

$$|\gamma_m| = \left|\frac{\phi(\pm\frac{1}{2}) - \phi(0)}{\delta_m}\right| = 4^m.$$

Tout ceci entraine alors que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x + \delta_m) - f(x)}{\delta_m}\right| &= \left|\sum_{n=0}^{m} \left(\frac{3}{4}\right)^n \gamma_n\right| \\
&\geq 3^m - \sum_{n=0}^{m-1} 3^n \\
&= \frac{1}{2}(3^m + 1)
\end{aligned}$$

32. Un argument alternatif sera de dire simplement que ϕ est continue sur $[-1, 1]$ et que $\lim_{x\to 1^-} \phi(x) = \lim_{x\to -1^+} \phi(x)$. Par périodicité, ϕ est alors continue sur $\mathbb{R}$.

33. Ceci est faisable puisque la distance entre y_1 et y_2 vaut précisément $|y_2 - y_1| = 4^m|\delta_m| = \frac{1}{2}$.

La minoration s'obtient grâce à l'inégalité triangulaire inverse[34] et aux informations obtenues sur γ_n lorsque $0 \leq n \leq m$. Enfin, lorsque $m \to +\infty$ nous avons $\delta_m \to 0$ mais $\lim_{m\to+\infty} \left|\frac{f(x+\delta_m)-f(x)}{\delta_m}\right| = +\infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction f est donc dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$.

6.4.2 Séries de fonctions et dérivabilité

A présent, voyons ce qui advient du théorème 47 dans le cadre des séries de fonctions. La démonstration est laissée à l'attention du lecteur.

Proposition 51 (Dérivabilité et série de fonctions)**.** *Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur une partie non vide $D \subset \mathbb{R}$ à valeurs réelles. Nous supposons que :*

1. *la série de fonctions de terme général f_n converge simplement sur D vers une fonction f ;*
2. *chaque fonction f_n est dérivable sur D ;*
3. *la série de fonctions de terme général f'_n converge uniformément sur D ;*

Alors, la fonction f est dérivable sur D et f' s'obtient en dérivant termes à termes[35] :

$$f'(x) = \sum_{n\geq 0} f'_n(x).$$

Remarque. La dérivabilité étant une propriété locale, il est possible d'obtenir une version de ce théorème avec une convergence uniforme sur les compacts de D plutôt que sur D tout entier.

Bien entendu le théorème 51 peut se généraliser (éventuellement en gardant la convergence uniforme sur les compacts) afin de dériver à plusieurs reprises une série de fonctions.

Corollaire 52. *Soit (f_n)une suite de fonctions définies sur une partie non vide $D \subset \mathbb{R}$ à valeurs réelles. Nous supposons que :*

1. *la série de fonctions de terme général f_n converge simplement sur D vers une fonction f ;*
2. *chaque fonction f_n est de classe C^p (avec $p \geq 1$) sur D ;*
3. *Pour tout $k \in \{1, \ldots, p\}$ la série de fonctions de terme général $f_n^{(k)}$ converge uniformément sur D ;*

Alors, la fonction f est de classe C^p sur D et, pour tout $k \in \{1, \ldots, p\}$, $f^{(k)}$ s'obtient en dérivant k fois termes à termes :

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n\geq 0} f_n^{(k)}(x).$$

Voyons un exemple d'application du corollaire 52.

34. pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ nous avons $|a-b| \geq \big||a|-|b|\big|$.
35. Nous obtenons ainsi une généralisation à un nombre infinie de fonction de la règle de dérivation $(h+g)' = h'+g'$.

Exemple 6.4.3. Nous allons chercher à résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$y'' + xy' + y = 1 \quad \text{avec} \quad y(0) = y'(0) = 0. \tag{6.4.2}$$

Autrement dit, nous cherchons toutes les fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables vérifiant (6.4.2). Nous allons supposer qu'une solution f de (6.4.2) s'écrit sous la forme

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$$

avec (a_n) une suite de coefficient réel à déterminer. [36] Supposons, temporairement, qu'il existe $R > 0$ tel que la série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ soit uniformément convergente sur $]-R, R[$ alors [37] f admet des dérivées de tout ordre sur $]-R, R[$. Plus précisément, pour tout $k \geq 0$,

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n x^{n-k} \quad \text{pour tout} \quad x \in]-R, R[.$$

En particulier, nous avons

$$xf'(x) = x\sum_{n\geq 1} na_n x^{n-1} = \sum_{n\geq 0} na_n x^n \quad \text{et} \quad f''(x) = \sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n\geq 0}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n.$$

Ainsi, puisque f est solution de (6.4.2), nous avons forcément

$$y'' + xy' + y = 1 \quad \iff \quad \sum_{n\geq 0}\big[(n+1)a_n + (n+1)(n+2)a_{n+2}\big]x^n = 1 \quad \text{pour tout} \quad x \in]-R, R[.$$

Alors, par identification [38], nous avons nécessairement

$$a_{n+2}(n+2)(n+1) + (n+1)a_n = 0 \quad \text{pour tout} \quad n \geq 1 \quad \text{et} \quad 2a_2 + a_0 = 1.$$

Ceci se reformule en

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+2} \quad \text{pour tout} \quad n \geq 1 \quad \text{et} \quad a_2 = \frac{1}{2}(1 - a_0).$$

Or $a_1 = f'(0) = 0$ (par hypothèse) donc $a_{2k+1} = 0$ pour tout $k \geq 0$. En outre, $a_0 = f(0) = 0$ (par hypothèse) donc $a_2 = \frac{1}{2}$. Par suite, pour tout $k \geq 1$, nous avons à l'aide d'une récurrence immédiate

$$a_{2k} = \left(\frac{-1}{2k}\right) \times \left(\frac{-1}{2k-2}\right) \times \dots \times \left(\frac{-1}{4}\right) \times a_2.$$

Autrement dit, pour tout $k \geq 1$,

$$a_{2k} = \frac{(-1)^{k+1}}{2 \times 4 \times \dots \times 2n} = \frac{(-1)^{k+1}}{2^k \times k!}$$

36. Ce genre de fonction intervient dans le domaine des séries entières. Ce sujet ne sera pas abordé dans ce cours nous renvoyons le lecteur vers [?, ?] pour plus de détails à ce sujet.
37. Nous invitons le lecteur à démontrer cette implication à l'aide du corollaire 52.
38. Implicitement, nous utilisons le fait suivant : si $\sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{n\geq 0} b_n x^n$ pour tout $x \in]-R, R[$ alors $a_n = b_n$ pour tout $n \geq 0$ (cf. [?]).

en factorisant par deux chacun des facteurs du produit au dénominateur. Finalement, si la solution de l'équation différentielle existe et peut s'écrire sous la forme $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ alors nécessairement

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n \times n!} x^{2n} \quad \text{pour tout} \quad x \in]-R, R[.$$

Nous pouvons, a posteriori, déterminer la valeur de R et vérifier que f est bien une solution de (6.4.2). Pour cela, il suffit d'utiliser le critère de d'Alembert 15 qui nous assure que la série converge : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x^2}{2(n+1)} < 1.$$

C'est pourquoi, puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{x^2}{2(n+1)} = 0$, $R = +\infty$ et le lecteur vérifiera que la série est bien uniformément convergente sur $]-\infty, +\infty[$ afin de justifier après coup les calculs effectués précédemment.

Remarque. Il est même possible d'obtenir une expression plus simple de f. Pour cela, il suffit d'admettre (cf. [**?**]) que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, e^x peut s'écrire sous la forme

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Dans ce cas, nous avons

$$f(x) = -\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!}\left(\frac{-x^2}{2}\right)^n = 1 - e^{-x^2/2} \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}.$$

L'exemple précédent soulève une question intéressante : étant donné (a_n) une suite numérique, est-il possible de construire une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que

$$f^{(n)}(0) = a_n \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N} \quad ?$$

Cela correspond donc à imposer, à partir d'une suite donnée, la valeur des coefficients de Taylor d'une fonction. La réponse à cette question réside dans un théorème démontré par Borel que nous présentons ci-dessous.

Exemple 6.4.4 (Théorème de Borel)**.** Dans cet exemple, nous allons construire une fonction répondant à la question précédente. Considérons alors (a_n) une suite numérique.

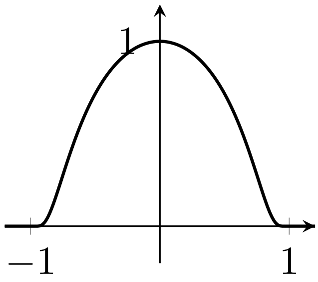
1. **Etape préliminaire : construction de fonction plateau**. Etant donnés des réels $a < b < c < d$, nous souhaitons obtenir une fonction h de classe $C^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$\|h\|_\infty \leq 1 \quad ; \quad h(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \notin]a, d[\quad ; \quad h(x) = 1 \quad \text{si} \quad x \in [b, c].$$

   Pour cela, considérons la fonction ψ définie par

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous laissons le soin au lecteur de vérifier par récurrence[39] que ψ est de classe $C^\infty(\mathbb{R})$ et que $\psi^{(m)}(0) = 0$ pour tout $m \geq 0$. Définissons alors ϕ en posant $\phi(x) = \psi(1 - x^2)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par construction, nous avons $\|\phi\|_\infty \leq 1$ et ϕ est de classe $C^\infty(\mathbb{R})$, nulle en dehors de $[-1, 1]$. Voici le graphe de ϕ :



Pour construire h, il suffit de modifier légèrement la fonction ϕ. Tout d'abord, imposons les conditions $h(x) = 0$ si $x \notin]a, d[$ et $h(x) = 1$ si $x \in [b, c]$. Il ne reste plus qu'à utiliser la fonction ϕ sur $]a, b[$ et $]c, d[$ afin d'obtenir la régularité souhaitée. A cet effet, il suffit de poser

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{\phi(0)}\phi\left(\frac{b-x}{b-a}\right) & \text{si } x \in]a, b[\\ \frac{1}{\phi(0)}\phi\left(\frac{x-c}{d-c}\right) & \text{si } x \in]c, d[\end{cases}$$

et de vérifier que les raccords (au bord des intervalles $]a, b[$ et $]c, d[$) sont bien de classe C^∞. Par la suite, par soucis de simplicité, nous supposons que $a = -1$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{2}$ et $d = 1$.

2. **Construction de la fonction désirée :** pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!} h\left(\frac{x}{\lambda_n}\right)$$

avec $\lambda_n = 1$ si $|a_n| \leq 1$ et $\lambda_n = \frac{1}{|a_n|}$ sinon[40]. Observons alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 < \lambda_n \leq 1 \quad \text{et} \quad |a_n|\lambda_n \leq 1.$$

Nous noterons, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = a_n \frac{x^n}{n!} h\left(\frac{x}{\lambda_n}\right)$ le terme général de la série définissant f.

3. **Propriétés vérifiées par f.** Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé et remarquons que $f_n(x)$ est nulle (à cause de la fonction h) dès que $|x| \geq \lambda_n$. Ainsi, pour contrôler $f_n(x)$, il suffit de se restreindre à l'intervalle $I_n =]-\lambda_n, \lambda_n[$: si $x \in I_n$ alors

$$|f_n(x)| \leq \frac{|a_n|\lambda_n^n}{n!} \leq \frac{\lambda_n^{n-1}}{n!} \leq \frac{1}{n!}$$

39. Indication : il suffit d'observer qu'à chaque dérivation, la fonction ψ se trouve multipliée par une fraction rationnelle en t dont l'expression exacte n'a pas d'importance.

40. D'une certaine manière, ces coefficients λ_n permettent « d'écraser » les coefficients a_n trop « gros » grâce à la fonction h qui est nulle en dehors de $[-1, 1]$.

d'après les propriétés vérifiées par $x \mapsto h(x)$ et (λ_n). Nous avons donc à disposition une suite de fonction continues $x \mapsto f_n(x)$ sur $\mathbb{R}$ dont le supremum est majoré par le terme général d'une série convergente, le théorème 44 nous assure alors que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Le même procédé peut être répété (cette fois-ci en utilisant le corollaire **??**) afin de montrer que f est de classe $C^k(\mathbb{R})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Nous laissons le soin au lecteur de compléter les détails[41]. Pour conclure, observons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous avons

$$f_n(x) = \frac{a_n x^n}{n!} \quad \text{pour tout} \quad x \in \left[-\frac{\lambda_n}{2}, \frac{\lambda_n}{2} \right].$$

d'où

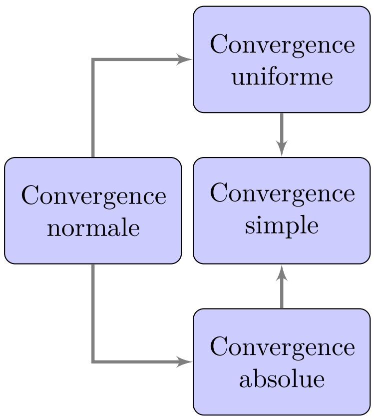
$$f_n^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ a_k & \text{sinon.} \end{cases}$$

En conséquence, nous avons bien montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f^{(n)}(0) = a_n.$$

6.5 Bilan

Finalement, dans ce chapitre, nous avons étudié plus en profondeur la dépendance d'une fonction entre deux paramètres (ici, $n \in \mathbb{N}$ et $x \in D$). Ceci a mis en évidence plusieurs modes de convergences ainsi qu'une hiérarchie entre ces derniers. Par exemple, dans le cas des séries de fonctions nous avons le schéma suivant qui synthétise les relations entre les différents modes de convergence étudiés



Nous avons d'ailleurs constaté que seule la convergence uniforme permet de préserver les propriétés de régularités (continuité, dérivabilité) satisfaites par une suite de fonctions. Notons en passant

41. Indication : soit $k \geq 1$, il faudra utiliser la formule de Leibniz pour déterminer $f_n^{(k)}$; si $M_l = \sup_{x \in \mathbb{R}} |h^{(l)}|$ pour tout $l \in \{1, \ldots, k\}$, il faudra montrer que $f_n^{(k)}(x)$ est uniformément controlée $\mathbb{R}$ par

$$\frac{M_k}{n!} + \frac{kM_{k-1}}{(n-1)!} + \ldots + \frac{1}{(n-k)!}$$

qui est le terme général d'une série convergente.

que pour démontrer les nouveaux théorèmes de ce chapitre, nous nous sommes appuyés sur une partie assez restreinte des outils présentés dans ce cours (étude de suites et de séries numériques, théorème de Heine, théorème des accroissements finis, théorème de Bolzano-Weierstrass,...).

Enfin, nous avons observé que l'utilisation de séries de fonctions donnait un moyen assez commode pour construire de nouvelles fonctions, parfois exotiques et que cela pouvait s'avérer être un outil assez puissant permettant de résoudre, par exemple, des équations différentielles sans trop de peine.

6.6 Exercices

Exercice 6.1. Montrer qu'une suite uniformément convergente de fonctions bornées est uniformément bornée.

Exercice 6.2. Construire deux suites de fonctions (f_n) et (g_n) convergeant uniformément sur un ensemble E mais telles que la suite $(f_n g_n)$ ne converge que simplement sur E.

Exercice 6.3. Pour $x \geq 0$ et $n \geq 1$, posons $f_n(x) = \frac{n}{1+n(1+x)}$.

1. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers une fonction f à préciser.
2. Démontrer que la convergence est en réalité uniforme sur $[0, +\infty[$.

Exercice 6.4. Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $f_n(x) = 1 + x + \ldots + x^{n-1}$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n). Nous noterons $f(x)$ la limite de la suite $(f_n(x))$ lorsque cette limite existe.
2. Posons, pour $x \in]-1, 1[$, $\phi_n = f(x) - f_n(x)$. Vérifier que $\phi_n(x) = \frac{x^n}{1-x}$. Quelle est la limite de ϕ_n en 1 ? En déduire que la convergence n'est pas uniforme sur $]-1, 1[$.
3. Soit $a \in]0, 1[$. Démontrer que (ϕ_n) converge uniformément vers ϕ sur $[-a, a]$.

Exercice 6.5. Soit $n \in \mathbb{N}$, posons $f_n : x \mapsto ne^{-n^2x^2}$.

1. Étudier la convergence simple de (f_n) sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la suite converge uniformément sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.
3. Étudier la convergence uniforme sur $]0, +\infty[$.

Exercice 6.6. Soit (f_n) une suite de fonction continue convergeant uniformément vers une fonction f sur un ensemble E.

1. Démontrer que, pour tout $x \in E$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x_n) = f(x)$ pour toute suite de points x_n convergeant vers x.
2. La réciproque est-elle vraie ?

Remarque. Si A est un ensemble, rappelons que $x \mapsto 1_A(x)$ est définie par

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in A \\ 0 & \text{sinon} . \end{cases}$$

Exercice 6.7. Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$.

1. Etablir que la suite (f_n) ainsi définie converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f.
2. Montrer que si $x \neq 0$, on a $f'(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n'(x)$.
3. Cette relation est-elle encore vraie en $x = 0$?

Exercice 6.8.

1. Soient $a < b$ et suite de fonction (f_n) qui converge simplement vers f. On suppose que f_n est k-lipschitzienne sur $[a, b]$ pour tout n. Montrer que f_n converge uniformément vers f.
2. Soit une suite de fonction (f_n) dérivables qui converge simplement vers f. On suppose que les dérivées f_n' sont uniformément bornées. Prouver que (f_n) converge uniformément vers f.

Exercice 6.9 (Polynômes de Bernstein I).

1. Soit $(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$.
   (a) Etablir les deux formules :
   $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1-x)^{n-k} \left(x - \frac{k}{n} \right) = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2.$$
   (b) En déduire une expression simplifiée de $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k^2 x^k (1-x)n - k$, puis la formule
   $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left(x - \frac{k}{n} \right)^2 = \frac{x(1-x)}{n}.$$
2. Soit $f \in C^0\big([0, 1], \mathbb{R}\big)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le n-ième polynôme de Bernstein associé à f (noté $B_n(f)$) est défini par
   $$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} \quad \text{pour tout} \quad x \in [0, 1].$$
   (a) Pour tout $x \in [0, 1]$, établir l'inégalité
   $$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right|.$$
   (b) Soit $0 < \alpha < 1$ et $x \in [0, 1]$. Posons $J_n^\alpha = \left\{ k \in \mathbb{N} \,;\, k \leq n \quad \text{et} \quad \left|\frac{k}{n} - x\right| < \alpha \right\}$ et $L_n^\alpha = \{ k \in \mathbb{N} \,;\, k \leq n \quad \text{et} \quad \left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \alpha \Big\}$. Pour tout $x \in [0, 1]$, établir :
   $$\sum_{k \in L_n^\alpha} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{x(1-x)}{n\alpha^2} \quad \text{et} \quad \sum_{k \in J_n^\alpha} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{4n\alpha^2}$$

(c) Démontrer que $\big(B_n(f)\big)$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

Exercice 6.10 (Polynômes de Bernstein II). Soit $f \in C^1\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ et $\big(B_n(f)\big)$ la suite des polynômes de Bernstein associée. L'exercice consiste à étudier la convergence de $\big(B_n'(f)\big)$ où

$$B_n'(f)(x) = \frac{d}{dx}B_n(f)(x).$$

Les résultats de l'exercice précédent seront employés.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [0, 1-\frac{1}{n}]$, posons $\Delta_n f(x) = n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)\right]$. Démontrer que $B_n'(f) = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k(1-x)^{n-k-1}\Delta_n f\left(\frac{k}{n}\right)$.
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout entier k tel que $0 \leq k \leq n-1$, il existe $\eta_{n,k} \in \left]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[$ tel que
$$B_n'(f) = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{x}^k(1-x)^{n-k-1}f'(\eta_{n,k}).$$
3. Démontrer que la suite $\big(B_n'(f)\big)$ converge uniformément ver f' sur $[0,1]$.
4. Supposons à présent que $f \in C^2\big([0,1],\mathbb{R}\big)$
   (a) Prouver que, pour tout $(x,u) \in [0,1]^2$, nous avons
   $$\big|f(u) - f(x) - (u-x)f'(x)\big| \leq \frac{(u-x)^2}{2}\|f''\|_\infty.$$
   (b) En déduire que $\|B_n(f) - f\|_\infty \leq \frac{1}{8n}\|f''\|_\infty$.
   (c) En considérant $f(x) = x^2$, prouver que la majoration ci-dessus est la meilleure possible.

Exercice 6.11. Montrer que la série $\sum_{n=1}^\infty(-1)^n\frac{x^2+n}{n^2}$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$ mais ne converge absolument pour aucune valeur de x.

Exercice 6.12. On définit f par $f(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{1+n^2x}$.

1. Pour quelles valeurs de x cette série converge-t-elle absolument ?
2. Sur quels segments converge-t-elle uniformément ?
3. Sur quels segments la convergence uniforme est-elle mis en défaut ?
4. La fonction f est-elle forcément continue là ou la série converge ?
5. Est-elle bornée ?

Exercice 6.13. Soit (f_n) définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < \frac{1}{n+1} \\ \sin^2(\frac{\pi}{x}) & \text{si} \quad \frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si} \quad x > \frac{1}{n}. \end{cases}$$

1. Montrer que cette suite converge simplement mais pas uniformément vers une fonction continue f.
2. Utiliser la série $\sum f_n$ pour montrer que la convergence absolue, même en tout point de $\mathbb{R}$, n'entraine pas forcément la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6.14. Soit (E) l'équation différentielle $2xy'' - y' + x^2y = 0$. On suppose qu'une solution y de (E) peut s'écrire sous la forme $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ pour $x \in]-R, R[$ avec $R > 0$.

1. Déterminer les coefficients (a_n).
2. Déterminer, a posteriori, la valeur de R en étudiant la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

Exercice 6.15. Soit (x_n) une suite de points distincts de $]a, b[$ et $\sum \alpha_n$ une série absolument convergente. Montrer que la série $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n 1_{x-x_n}$ avec $x \in]a, b[$ converge uniformément sur $[a, b]$ et que f est continue pour tout $x \neq x_n$.

6.7 Références historiques

A faire