Chapitre 7

Intégrale de Riemann

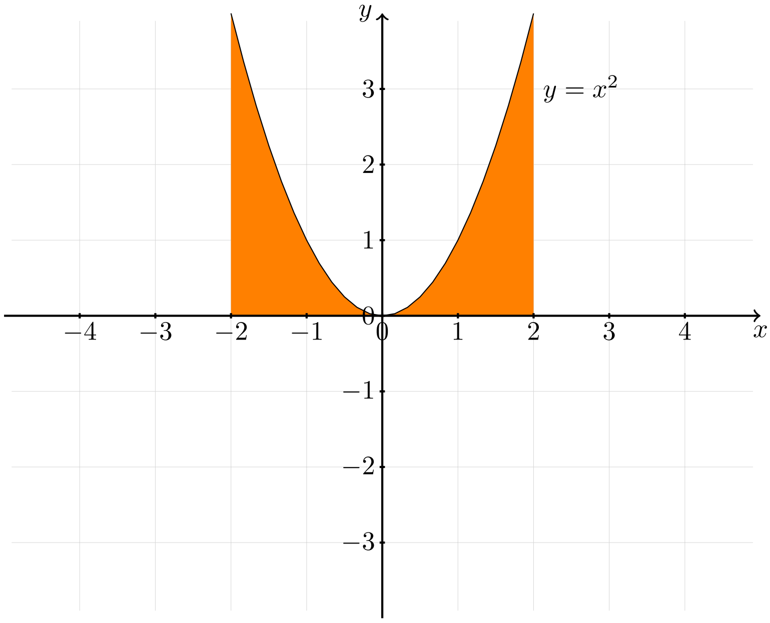
Dans ce chapitre nous allons voir comment relier certaines questions géométriques à l'analyse. En particulier, nous nous interrogeons sur une méthode permettant de déterminer facilement l'aire « sous une courbe » d'une fonction donnée. Pour cela, nous présenterons une construction de l'intégrale de Riemann ainsi que certains de ses généralisations.

Cela sera l'occasion de démontrer certains théorèmes fondamentaux, piliers de l'analyse. Par exemple, celui permettant de relier le procédé d'intégration à celui de dérivation.

Nous prendrons le temps d'exhiber les limites de la théorie d'intégration selon Riemann afin de préparer le chapitre portant sur l'intégrale de Lebesgue et la théorie de la mesure.

7.1 Fonctions en escaliers

Un de nos objectifs est de déterminer une aire à partir de la représentation graphique d'une fonction donnée. Par exemple, si $f(x) = x^2$, nous cherchons à déterminer l'aire orange ci-dessous.



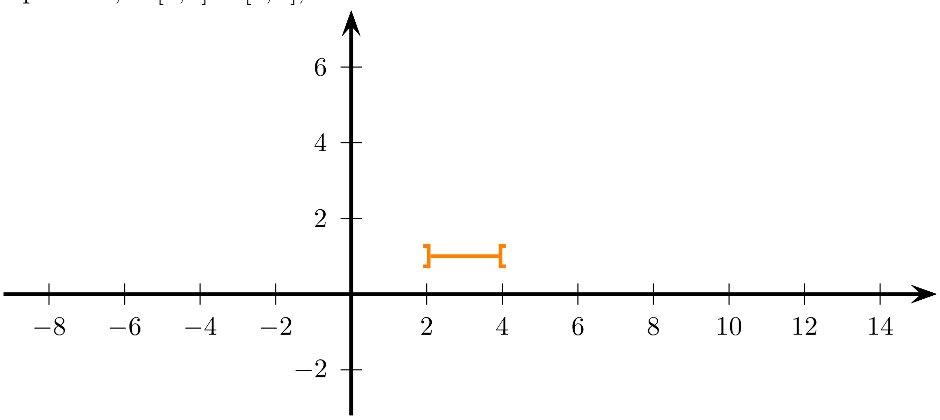
Naturellement, pour aborder un problème dont la réponse n'est pas immédiate, il convient de voir ce qu'il est possible de faire sur des cas de figures très simples.

Exemple 7.1.1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vaut 1 sur l'intervalle $[a, b]$ et 0 sinon.

Nous constatons que l'aire sous la courbe[1] correspond à celle d'un rectangle : $(b-a) \times 1 = b-a$. Nous noterons cette aire

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Graphiquement, si $[a, b] = [2, 4]$,



dans ce cas $\int_2^4 f(x)dx = 2$.

1. celle délimitée par $y = f(x)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

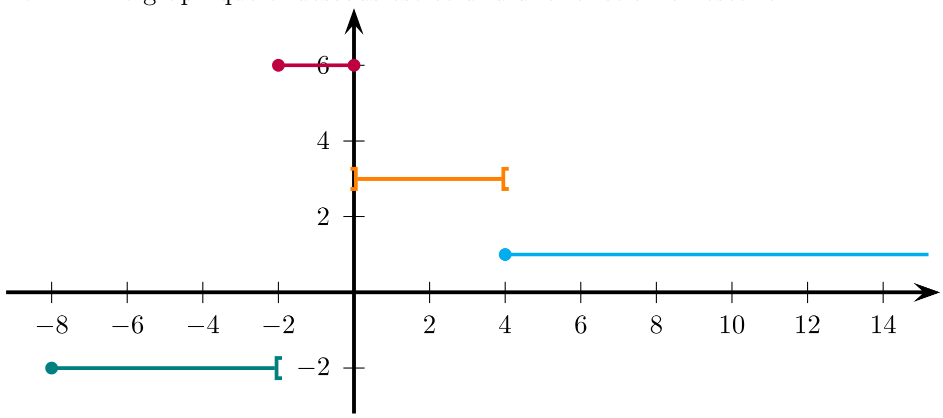
En cherchant à généraliser l'exemple précédent, nous serons amener à considérer les fonctions suivantes.

Définition 7.1.1. *Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite* ***en escalier*** *s'il existe $k \in \mathbb{N}_*$, des constantes $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ et des intervalles disjoints $I_i = [a_i, b_i] \subset [a, b]$ pour tout $i = 1, \ldots, k$ tels que*

$$f(x) = \begin{cases} a_i & si \quad x \in I_i, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Voyons cela sur un exemple.

Exemple 7.1.2. Le graphique ci-dessous est celui d'une fonction en escalier.



De manière intuitive, l'intégrale que nous cherchons à construire doit être linéaire : si la fonction est composée de morceaux disjoints, nous devons additionner les aires associées à chaque morceaux pour déterminer l'aire globale. Pour ces raisons, l'intégrale associée à une fonction en escalier f doit être

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{k} a_i(b_i - a_i).$$

Remarque. Observons en passant que les aires se trouvant sous l'axe des abscisses sont comptées négativement (i.e. lorsque $a_i < 0$).

Bien entendu, pour que l'intégrale soit un objet mathématique intéressant, il convient d'expliquer comment calculer des intégrales lorsque la fonction est plus élaborée[2] qu'une fonction en escalier. Une idée naturelle serait de chercher à approcher les fonctions considérées par des fonctions en escaliers (puisque nous savons calculer l'intégrale associée).

Voyons deux procédés permettant d'approcher, par excès et par défaut, l'aire à l'aide de fonctions en escaliers.

Définition 7.1.2. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction* ***bornée*** *et $\mathbf{s} = (x_0, \ldots, x_n)$[3] une subdivision de $[a, b]$ en $n + 1 \in \mathbb{N}$ points. Nous définissons alors les quantités suivantes : pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$,*

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad et \quad M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

2. Le lecteur peut déjà s'interroger quant aux hypothèses de régularité qu'il convient d'imposer à de telles fonctions.
3. Par convention $x_0 = a$ et $x_n = b$.

Ce procédé permet alors de définir les sommes de Darboux associées à f :

$$I(f,\mathbf{s}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \quad et \quad S(f,\mathbf{s}) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

où $\Delta x_i = x_{i-1} - x_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$.

$I(f,\mathbf{s})$ correspond à l'aire sous la courbe en faisant des rectangles à droite, tandis que $S(f,\mathbf{s})$ correspond aux rectangles à gauche.

Remarque. Graphiquement, les sommes de Darboux se représentent comme suit :

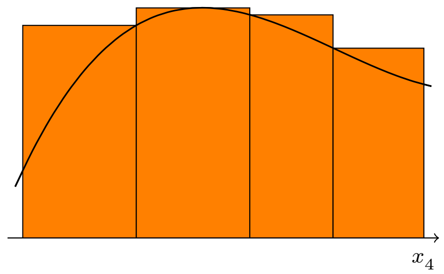


FIGURE 7.1 – Somme supérieure de Darboux

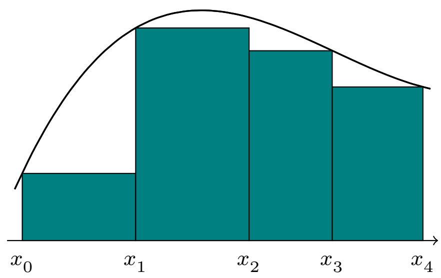


FIGURE 7.2 – Somme inférieure de Darboux

Le lecteur aura remarquer que nous n'avons imposé aucunes conditions de régularité à la fonction f. Il est seulement supposé que f est bornée pour être certain, via la notion de bornes supérieures et inférieures, que les quantités M_i et m_i fassent sens pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Comme annoncé, les sommes de Darboux $I(f,\mathbf{s})$ et $S(f,\mathbf{s})$ sont des fonctions en escaliers qui encadrent la fonction d'intérêt :

$$I(f,\mathbf{s}) \leq f \leq S(f,\mathbf{s}).$$

Nous avons alors la sensation que pour définir l'intégrale de f sur $[a,b]$, il faudra choisir une subdivision $\mathbf{s}$ suffisamment **fine** afin que les aires des rectangles (à droite et à gauche) épousent au mieux l'allure de la courbe C_f. C'est le contenu de la définition suivante.

Définition 7.1.3. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Les quantités suivantes sont respectivement appelées intégrale de Riemann supérieure et inférieure :*

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf_{\mathbf{s}} S(f,\mathbf{s}) \quad et \quad \underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup_{\mathbf{s}} I(f,\mathbf{s})$$

où les infimum et supremum sont pris sur toutes les subdivisions $\mathbf{s}$ de $[a,b]$. Lorsque ces deux quantités coïncident, nous dirons que f est intégrable au sens de Riemann et la valeur commune sera notée

$$\int_a^b f(x)dx \quad ou \quad \int_a^b f dx.$$

L'ensemble des fonctions intégrables au sens de Riemann sur $[a,b]$ sera noté $\mathcal{R} = \mathcal{R}[a,b]$.

Remarque. 1. A nouveau, le fait que la fonction est bornée est essentiel : si $m \in \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$ sont tels que $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [a,b]$ alors

$$m(b-a) \leq I(f,\mathbf{s}) \leq S(f,\mathbf{s}) \leq M(b-a).$$

Ceci nous assurer que les infimum et supremum des intégrales de Riemann supérieures et inférieures sont bien définis. Une manière alternative de décrire la définition précédente est de dire que nous prenons le supremum sur les fonctions en escalier g (plutôt que sur les subdivisions) telles que $g \leq f$ ainsi que l'infimum des fonctions en escaliers h telle que $f \leq h$. Dans ce cas, $f \in \mathcal{R}$ lorsque ces deux quantités coïncident.

2. Il se trouve qu'il est possible d'adopter une approche équivalente[4] à celle que nous venons de proposer afin de construire l'intégrale de Riemann. Voici un bref descriptif de tout ceci : étant donnée $\mathbf{s} = (x_0, \ldots, x_n)$ une subdivision de $[a,b]$, considérons les sommes de Riemann

$$\mathcal{R}_{\mathbf{s}}(f) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) f(c_k)$$

où $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ est choisi librement pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$. A la subdivision $\mathbf{s}$ il est possible d'associer son pas, noté $\Delta\mathbf{s}$, défini comme suit :

$$\Delta\mathbf{s} = \max_{k=1,\ldots,n} (x_k - x_{k-1}).$$

Dans ce cas, il est possible d'établir (cf. []) qu'une fonction f est intégrable au sens de Riemann lorsque $\lim_{\Delta\mathbf{s}\to 0} \mathcal{R}_{\mathbf{s}}(f)$ existe, indépendamment du choix des $(c_k)_{k=1,\ldots,n}$. La limite obtenue correspond alors à $\int_a^b f(x)dx$ et coïncide avec la définition 7.1.3.

Faisons quelques tests pour voir si nous sommes capables de traiter des exemples simples à partir des définitions données ci-dessus. Nous invitons le lecteur à dessiner le graphe de fonctions associées ainsi que la subdivision choisie et les rectangles induits.

Exemple 7.1.3. 1. Soit $f(x) = x$ et $I = [0,1]$. Nous choisissons $\mathbf{s} = (0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1)$ avec $n \in \mathbb{N}$ un entier qui sera choisi à postériori. Notons les faits suivants : avec une telle subdivision nous avons, pour tout $i = 1, \ldots, n$,

$$\Delta x_i = \frac{1}{n} \quad ; \quad m_i = x_{i-1} = \frac{i-1}{n} \quad ; \quad M_i = x_i = \frac{i}{n}.$$

Ceci va nous permettre de déterminer la valeur de la différence des sommes de Darboux associées (laquelle doit tendre vers 0 pour que l'intégrale de f existe) :

$$S(f,\mathbf{s}) - I(f,\mathbf{s}) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \Delta x_i.$$

Cette différence vaut alors

$$S(f,\mathbf{s}) - I(f,\mathbf{s}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n}.$$

4. C'est, a priori, celle qui a été choisie historiquement par Riemann.

Cette quantité peut-être rendu aussi petite que nous voulons dès lors que n (le nombre de points) est suffisamment grand. La fonction est bien Riemann intégrable[5]. La valeur de $\int_a^b f(x)dx$ correspond alors à $S(f, \mathbf{s})$[6] lorsque le pas de discrétisation se rapproche de 0 (i.e. lorsque $n \to +\infty$). En effet, nous avons

$$S(f, \mathbf{s}) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} \longrightarrow \frac{1}{2} \quad \text{lorsque} \quad n \to +\infty$$

puisque $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$. Cette valeur était attendue puisqu'il s'agit de l'aire d'un rectangle isocèle de côté 1.

2. Soit $f(x) = x^2$ et $I = [0, 1]$ et conservons la même subdivision $\mathbf{s}$. Notons alors qu'avec une telle subdivision nous avons[7], pour tout $i = 1, \ldots, n$,

$$\Delta x_i = \frac{1}{n} \quad ; \quad m_i = x_{i-1}^2 \quad ; \quad M_i = x_i^2.$$

Ceci va nous permettre de déterminer la valeur de la différence des sommes de Darboux associées :

$$S(f, \mathbf{s}) - I(f, \mathbf{s}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - x_{i-1}^2) \times \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{n} \times \frac{1}{n^2} = O(\frac{1}{n}).$$

cette quantité tend de nouveau vers 0 lorsque $n \to +\infty$. A nouveau $f \in \mathcal{R}$ et la valeur de son l'intégrale vaut alors

$$\lim_{n \to +\infty} S(f, \mathbf{s}) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^2} \times \frac{1}{n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3}.$$

Remarque. Au travers ces exemples nous constatons qu'il est impératif :

- que l'écart entre deux points de la subdivision soit petit,
- que la différence entre m_i et M_i sur cette même subdivision soit également petite,
- que le produit de ces deux différences avec le nombre de points mis en jeu puisse être arbitrairement petit.

Bien que l'approche reposant uniquement sur la définition 7.1.3 ne soit pas très pratique, elle nous permet tout de même de forger notre intuition et de retrouver des résultats connus. Néanmoins, ce n'est pas simple de savoir quelles types de fonctions l'espace $\mathcal{R}$ contient. Nous allons explorer cette question dans la section suivante.

7.2 Fonctions intégrables au sens de Riemann

Le lecteur imaginera sans peine que la définition 7.1.3 ne sera pas très commode à mettre en oeuvre dès lors que la fonction considérée gagne en complexité. Il convient alors d'exhiber un critère

5. La monotonie joue un miracle assez remarquable ici : si nous trouvons une subdivision $\mathbf{s}$ pour laquelle l'écart entre $S(f, \mathbf{s})$ et $I(f, \mathbf{s})$ est aussi petit que nous le voulons, ceci sera encore vérifié pour $\inf_{\mathbf{s}} S(f, \mathbf{s})$ et $\inf_{\mathbf{s}} I(f, \mathbf{s})$. Cet aspect technique sera détaillé dans une section ultérieure.

6. ou $I(f, \mathbf{s})$.

7. Tout fonctionne sans encombre (comme l'exemple précédent) puisque la fonction est croissante

plus simple d'emploi. A cet effet, il est important de voir comment se comportent les intégrales supérieures et inférieures vis-à-vis de subdivisions de plus en plus fines.

7.2.1 Subdivisions et critère d'intégrabilité

Définition 7.2.1. *Soient* $\mathbf{s}$ *et* $\mathbf{s}^*$ *deux subdivisions du segment* $[a, b]$. *Nous dirons que* $\mathbf{s}^*$ *est plus fine que* $\mathbf{s}$ *lorsque* $\mathbf{s} \subset \mathbf{s}^*$. *La réunion de deux subdivisions* $\mathbf{s}_1$ *et* $\mathbf{s}_2$ *sera notée* $\mathbf{s}_1 \cup \mathbf{s}_2$.

Remarque. Autrement dit une subdivision est plus fine qu'une autre si elle contient plus de points.

Le résultat suivant est très intuitif et sa démonstration peut facilement être présentée, de manière informelle, par un dessin.

Théorème 53. *Soient* $\mathbf{s}^*$ *et* $\mathbf{s}$ *deux subdivisions telles que* $\mathbf{s}_*$ *soit la plus fine des deux. Les résultats suivants sont alors vérifiés :*

$$I(f, \mathbf{s}) \leq I(f, \mathbf{s}^*) \quad et \quad S(f, \mathbf{s}^*) \leq S(f, \mathbf{s}). \tag{7.2.1}$$

En particulier,

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Remarque. Ainsi, prendre des subdivisions plus fines permet de diminuer la taille des sommes supérieures de Darboux et d'augmenter celle des sommes inférieures.

Démonstration. Voici quelques éléments expliquant les idées de la démonstration, nous renvoyons le lecteur vers [] pour plus de détails.

La démonstration de (7.2.1) s'effectue en supposant que $\mathbf{s}^*$ possède un point de plus que $\mathbf{s}$. Il suffit ensuite d'évaluer la différence entre $I(f, \mathbf{s}^*)$ et $I(f, \mathbf{s})$: seuls trois termes[8] seront non nuls et un réarrangement de ces derniers permet de montrer que la différence est supérieure ou égale à 0. Il suffit ensuite de procéder par récurrence pour traiter le cas où $\mathbf{s}^*$ contient k points supplémentaires. Enfin, il faut reprendre ces arguments avec les sommes supérieures. Nous laissons au lecteur le soin de produire la démonstration complète de tout ceci.

Traitons à présent la deuxième partie du théorème. A cet effet, soient $\mathbf{s}_1$ et $\mathbf{s}_2$ deux subdivisions et notons $\mathbf{s} = \mathbf{s}_1 \cup \mathbf{s}_2$. Observons que $\mathbf{s}$ est plus fine que $\mathbf{s}_1$ et $\mathbf{s}_2$. Ainsi, d'après (7.2.1), nous avons

$$I(f, \mathbf{s}_1) \leq I(f, \mathbf{s}) \leq S(f, \mathbf{s}) \leq S(f, \mathbf{s}_2).$$

Autrement dit,

$$I(f, \mathbf{s}_1) \leq S(f, \mathbf{s}_2).$$

La subdivision $\mathbf{s}_2$ étant fixée, il suffit ensuite de prendre le supremum sur les subdivisions $\mathbf{s}_1$ pour obtenir

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq S(f, \mathbf{s}_2)$$

et la conclusion s'ensuit en prenant l'infimum sur les subdivisions $\mathbf{s}_2$. □

8. Si $x*$ est le point supplémentaire, celui-ci se trouve entre deux points consécutifs de $\mathbf{s}$, disons x_k et x_{k+1} pour un certain $k \in \{1, \ldots, n\}$ et il faudra traiter les termes de la somme liés à $x^* - x_k$, $x_{k+1} - x^*$ et $x_{k+1} - x_k$.

Le résultat précédent va nous permettre d'obtenir un critère très utile sur lequel nous allons nous appuyer tout au long de cette section.

Théorème 54 (Critère d'intégrabilité)**.** *Une fonction f est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$ si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision $\mathbf{s}$ de $[a,b]$ telle que*

$$S(f,\mathbf{s}) - I(f,\mathbf{s}) < \varepsilon. \tag{7.2.2}$$

Démonstration. Par définition des intégrales de Riemann inférieures et supérieures, pour n'importe quelle subdivision $\mathbf{s}$ nous avons

$$I(f,\mathbf{s}) \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq S(f,\mathbf{s}).$$

Ainsi, lorsque (7.2.2) est vérifiée, nous en déduisons que

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx < \varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$ nous avons donc $\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx$: i.e. f est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$.

Réciproquement, supposons que f soit intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$: pour tout $\varepsilon > 0$, il existe alors deux subdivisions $\mathbf{s}_1$ et $\mathbf{s}_2$ telles que

$$S(f,\mathbf{s}_2) - \int_a^b f(x)dx < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \int_a^b f(x)dx - I(f,\mathbf{s}_1) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $\mathbf{s} = \mathbf{s}_1 \cup \mathbf{s}_2$. Dans ce cas, (7.2.1) nous assure que

$$S(f,\mathbf{s}) \leq S(f,\mathbf{s}_2) < \int_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2} < I(f,\mathbf{s}_1) + \varepsilon \leq I(f,\mathbf{s}) + \varepsilon$$

et ceci prouve que (7.2.2) est vérifiée. □

Voici une conséquence de ce critère d'intégrabilité.

Corollaire 55. *1. Si le critère (7.2.2) est satisfait pour $\mathbf{s} = \{x_0, \ldots, x_n\}$ et si, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, s_i et t_i sont deux points quelconques de $[x_{i-1}, x_i]$ alors*

$$\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(s_i)|\Delta x_i < \varepsilon.$$

2. De plus, nous avons aussi

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i - \int_a^b f(x)dx \right| < \varepsilon. \tag{7.2.3}$$

Remarque. La deuxième assertion donne une façon d'obtenir une valeur approchée de $\int_a^b f(x)dx$ à partir d'une subdivision bien choisie. Nous reviendrons sur cet aspect un peu plus tard dans le chapitre en précisant ce résultat lorsqu'une hypothèse de régularité sera imposée à f.

Démonstration. La démonstration est élémentaire puisque, pour tout $i = 1, \ldots, n$, $f(s_i)$ et $f(t_i)$ sont deux éléments de l'intervalle $[m_i, M_i]$. Ceci entraine alors que

$$|f(s_i) - f(t_i)| \leq M_i - mi.$$

D'où $\sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(s_i)|\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)\Delta x_i = S(f, \mathbf{s}) - I(f, \mathbf{s})$. Lorsque $f \in \mathcal{R}$, le théorème 54 permet alors de conclure.

Enfin, pour établir la deuxième assertion, il suffit d'observer que

$$I(f, \mathbf{s}) \leq \sum_{i=1} f(s_i)\Delta x_i \leq S(f, \mathbf{s}) \quad \text{et} \quad I(f, \mathbf{s}) \leq \int_a^b f(x)dx \leq S(f, \mathbf{s}).$$

pour employer à nouveau le théorème 54. □

7.2.2 Sous-ensembles de $\mathcal{R}[a, b]$

Grâce au critère 54, nous allons pouvoir mettre en évidence certains sous-ensembles de l'espace des fonctions intégrables au sens de Riemann $\mathcal{R} = \mathcal{R}[a, b]$.

Comme le lecteur l'aura constaté, pour qu'une fonction soit intégrable au sens de Riemann il semble essentiel que nous puissions contrôler de manière uniforme l'écart entre M_i et m_i. Pour cela, nous allons **introduire une notion de régularité plus contraignante que la continuité**.

Définition 7.2.2 (Continuité uniforme)**.** *Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$. Nous dirons que f est uniformément continue sur I si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que*

$$\textit{pour tout} \quad x, y \in I \quad \textit{tels que} \quad |x - y| < \alpha \quad \textit{alors} \quad \big|f(x) - f(y)\big| < \varepsilon.$$

Remarque. La continuité d'une fonction en un point est une propriété locale. Au contraire, **la continuité uniforme est une propriété globale**. Il est essentiel d'observer que le nombre α est **indépendant du choix de x et y**. Il est alors évident que la continuité uniforme entraine la continuité en n'importe quel point de l'intervalle I ; ce lien fait songer à celui existant entre la convergence uniforme et la convergence simple d'une suite de fonctions.

Voici quelques exemples permettant d'illustrer cette nouvelle notion.

Exemple 7.2.1. 1. La fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$. En effet, pour établir ceci il convient d'utiliser le fait suivant : pour tout $a, b \geq 0$ nous avons

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Par suite, pour tout $x \geq y \geq 0$, nous avons

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{x-y}.$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il suffit de poser $\alpha = \varepsilon^2$ pour obtenir que $|x - y| < \alpha$ entraine que

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \varepsilon.$$

2. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle qu'il existe $k > 0$ vérifiant
$$|f'(x)| \leq k \quad \text{pour tout} \quad x \in I.$$
Le théorème des accroissements finis [9] 29 nous assure alors que la fonction est lipschitzienne : pour tout $x, y \in I$, nous avons
$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$
Ces fonctions sont alors uniformément continues sur I. En effet, étant donné $\varepsilon > 0$, il suffit de choisir $\alpha = \frac{\varepsilon}{k}$.
3. Plus généralement, les fonctions vérifiant l'inégalité suivante : il existe $k > 0$ et $0 < \beta \leq 1$ tels que pour tout $x, y \in I$,
$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|^\beta$$
sont uniformément continues sur I. Une telle fonction est dite *höldérienne* de paramètre [10] β et k est la constante de Hölder associée. L'ensemble des fonctions hölderiennes est donc un ensemble plus grand que $C^0(I, \mathbb{R})$ mais plus petit que $C^1(I, \mathbb{R})$, il permet d'affiner la compréhension de la régularité d'une fonction.
4. Soit $I =]1 + \infty[$ et $f(x) = \frac{1}{x-1}$. La fonction f est continue sur I et n'est évidemment pas bornée. Nous allons montrer que f n'est pas uniformément continue sur I : le problème provient du comportement de f à proximité de a. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, tout $\alpha > 0$ et tout $x \in I$ tel que $|x - a| < \alpha$, il est possible de trouver y (suffisamment proche de a) tel que $|x - y| < \alpha$ mais $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$.

Le théorème suivant montre que si l'intervalle I est un ensemble fermé et borné $[a, b] \subset \mathbb{R}$ alors une fonction continue est automatiquement uniformément continue.

Théorème 56 (Heine - version faible)**.** *Soient $I = [a, b]$ un intervalle fermé et borné et $f \in C^0\big([a, b], \mathbb{R}\big)$. Alors f est uniformément continue sur $[a, b]$*

Remarque. Ce résultat sera généralisé dans le chapitre **??** en remplaçant $[a, b]$ par un ensemble dit *compact*.

Démonstration. Procédons par l'absurde : il existe $\varepsilon > 0$, tel que pour tout $n \geq 1$, il existe x_n et y_n vérifiant
$$|x_n - y_n| \leq \frac{1}{2^n} \quad \Longrightarrow \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$
Pour tout $n \geq 1$, posons $A_n = \{x_l\,;\, l \geq n\} \subset [a, b]$. Cet ensemble étant non vide et majoré par b, il admet une borne supérieure $b_n = \sup_{n \geq 1} A_n$. Nous laissons le soin au lecteur de vérifier que (b_n) est une suite décroissante et minorée par a : il s'agit donc d'une suite convergente et nous noterons sa limite β (i.e. $\lim_{n \to +\infty} b_n = \beta$). La caractérisation de la borne supérieure nous permet de trouver x_{k_n} (avec $k_n \geq n$) tel que
$$b_{k_n} - \frac{1}{2^{k_n}} \leq x_{k_n} < b_{k_n}.$$

9. En fait, il est plus précis de parler de l'inégalité des accroissements finis : si $|f'(x)| \leq k \quad \text{pour tout} \quad x \in I$ alors $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y]$ pour tout $x, y \in I$. Ceci reste valable même si $f : I \to \mathbb{C}$ contrairement à l'égalité du théorème des accroissements finis.

10. Nous invitons le lecteur à déterminer ce qui se produirait si l'inégalité était satisfaite avec $\beta > 1$.

En particulier, $\lim_{n\to+\infty} x_{k_n} = \beta$. En se restreignant à la sous-suite (y_{k_n}), nous avons alors

$$|x_{k_n} - y_{k_n}| \leq \frac{1}{2^{k_n}} \leq \frac{1}{2^n}.$$

D'où $\lim_{n\to+\infty} y_{k_n} = \beta$ et, grâce à la continuité de f,

$$\lim_{n\to+\infty} |f(x_{k_n}) - f(y_{k_n})| = 0.$$

Or, puisque $|x_{k_n} - y_{k_n}| \leq \frac{1}{2^n}$, notre hypothèse de départ nous assure que

$$\lim_{n\to+\infty} |f(x_{k_n}) - f(y_{k_n})| \geq \varepsilon > 0$$

ce qui est absurde. □

Armé de cette nouvelle notion, nous pouvons enfin présenter des ensembles de fonctions intégrables au sens de Riemann.

Théorème 57. *Si f est continue sur $[a,b]$ alors f est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$.*

Remarque. Il est même possible de faire mieux (cf. [**?**]) : si f est bornée et n'a qu'un nombre fini de points de discontinuités sur $[a,b]$ alors f est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ et considérons $\eta > 0$ tel que $(b-a)\eta < \varepsilon$. Alors, d'après le théorème de Heine (version faible) 56, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in [a,b]$,

$$|x - y| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \eta.$$

Choisissons alors $\mathbf{s}$ une subdivision de $[a,b]$ telle que $\Delta x_i < \delta$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. Dans ce cas, par construction, nous avons

$$M_i - m_i < \eta \quad \text{pour tout} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Ainsi, nous avons

$$S(f,\mathbf{s}) - I(f,\mathbf{s}) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i < \eta \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = (b-a)\eta < \varepsilon.$$

Le théorème 54 permet alors de conclure. □

Remarque. La continuité uniforme est la clé permettant de choisir une subdivision adéquate de l'intervalle $[a,b]$.

Comme nous avions pu le voir dans les exemples 7.1.3, lorsque les fonctions sont monotones, il est assez simple de trouver une subdivision $\mathbf{s}$ qui fonctionne. Ce résultat est en fait très général.

Théorème 58. *Si f est monotone sur $[a,b]$ alors f est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$.*

Démonstration. Nous laissons le soin au lecteur de compléter cette démonstration à l'aide des indications suivantes : considérer une fonction croissante. Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $n \geq 1$, choisir une subdivision $\mathbf{s}$ telle que $\Delta x_i \leq \frac{b-a}{n}$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. Pour conclure, utiliser le théorème 54. □

Comme nous allons le constater, la composition d'une fonction intégrable au sens de Riemann par une fonction continue est encore une fonction intégrable au sens de Riemann.

Théorème 59 (Stabilité par composition)**.** *Soit f une fonction intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$ telle que $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [a, b]$. Si $\phi : [m, M] \to \mathbb{R}$ est continue alors $\phi \circ f$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$.*

Démonstration. Dans ce qui suit nous noterons $h = \phi \circ f$. Soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème 56, la fonction ϕ est uniformément continue sur $[m, M]$: il existe $\delta > 0$ tel que $|\phi(s) - \phi(t)| < \varepsilon$ pour tout $s, t \in [m, M]$ vérifiant $|s - t| < \delta$. La fonction f étant intégrable, nous pouvons trouver une subdivision $\mathbf{s} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ telle que

$$S(f, \mathbf{s}) - I(f, \mathbf{s}) < \delta^2.$$

Si M_i et m_i ont la même signification que dans la définition 7.1.2, nous noterons leurs homologues (pour h) par M_i^* et m_i^*. Pour montrer que $h = \phi \circ f$ est intégrable, il va falloir séparer la subdivision $\mathbf{s}$ en deux ensembles :

$$A = \{i \,;\, M_i - m_i < \delta\} \quad \text{et} \quad B = \{i \,;\, M_i - m_i \geq \delta\}.$$

Observons alors les faits suivants :

- si $i \in A$ alors $M_i^* - m_i^* < \varepsilon$.
- tandis que si $i \in B$, par définition de la subdivision $\mathbf{s}$, nous avons

$$\sum_{i \in B} (M_i - m_i)\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i \leq \delta^2$$

  En conséquence, puisque $i \in B$ entraine $M_i - m_i \geq \delta$, nous avons aussi

$$\delta \sum_{i \in B} \Delta x_i \leq \sum_{i \in B} (M_i - m_i)\Delta x_i \leq \delta^2.$$

  D'où, $\sum_{i \in B} \Delta x_i \leq \delta$.

Finalement, en notant $K = \sup_{t \in [m,M] | \phi(t)|}$, nous avons

$$\begin{aligned} S(h, \mathbf{s}) - I(h, \mathbf{s}) &= \sum_{i \in A}^{n} (M_i^* - m_i*)\Delta x_i + \sum_{i \in B}^{n} (M_i^* - m_i*)\Delta x_i \\ &\leq \varepsilon \sum_{i \in A} \Delta x_i + 2K\delta \\ &\leq \varepsilon(b - a) + 2K\delta. \end{aligned}$$

Quitte à modifier légèrement le choix de ε, on peut supposer sans perdre en généralité que $0 < \delta \leq \varepsilon$. Ce qui conclut la démonstration grâce au théorème 54. $\square$

Les résultats précédents permettent d'avoir une idée plus précise ce qu'est une fonction intégrable au sens de Riemann. Il parait cependant naturel de s'interroger :

- est-il possible de décrire précisément et simplement l'ensemble des fonctions intégrables au sens de Riemann ?
- Est-il possible de trouver une fonction intégrable au sens de Riemann qui ne soit ni continue (ou continue par morceaux), ni monotone ?

La réponse à ceci sera donné dans le chapitre exposant la théorie de la mesure de Lebesgue.

7.3 Propriétés de l'intégrale

Maintenant que nous avons défini la notion d'intégrable et que nous avons exhibé des classes intéressantes de fonctions intégrables au sens de Riemann, il parait important de voir quelles sont les propriétés satisfaites par cette intégrale. Comme nous allons le constater, nous allons retrouver toutes les propriétés rencontrées en classe de terminale.

Rappelons que $f \in \mathcal{R} = \mathcal{R}[a,b]$ signifie qu'il s'agit d'une fonction intégrable au sens de Riemann sur un intervalle $[a,b]$.

Théorème 60. *1. (Linéarité) Soient $f, g \in \mathcal{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $f+g \in \mathcal{R}$ et $cf \in \mathcal{R}$. De plus,*

$$\int_a^b f+g dx = \int_a^b f dx + \int_a^b g dx \quad et \quad \int_a^b \lambda f dx = \lambda \int_a^b f dx.$$

2. (Monotonie) Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a,b]$ et $f, g \in \mathcal{R}$ alors

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

3. (Relation de Chasles) si $f \in \mathcal{R}$ et $a < c < b$ alors

$$\int_a^c f dx + \int_c^b f dx = \int_a^b f dx.$$

4. Si $f \in \mathcal{R}$ et $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in [a,b]$ alors

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq M(b-a).$$

Démonstration. L'ensemble de ces démonstrations s'effectue grâce au théorème 54. Nous présentons seulement la démonstration du premier point. Si $h = f+g$ et si $\mathbf{s}$ est subdivision de $[a,b]$ alors

$$I(f,\mathbf{s}) + I(g,\mathbf{s}) \leq I(h,\mathbf{s}) \leq S(h,\mathbf{s}) \leq S(f,\mathbf{s}) + S(g,\mathbf{s}). \tag{7.3.1}$$

En outre, puisque $f, g \in \mathcal{R}$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe deux subdivisions $\mathbf{s}_1$ et $\mathbf{s}_2$ telles que

$$S(f,\mathbf{s}_1) - I(f,\mathbf{s}_1) < \varepsilon \quad \text{et} \quad S(g,\mathbf{s}_2) - I(g,\mathbf{s}_2) < \varepsilon$$

et ces deux inégalités sont encore valables en remplaçant $\mathbf{s}_1$ et $\mathbf{s}_2$ par leur réunion $\mathbf{s}$ (qui est une subdivision plus fine). D'où, d'après (7.3.1), nous avons

$$S(h,\mathbf{s}) - I(h,\mathbf{s}) < 2\varepsilon.$$

Ceci prouve que $h = f + g \in \mathcal{R}$.

Nous devons à présent montrer que l'intégrale est bien linéaire. Pour cela, il suffit d'observer que pour la même subdivision $\mathbf{s}$ qu'auparavant nous avons

$$S(f, \mathbf{s}) < \int_a^b f dx + \varepsilon \quad \text{et} \quad S(g, \mathbf{s}) < \int_a^b g dx + \varepsilon.$$

Ainsi (7.3.1) nous assure que

$$\int_a^b h dx \leq S(h, \mathbf{s}) \leq \int_a^b f dx + \int_a^b g dx + 2\varepsilon.$$

Le nombre ε étant quelconque, ceci implique alors que

$$\int_a^b f + g dx \leq \int_a^b f dx + \int_a^b g dx.$$

Pour obtenir l'inégalité inverse, il suffit ensuite de reproduire le raisonnement précédent avec $-f$ et $-g$. □

Nous venons de montrer que l'espace des fonctions intégrables au sens de Riemann était un espace vectoriel réel. Il se trouve qu'il s'agit aussi d'une algèbre : le produit de deux fonctions intégrables au sens de Riemann l'est encore.

Théorème 61 (Stabilité par produit et valeur absolue)**.** *Soient $f, g \in \mathcal{R}$ alors*

1. $fg \in \mathcal{R}$
2. $|f| \in \mathcal{R}$ *et* $\left|\int_a^b f dx\right| \leq \int_a^b |f| dx$.

Démonstration. Tout va reposer sur le théorème 59. En effet, si $\phi(t) = t^2$ alors

$$f \in \mathcal{R} \quad \Longrightarrow \quad f^2 \in \mathcal{R}.$$

Pour démontrer la première assertion, il suffit ensuite d'observer que

$$4fg = (f + g)^2 - (f - g)^2.$$

Pour la deuxième assertion, il contient de choisir $\phi(t) = |t|$. Choisissons ensuite $c = \pm 1$ tel que

$$c \int_a^b f dx \geq 0.$$

Ainsi $\left| \in_a^b f dx\right| = c \int_a^b f dx = \int_a^b c f dx \leq \int_a^b |f| dx$ puisque $cf \leq |f|$. □

7.4 Liens avec la dérivation

Il est temps d'exposer les liens qui existent entre intégration et dérivation. Pour l'instant, l'intégrale d'une fonction sur $[a, b]$ correspondait à un nombre réel (une aire). Cependant, nous pourrions très bien choisir d'intégrer une fonction sur un intervalle $[a, x]$ (avec $x \in [a, b]$) pour ensuite considérer la fonction $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

C'est ce que nous allons faire à présent.

Théorème 62. *Si $f \in \mathcal{R}$ alors la fonction F définie pour tout $x \in [a, b]$ par*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

est uniformément continue sur $[a, b]$. De plus, F est dérivable là où f est continue et

$$F'(x) = f(x).$$

en ces points. Si la formule précédente est valide sur $[a, b]$ tout entier, nous dirons que F est une primitive de f sur l'intervalle $[a, b]$.

Remarque. Finalement l'intégrale est un moyen de construire de nouvelles fonctions dérivables.

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{R}$ et, puisque f est par hypothèse bornée sur $[a, b]$, notons par M l'un des majorants de $|f(t)|$ pour $t \in [a, b]$. Pour tout $a \leq x < y \leq b$, nous avons

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_y^x f(t)dt \right| \leq M(y - x)$$

d'après le théorème 60. Ainsi, étant donné $\varepsilon > 0$, il suffit de choisir $\alpha = \frac{\varepsilon}{M}$ pour avoir :

$$|x - y| < \alpha \quad \Longrightarrow \quad |F(y) - F(x)| < \varepsilon.$$

Autrement dit, nous venons de montrer que F est uniformément continue sur $[a, b]$.

Soit $x_0 \in [a, b]$ un point de continuité de f. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

à condition que $|x - x_0| \leq \alpha$. Dans ce cas, si $x_0 - \delta < s \leq x_0 \leq t < x_0 + \delta$ et $a \leq s < t \leq b$ nous avons

$$\left| \frac{F(t) - F(s)}{t - s} - f(x_0) \right| = \left| \frac{1}{t - s} \int_s^t \big[f(u) - f(x_0)\big] du \right| < \varepsilon.$$

grâce aux propriétés du théorème 60. Autrement dit, $F'(x_0) = f(x_0)$. □

Le fait que le procédé d'intégration permettent de construire de nouvelles fonctions (sans pour autant fournir une formule explicite) est très pratique. Notamment lors de la résolution d'équations différentielles. Nous indiquons au passage une nouvelle notation : si $f \in C^0\big([a, b], \mathbb{R}\big)$ alors

$$\int f(x)dx$$

désigne une primitive F de f sur $[a, b]$ (i.e. $F' = f$).

Exemple 7.4.1 (Résolution d'équation différentielle linéaire d'ordre 1)**.** Sans entrer dans trop de détails (nous renvoyons le lecteur vers [] à ce sujet). Une équation linéaire d'ordre 1 est une équation de la forme

$$(E)\ :\quad a(x)y' + b(x)y = c(x)$$

où a, b, c sont des fonctions continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$; nous imposons que $a(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$.

Résoudre l'équation différentielle consiste à déterminer toutes les fonctions dérivables $y\ :\ I \to \mathbb{R}$ vérifiant (E). Le lecteur n'est pas sans savoir que le rôle de la théorie des espaces vectoriel fournit une réponse adéquate à la résolution de ce type de problème. En résumé, il convient de

- Trouver une base du sous-espace vectoriel composé des solutions de l'équation différentielle homogène associée (E_h) :
$$(E_h)\ :\quad a(x)y' + b(x)y = 0.$$
- Trouver une solution particulière y_p de (E).

Les solutions de (E) sont alors de la forme $y = y_h + y_p$ où y_h est une solution de (E_h). Voyons de quelle manière l'utilisation des primitives permet de déterminer y_h et y_p.

1. Débutons par la résolution de (E_h). Pour cela, il suffit d'observer que y est solution (ne s'annulant pas sur I) de (E_h) si et seulement si
$$\frac{y'}{y} = -\frac{b(x)}{a(x)}.$$
Il est alors possible d'intégrer (puisque $x \mapsto \frac{b(x)}{a(x)}$ est continue sur I) cette égalité pour obtenir :
$$\ln|y| = -\int \frac{b(x)}{a(x)}dx + C \quad \text{avec} \quad C \in \mathbb{R}.$$
D'où, $y(x) = Ke^{F(x)}$ avec $K \in \mathbb{R}$ et $F(x) = -\int \frac{b(x)}{a(x)}dx$.
2. Pour obtenir une solution particulière, nous allons employer la méthode de « **la variation de la constante** ». Pour cela, nous cherchons y_p sous la forme $y_p(x) = K(x)e^{F(x)}$ avec $x \mapsto K(x)$ une fonction dérivable sur I. Dans ce cas, y_p est solution de (E) si et seulement si
$$K'(x) = \frac{c(x)}{a(x)}e^{-F(x)}.$$
En intégrant, ceci nous donne $K(x) = \int \frac{c(x)}{a(x)}e^{-F(x)}dx$.
3. En résumé, les solutions de (E) sont de la forme
$$y(x) = e^{F(x)}\left(K + \int \frac{c(x)}{a(x)}e^{-F(x)}dx\right) \quad \text{avec} \quad K \in \mathbb{R}.$$

Remarque. Le lecteur est prié de reprendre l'exemple précédent avec $a(x) = \sin(x)$, $b(x) = -\cos(x)$ sur $I =]0, \frac{\pi}{2}[$ et de montrer que les solutions de (E) sont de la forme

$$y(x) = -x\cos(x) + \big(K \ln|\sin(x)|\big)\sin(x) \quad \text{avec} \quad K \in \mathbb{R}.$$

Il est même possible d'aller encore plus loin dans notre étude des liens entre intégration et dérivation. Dans la section suivante nous allons présenter l'un des piliers de l'analyse : le théorème fondamental de l'analyse.

7.4.1 Théorème fondamental de l'analyse

Cet élégant résultat est l'un des fondements majeurs de l'analyse. En particulier, il permet de calculer simplement des intégrales sans avoir à utiliser des subdivisions.

Théorème 63 (Théorème fondamental de l'analyse)**.** *Soient $f \in \mathcal{R}$ et F une primitive de f sur $[a,b]$ alors*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{7.4.1}$$

Démonstration. Pour $\varepsilon > 0$, puisque $f \in \mathcal{R}$, il existe $\mathbf{s} = \{x_0, \dots, x_n\}$ une subdivision de $[a,b]$ telle que

$$S(f,\mathbf{s}) - I(f,\mathbf{s}) < \varepsilon.$$

Le théorème des accroissements fini 29 nous assure alors, pour tout $i = 1, \dots, n$, l'existence de nombre $t_i \in]x_{i-1}, x_i[$ tels que

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(t_i)\Delta x_i.$$

En additionnant ces égalités, nous obtenons alors

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i.$$

En conséquence, grâce au corollaire 55, nous avons

$$\left| F(b) - F(a) - \int_a^b f(x)dx \right| < \varepsilon$$

ce qui est le résultat (puisque ε est arbitraire). □

Voyons ce que donne ce résultat sur l'exemple 7.1.3.

Exemple 7.4.2.
1. Observons que $F(x) = \frac{x^2}{2}$ est une primitive de $f(x) = x$. Ainsi, d'après le théorème 63, nous avons
$$\int_0^1 x dx = F(1) - F(0) = \frac{1}{2}.$$
2. De manière similaire $G(x) = \frac{x^3}{3}$ est la primitive de $g(x) = x^2$ et le théorème 63 nous assure que
$$\int_0^1 x^2 dx = G(1) - G(0) = \frac{1}{3}.$$

Il est flagrant que cette nouvelle approche est définitivement plus simple et plus manipulable.

Le théorème fondamental de l'analyse permet d'obtenir l'astucieuse intégration par partie, laquelle est un outil précieux pour calculer des intégrales.

Corollaire 64 (Intégration par parties). *Soient F, G deux fonctions dérivables sur $[a,b]$ dont les dérivées sont intégrables au sens de Riemann. Dans ce cas,*

$$\int_a^b F'G dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b FG' dx.$$

Voyons plutôt comment l'utiliser sur un exemple assez simple.

Exemple 7.4.3. Nous voulons déterminer la valeur de $I = \int_0^1 xe^{-x}dx$. Pour cela, il suffit de poser $F'(x) = e^{-x}$ et $G(x) = x$. Dans ce cas, $F(x) = -e^x$ et $G'(x) = 1$. D'ou,

$$I = F(1)G(1) - F(0)G(0) + \int_0^1 e^{-x}dx = -e^{-1} + 1 - e^{-1}.$$

Remarque. Le procédé d'intégration par partie a permis de faire disparaitre la fonction $x \mapsto x$. Si jamais nous avions eu l'intégrale $\int_0^1 x^2e^{-x}dx$, il aurait fallu procéder à deux intégrations par parties ; à chaque dérivation l'exposant de $x \mapsto x^2$ diminue de 1, simplifiant alors nos calculs.

Il est temps de voir d'autres utilisations de l'intégrale de Riemann et de faire des liens avec les chapitres précédents.

7.5 Intégration et formule de Taylor

Nous avions constaté que la formule de Taylor-Lagrange 40 correspondait à une généralisation du théorème des accroissements finis 29. Il existe un résultat analogue, cette fois-ci pour le théorème fondamental de l'analyse 63.

Théorème 65 (Taylor-Lagrange avec reste intégral). *Soient f une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et x_0 un point intérieur à I. Alors, pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 + h \in I$, nous avons*

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k + \frac{h^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(x_0 + th)dt. \tag{7.5.1}$$

Remarque. La démonstration s'effectue par récurrence sur n.

Ce nouveau résultat permet d'obtenir facilement des encadrements de fonctions.

Exemple 7.5.1. Nous allons montrer que pour tout $x \geq 0$, nous avons

$$x - \frac{x^2}{2} \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

Pour cela, posons $f(x) = \ln(1+x)$ pour tout $x \geq 0$. La formule de Taylor avec reste intégral 65 nous assure que

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2}\int_0^1 (1-t)^2 f^{(3)}(tx)dt.$$

Or $|f^{(3)}(x)| = \left|\frac{2}{(1+x)^3}\right| \leq 2$. D'où,

$$\left|f(x) - x + \frac{x^2}{2}\right| \leq x^3 \int_0^1 (1-t)^2 dt = \frac{x^3}{3}.$$

En particulier, cela nous permet de trouver une valeur approchée (à 10^{-8}) de $\ln(1,003)$. Pour cela il suffit de remplacer x par $0,003$ pour trouver que

$$\ln(1,003) \approx 0,0029955.$$

L'erreur commise est contrôlée par $\frac{0,003^3}{3} \leq 10^{-8}$.

7.5.1 Méthode des rectangles

Au lycée et au début du chapitre, nous avons vu qu'il était naturel d'approcher une intégrale par l'addition d'aires de rectangles (obtenus en encadrant la courbe par des fonctions en escalier). Il se trouve qu'en pratique (lors d'une implémentation sur ordinateur par exemple), les sommes de Darboux ne s'utilisent pas simplement. Ceci est dû au fait que le calcul des sommes de Darboux nécessite de déterminer les infimum m_i et les supremum M_i sur chaque intervalle de la subdivision et que ce genre d'opérations n'est pas simple numériquement lorsque la fonction est compliquée.

Nous avions également obtenu, via la formule (7.2.3), qu'il était possible d'approcher l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ grâce à une somme discrète. Le soucis étant alors que (7.2.3) ne permet pas de quantifier la vitesse de convergence (i.e. combien de points faut-il dans la subdivision pour que la somme soit aussi proche que nous le souhaitons de l'intégrale ?).

En supposant la fonction étudiée suffisamment régulière, il est possible de préciser tout ceci. Pour tout $n \geq 1$, nous construisons la subdivision $\mathbf{s}$ (de l'intervalle $[a,b]$) composée des points

$$x_i = a + (b-a)\frac{i}{n} \quad \text{pour tout} \quad i = 0, \ldots, n.$$

Ce procédé consiste à découper $[a,b]$ en intervalles de longueur $\frac{b-a}{n}$. Avec cette subdivision, nous avons le résultat suivant.

Proposition 66 (Sommes de Riemann)**.** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et*

$$M_1 = \sup_{x \in [a,b]} |f'(x)|$$

alors

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n f(x_i)\right| \leq \frac{M_1}{2n}(b-a)^2$$

Remarque. La quantité $\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n f(x_i)$ est appelée « somme de Riemann » associée à la fonction f. Il s'agit bien de la formule (7.2.3) avec $t_i = x_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$ et en constatant que

$$\Delta x_i = \frac{b-a}{n} \quad \text{pour tout} \quad i = 1, \ldots, n.$$

La formule obtenue dans la proposition précédente nous indique alors que la vitesse de convergence est en $O\left(\frac{1}{n}\right)$.[11]

Démonstration. Dans un premier temps, observons que

$$\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_i)dx. \tag{7.5.2}$$

puisque

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_i)dx &= \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(x_i)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}f(x_i).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\big(f(x)-f(x_i)\big)dx\right| \leq \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\big|f(x)-f(x_i)\big|dx$$

d'après l'inégalité triangulaire. De plus, en appliquant i fois le théorème 29 sur les intervalles $[x_{i-1}, x_i]$, nous avons

$$|f(x) - f(x_i)| \leq |f'(c_i)||x - x_i| \quad \text{avec} \quad c_i \in]x_{i-1}, x_i[\quad \text{pour tout} \quad i = 1, \ldots, n$$

D'où, par définition de M_1, nous en déduisons que

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right| &\leq M_1\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}|x - x_i|dx\\ &= M_1\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{(x-x_i)^2}{2}\right]_{x_{i-1}}^{x_i} \leq M_1\frac{(b-a)^2}{n}\end{aligned}$$

puisque, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, nous avons

$$M_1\left[\frac{(x-x_i)^2}{2}\right]_{x_{i-1}}^{x_i} = M_1\frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2} \leq M_1\frac{(b-a)^2}{n^2}.$$

□

Il se trouve qu'il existe d'autres méthodes (méthodes des trapèzes, méthodes de Simpson ...) permettant d'approcher une intégrale, la précision de ces méthodes est d'autant plus élevée que la fonction f est régulière (i.e. suffisamment dérivable). Ce genre de thématique s'inscrit dans le domaine de l'analyse numérique dans lequel les mathématiciens cherchent à mettre au point des méthodes permettant d'évaluer ou approcher sur ordinateur toute sorte d'objets (intégrales, fonctions, solutions d'une équation ...). Nous renvoyons le lecteur vers l'ouvrage [?] pour plus de détails à ce sujet.

11. Il est d'ailleurs naturel de se demander s'il est possible de faire mieux (quitte à supposer la fonction plus régulière).

Calcul de séries grâce à des intégrales

Nous avions déjà constaté qu'il était possible de mettre en parallèle les intégrales d'une fonction positive et décroissante avec une série numérique de termes positifs (cf. **??**). Nous allons maintenant voir comment calculer la valeur d'une série numérique convergente grâce aux outils du calcul intégral. L'ensemble repose sur l'utilisation des sommes de Riemann.

Exemple 7.5.2. 1. Soit $S_n = \sum_n^{2n} \frac{1}{k}$ Il convient de faire un changement d'indice et quelques manipulations élémentaires pour faire apparaitre une somme de Riemann :

$$S_n = \sum_{l=0}^{n} \frac{1}{n+l} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1} \frac{n}{n+l} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{1+\frac{l}{n}}.$$

le deuxième terme correspond alors à la somme de Riemann (sur $[0,1]$) de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ (laquelle est intégrable au sens de Riemann car continue sur $[0,1]$). Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{1+\frac{l}{n}} = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx.$$

Par suite,

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = \ln 2.$$

2. Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$. Un simple jeu d'écriture montre que $S_n = \frac{1}{2n} + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$ et le lecteur reconnaitra la somme de Riemann (sur $[0,1]$) de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. Puisque celle-ci est intégrable au sens de Riemann, nous avons

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \mathrm{Arctan}(1) - \mathrm{Arctan}(0) = \frac{\pi}{4}.$$

Revenons un instant sur la proposition 66. Celle-ci fournit une méthode permettant d'approcher une intégrale à l'aide de fonctions en escaliers. Comme nous l'avons dit, ceci est très commode d'un point de vue numérique. D'un point de vu théorique, nous pourrions nous demander s'il est possible d'approcher l'intégrale en utilisant des fonctions plus régulière (continues par exemple). Nous avons le résultat suivant allant dans cette direction (cf. []).

Théorème 67 (Approximation)**.** *Soit $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Il existe (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a,b]$ telle que*

$$\|f_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty$$

De plus, (f_n) approche f en moyenne :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \left|f_n(x) - f(x)\right|dx = 0.$$

Voyons maintenant de quelle manière l'intégrale se comporte vis-à-vis des suites ou des séries de fonctions.

7.5.2 Convergence uniforme et intégrale

Etant donnée une suite de fonction (f_n) nous avions constaté que l'échange entre une limite en n et une limite en x (pour calculer une dérivée par exemple) nécessitait de la convergence uniforme. Si, pour tout n, $f_n \in \mathcal{R}[a,b]$, il est naturel se demander à quelles conditions avons nous

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx \quad ?$$

Comme le lecteur peut s'en douter, la convergence simple ne sera pas suffisante.

Exemple 7.5.3.
1. Soit $f_n(x) = n^2x(1-x^2)^n$ pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \geq 1$. Pour tout $0 < x \leq 1$, par croissances comparées nous avons

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0.$$

En outre, puisque $f_n(0) = 0$, f_n converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$. De plus, un calcul élémentaire montre que

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{n^2}{2n+2} \longrightarrow +\infty \quad \text{lorsque} \quad n \to +\infty.$$

En comparaison $\int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx = 0$.

2. Soit $g_n(x) = nx(1-x^2)^n$ pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \geq 1$. Cette suite converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$. Cependant,

$$\int_0^1 g_n(x)dx = \frac{n}{2n+2} \longrightarrow \frac{1}{2} \quad \text{lorsque} \quad n \to +\infty$$

tandis que $\int_a^b \lim_{n\to+\infty} g_n(x)dx = 0$.

Pour intervertir intégration et limite, il suffit d'avoir un résultat de convergence uniforme.

Théorème 68 (Convergence uniforme et intégration)**.** *Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables au sens de Riemann sur $[a,b]$. Nous supposons que (f_n) converge uniformément vers f sur $[a,b]$. Alors $f \in \mathcal{R}[a,b]$ et*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Démonstration. Posons

$$\varepsilon_n = \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|.$$

Dans ce cas, nous avons $f_n - \varepsilon_n \leq f \leq f_n + \varepsilon_n$. En conséquence, grâce à la monotonie [12] de l'intégrale :

$$\int_a^b (f_n - \varepsilon_n)dx \leq \underline{\int_a^b} f dx \leq \overline{\int_a^b} f dx \leq \int_a^b (f_n + \varepsilon_n)dx. \tag{7.5.3}$$

12. Nous utilisons implicitement le fait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable au sens de Riemann

Ainsi,

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f dx - \underline{\int_a^b} f dx \leq \int_a^b 2\varepsilon_n dx = 2(b-a)\varepsilon_n.$$

Puisque grâce à hypothèse de convergence uniforme, $\varepsilon_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. Cela signifie que les intégrales supérieures et inférieures de f coïncident : i.e. $f \in \mathcal{R}$. De plus, grâce à (7.5.3) nous avons aussi

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx \right| \leq \varepsilon_n(b-a)$$

d'où le résultat lorsque $n \to +\infty$. □

A partir du résultat précédent, il est possible d'obtenir un résultat similaire, cette fois-ci pour les séries de fonctions.

Corollaire 69. *Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables au sens de Riemann sur $[a, b]$. Si la série $\sum_n f_n$ converge uniformément vers une fonction f sur $[a, b]$ alors $f \in \mathcal{R}[a, b]$ et*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n\geq 1} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Autrement dit, l'intégration se fait termes à termes.

Exemple 7.5.4. Soit,

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{(x \ln x)^n}{n!} & \text{si} \quad x \in]0, 1], \\ 1 & \text{si} \quad x = 1. \end{cases}$$

Une étude de variation montre que $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{e^n n!}$ qui est le terme général d'une série convergente à termes positifs donc $\sum_n f_n$ converge normalement sur $[0, 1]$. En observant que $\sum_{n=0}^\infty f_n(x) = x^x$, nous pouvons appliquer le théorème précédent afin d'obtenir

$$\int_0^1 x^x dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^\infty f_n(x)dx = \sum_{n=0}^\infty \int_0^1 f_n(x)dx.$$

En utilisant des intégrations par parties successives, il est possible de montrer que $\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$. Nous avons alors obtenu que

$$\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^n}.$$

Nous verrons ultérieurement que la convergence uniforme est très contraignante et qu'il serait préférable d'avoir un outil beaucoup plus commode que les deux derniers résultats. Pour cela, il faudra patienter jusqu'au moment où nous exposerons la théorie de la mesure de Lebesgue.

7.6 Généralisation

Comme nous allons le constater dans cette section, il est possible d'étendre à un cadre plus large l'intégrale de Riemann. Toutefois, bien que plutôt satisfaisante, l'extension que nous allons obtenir conserve quelques défauts qui nécessiteront une autre approche pour disparaitre.

7.6.1 Intégrale généralisée

Tout d'abord, il semble naturel de se débarrasser de la condition très restrictive[13] du domaine d'intégration en remplaçant l'intervalle fermé et borné $[a, b]$ par $]a, b]$ ou $[a, +\infty[$. Pour cela, rien de plus simple.

Définition 7.6.1 (Intégrale généralisée)**.**

1. *Soit f une fonction réelle définie sur $]a, b]$ et intégrable au sens de Riemann sur tout intervalle de la forme $[c, b]$ avec $a < c \leq b$. L'intégrale généralisée de f sur $]a, b]$ est définie par*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to a} \int_c^b f(x)dx$$

lorsque cette limite existe.

2. *Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction réelle définie et intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$ pour tout $b > a$. L'intégrale généralisée de f sur $[a, +\infty[$ est définie par*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

lorsque cette limite existe.

Voyons quelques exemples de ceci.

Exemple 7.6.1.

1. Soit $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ avec $\alpha > 0$ et $x > 0$. Dans ce cas, pour tout $a > 0$, nous avons

$$\int_a^1 f(x)dx = F(1) - F(a)$$

avec $F(x) = \frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}$. Il vient alors que $\lim_{a \to 0} \int_a^1 f(x)dx = \frac{1}{1-\alpha}$ si $0 < \alpha < 1$. L'intégrale diverge sinon.

2. Soit $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ avec $\alpha > 0$ et $x > 0$. Dans ce cas, pour tout $a > 0$, nous avons

$$\int_1^b f(x)dx = F(1) - F(b)$$

avec $F(x) = \frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}$. Il vient alors que $\lim_{b \to +\infty} \int_1^b f(x)dx = \frac{1}{1-\alpha}$ si $\alpha > 1$. L'intégrale diverge sinon.

Remarque. Les deux premiers résultats correspondent aux intégrales généralisées de Riemann. Comme pour les séries numériques (cf. exemples 3.4.1). Le paramètre α permet de savoir si l'intégrale converge ou non.

Il y aurait beaucoup à dire sur les intégrales généralisées. Notamment l'étude des intégrales absolument convergentes (intégrales dans lesquelles f est remplacée par $|f|$) mais nous choisissions de ne pas nous étendre. La motivation derrière cette décision repose sur les faits suivants : les arguments mis en oeuvre pour étudier la nature (convergence ou divergence) d'intégrales généralisées sont sensiblement les mêmes que pour les séries numériques (via des intégrales de

13. Néanmoins pratique puisque cela pouvait facilement d'obtenir de l'uniforme continuité via le théorème de Heine.

références, via des méthodes de comparaison, via des méthodes astucieuses d'intégration par parties). Tout ceci est important mais redondant, nous laissons le lecteur s'entrainer en cherchant à résoudre les exercices proposés en fin de chapitre.

Le point essentiel est que l'intégrale de Riemann n'est pas construite pour traiter directement les intervalles non bornés (de la forme $[1; +\infty[$ par exemple). Les intégrales généralisées permettent d'étendre légèrement le cadre d'application de l'intégrale de Riemann mais il s'agit plutôt d'un rafistolage. L'intégrale de Lebesgue que nous présenterons ultérieurement n'implique pas de telles considérations et la théorie permet de traiter ces cas de figures directement.

7.6.2 Intégrale de Riemann-Stieljes

En prenant du recul sur la construction que nous avons proposé de l'intégrale, nous constatons que nous avons utilisé le fait suivant : étant donné un subdivision $\mathbf{s} = \{x_0, \ldots, x_n\}$ d'un intervalle $[a, b]$, nous avions

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad \text{pour tout} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Ceci induit, implicitement, que la mesure la longueur de l'intervalle $[a, b]$ vaut $b - a$. Un moment de réflection, suggère que ce choix n'est pas canonique. Par exemple, dans le cadre des probabilités, la mesure d'un intervalle dépend de la loi sous-jacente : si X est une variable aléatoire exponentielle [14] de paramètre $\lambda > 0$ alors

$$\mathbb{P}(X \in [a, b]) = 1 - e^{-\lambda b} - \left(1 - e^{\lambda a}\right) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b} \quad \text{à condition que} \quad 0 < a < b.$$

Ceci pousse à introduire la définition suivante.

Définition 7.6.2. *Soit α une fonction croissante sur $[a, b]$. A toute subdivision $\mathbf{s} = \{x_0, \ldots, x_n\}$, nous associons les nombres*

$$\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}) \quad \textit{pour tout} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Remarque. La monotonie de la fonction α sur $[a, b]$ implique que cette fonction est bornée sur $[a, b]$. En outre, $\Delta\alpha_i \geq 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Cette nouvelle définition permet d'étendre ce que nous avions exposé dans ce chapitre. Auparavant, rappelons qu'étant donné une subdivision $\mathbf{s} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$, nous avons : pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad \text{et} \quad M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

Nous pouvons à présent modifier les définitions 7.1.2 et 7.1.3 en conséquent.

Définition 7.6.3. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Etant donnée une subdivision $\mathbf{s}$ de $[a, b]$ ainsi qu'une fonction croissante α, nous posons*

$$I(f, \alpha, \mathbf{s}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta\alpha_i \quad \textit{et} \quad S(f, \alpha, \mathbf{s}) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta\alpha_i$$

14. i.e. sa densité de probabilité par rapport à la mesure de Lebesgue vaut : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ si $x \geq 0$, $f(x) = 0$ sinon.

De manière similaire, nous avons

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf_{\mathbf{s}} S(f, \alpha, \mathbf{s}) \quad et \quad \underline{\int_a^b} f(x)dx = \inf_{\mathbf{s}} I(f, \alpha, \mathbf{s})$$

où les infimum et supremum sont pris sur toutes les subdivisions $\mathbf{s}$ *de* $[a, b]$. *Lorsque ces deux quantités coïncident, nous dirons que* f *est intégrable au sens de Riemann-Stieljes et la valeur commune sera notée*

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) \quad ou \quad \int_a^b f d\alpha.$$

L'ensemble des fonctions intégrables au sens de Riemann-Stieljes sera noté $\mathcal{R}(\alpha)$.

Remarque. Il semble naturel de s'interroger : est-il possible de considérer une classe de fonctions α plus générale que celle décrite dans la définition ? Une réponse partielle sera donnée dans un chapitre ultérieur, pour cela il sera nécessaire d'introduire la notion de p-variation d'une fonction afin de construire l'intégrale de Young qui généralise celle de Riemann-Stieljes.

La plupart des résultats que nous avons présenté dans ce chapitre peuvent être repris mots pour mots (hormis des modifications mineures). Par exemple :

- dans le théorème , il faut supposer de plus que α est continue sur $[a, b]$. Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, cet ajout permet de trouver une subdivision $\mathbf{s}$ telle que

$$\Delta\alpha_i = \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n} \quad \text{pour tout} \quad i = 1, \dots, n.$$

- une fonction bornée, n'ayant qu'un nombre fini de discontinuité sur $[a, b]$ est intégrable au sens de Riemann-Stieljes à condition que α soit continue en tout point de discontinuité de f (cf. [?]).

Nous avons aussi de nouvelles propriétés :

Proposition 70. *Soient* α_1 *et* α_2 *sont deux fonctions croissantes sur* $[a, b]$, *si* $f \in \mathcal{R}(\alpha_1) \cap \mathcal{R}(\alpha_2)$ *alors* $f \in \mathcal{R}(\alpha_1 + \alpha_2)$ *et*

$$\int_a^b f d(\alpha_1 + \alpha_2) = \int_a^b f d\alpha_1 + \int_a^b f d\alpha_2.$$

Le véritable intérêt de cette extension provient des résultats suivants.

Définition 7.6.4. *La fonction de Heaviside est définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$H(x) = 0 \quad si \quad x \geq 0 \quad ; \quad H(x) = 1 \quad si \quad x > 0.$$

Ceci permet d'obtenir le résultat suivant.

Théorème 71. *Soit* f *une fonction bornée sur* $[a, b]$. *Nous supposons qu'il existe* $t \in]a, b[$ *tel que* f *soit continue en ce point et posons* $\alpha(x) = H(x - t)$ *alors*

$$\int_a^b f d\alpha = f(t).$$

Démonstration. Considérons la subdivision $\mathbf{s} = \{a, t\,, x_2,\, b\}$ avec $t < x_2 < b$. Dans ce cas, nous avons

$$S(f, \alpha, \mathbf{s}) = M_1\big(\alpha(t) - \alpha(a)\big) + M_2\big(\alpha(x_2) - \alpha(t)\big) + M_3\big(\alpha(b) - \alpha(x_2)\big) = M_2$$

puisque, par définition de H, $\alpha(x) = 0$ si $x \leq t$ et $\alpha(x) = 1$ si $x > t$. De même, nous trouvons que

$$I(f, \alpha, \mathbf{s}) = m_2.$$

Enfin, la fonction f étant continue en t, il est possible de trouver x_2 suffisamment proche de t de sorte que la différence $M_2 - m_2$ soit arbitrairement petite, M_2 et m_2 tendant alors vers $f(t)$. $\square$

Ce théorème est essentiel car il permet de faire le lien entre la théorie de l'intégration et celle des séries numériques.

Théorème 72. *Soit $\sum_n c_n$ une série (à termes positifs) convergente et (t_n) une suite de points distincts de $]a, b[$. Posons*

$$\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n H(x - t_n) \tag{7.6.1}$$

alors pour toute fonction f continue sur $[a, b]$, nous avons

$$\int_a^b f d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f(t_n).$$

Démonstration. Le critère de comparaison des séries numériques à termes positifs nous montre que (7.6.1) défini bien une série convergente. Ceci assurant que α est bien définie. De plus, il est élémentaire de vérifier que α est croissante, $\alpha(a) = 0$ et $\alpha(b) = \sum_n c_n$.

Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{n=N+1}^{\infty} c_n < \varepsilon$. Posons alors

$$\alpha_1(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n H(x - t_n) \quad \text{et} \quad \alpha_2(x) = \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n H(x - t_n)$$

et notons en passant que $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. Dans ce cas, le théorème 71 et la proposition 70, nous avons

$$\int_a^b f d\alpha_1 = \sum_{n=1}^{N} c_n f(t_n).$$

De plus, puisque $\alpha_2(b) - \alpha_2(a) < \varepsilon$, nous avons

$$\left| \int_a^b f d\alpha_2 \right| \leq M\big(\alpha_2(b) - \alpha_2(a)\big) < M\varepsilon,$$

où $M = \sup_{t \in [a,b]} |f(t)|$. Tout ceci, nous assure que

$$\left| \int_a^b f d\alpha - \sum_{n=1}^{N} c_n f(t_n) \right| = \left| \int_a^b f d\alpha_2 \right| \leq M\varepsilon.$$

Il suffit ensuite de faire tendre N vers l'infini pour conclure. $\square$

De plus, lorsque α est suffisamment régulière, l'intégrale de Riemann-Stieljes se ramène à une intégrale de Riemann classique à laquelle nous ajoutons un poids.

Théorème 73. *Soit α une fonction croissante, dérivable sur $[a, b]$ telle que $\alpha' \in \mathcal{R}$. Les assertions suivantes sont alors équivalentes :*

1. $f \in \mathcal{R}(\alpha)$,
2. $f\alpha' \in \mathcal{R}$.

De plus, nous avons

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f\alpha' dx.$$

Remarque. La preuve sera donnée en exercice.

Voyons un exemple de ceci.

Exemple 7.6.2. Soit $\alpha(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ pour $x \geq 0$ avec $\lambda > 0$. Considérons f une fonction bornée sur $[a, b]$ alors, pour tout $0 < a < b$, nous avons

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f(x)\lambda e^{-\lambda x} dx$$

et nous reconnaissons $\mathbb{P}\big(f(X) \in [a, b]\big)$ avec X une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

En conclusion, nous venons de voir qu'il existait deux manières d'étendre le champ d'application de l'intégrale de Riemann : d'abord en considérant des intégrales généralisées (en modifiant le domaine d'intégration), puis en réunissant sous la même théorie intégrales et séries numériques via l'intégrale de Riemann-Stieljes.

Malgré ces aspects positifs, il subsiste tout de même des défauts dans cet intégrale. Lesquels sont intrinsèques et ne pourront disparaitre sans de nouvelles idées.

7.6.3 Défauts intrinsèques de l'intégrale de Riemann

L'approche de l'intégration au sens de Riemann repose trop sur la structure de la droite réelle. Nous partons en effet d'une subdivision quelconque de l'intervalle $[a, b]$ afin de considérer les sommes de Darboux associées à une fonction f. Cela paraît pertinent de rétorquer qu'**a priori, la subdivision n'a aucun lien avec la fonction étudiée**.

D'une manière imagée, Riemann s'apparente à un commerçant mal organisé : tout au long de la journée, il empile les uns au dessus des autres les billets donnés par ses clients. Il fait cela sans faire attention à leur valeurs et, à la fin de la journée, il les additionne [15] les uns après les autres : un billet de 5, un billet de 50, un billet de 20, un billet de 20, un billet de 5, un billet de 10... Nous imaginons facilement que ce décompte pourrait être rendu plus bien compliqué lorsque la valeur des billets n'est plus un nombre entier. La méthode de Lebesgue (que nous exposerons ultérieurement) consiste, à ranger dès le départ les billets de 5 ensembles, ceux de 10 également, etc. Son décompte est ensuite faciliter puisqu'il n'a plus qu'à opérer par paquets : combien de

15. Comme l'aire des rectangles de la subdivisions, pris les uns à la suite des autres en commençant au début de l'intervalle $[a, b]$.

billets de 5 ? combien de 10 ? etc, pour additionner le tout.

Ce défaut intrinsèque resurgit inévitablement lorsque nous devons étudier des échanges des limites et d'intégrales. La théorie de Riemann nous explique que nous devons obligatoirement avoir de la convergence uniforme (sur l'intervalle d'étude) pour que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f(x)dx.$$

Cependant la convergence uniforme est très contraignante : par exemple la suite $f_n(x) = x^n$ définie, pour tout $n \geq 1$, sur $[0,1]$ ne converge pas uniformément (à cause de ce qui se produit en $x = 1$). Dès lors, il sera intéressant de pouvoir se restreindre à la convergence simple. Malheureusement, le fait d'être intégrable au sens de Riemann n'est pas stable par convergence simple.

Exemple 7.6.3. Puisque $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ est un ensemble dénombrable, il existe une suite (r_n) telle que $\mathbb{Q}\cap[0,1] = \{r_0, r_1, \ldots\}$. Pour tout $n \geq 1$, nous posons alors $Q_n = \{r_0, r_1, \ldots, r_n\}$ et définissons la suite (f_n) par

$$f_n(x) = 1 \quad \text{si} \quad x \in Q_n \quad ; \quad f_n(x) = 0 \quad \text{sinon.}$$

Notons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est bornée ne possède qu'un nombre fini de discontinuités (les points de Q_n) : il s'agit donc d'une fonction intégrable au sens de Riemann sur $[0,1]$. La suite (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers la f définie par

$$f(x) = 1 \quad \text{si} \quad x \in \mathbb{Q}\cap[0,1] \quad ; \quad f(x) = 0 \quad \text{sinon.}$$

Il se trouve que la fonction obtenue (appelée fonction de Dirichlet) n'est pas intégrable au sens de Riemann. En effet, pour toute subdivision $\mathbf{s}$ de $[0,1]$, nous avons pour tout $i = 1 \ldots, n$,

$$M_i = 1 \quad \text{et} \quad m_i = 0$$

puisque chaque intervalle de la subdivision $]x_{i-1}, x_i[$ contient, par densité, au moins un irrationnel et un rationnel. Il ne sera donc pas possible de rendre arbitrairement petit la différence entre les intégrales supérieures et inférieures.

Plus frustrant encore, il est possible de construire (cf. []) un ensemble $\hat{C}$ et une suite de fonctions (f_n) vérifiant le théorème suivant.

Théorème 74. *Il existe une suite de fonctions continues :* (f_n) *tel que*

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R} \quad \text{et} \quad 0 \leq f_{n+1}(x) \leq f_n(x) \leq 1 \quad \text{pour tout} \quad x \in [0,1].$$

En particulier, $f_n \in \mathcal{R}$ *pour tout* $n \geq 1$ *et* (f_n) *converge simplement vers une fonction* f *sur* $[0,1]$. *La fonction* f *obtenue est discontinue sur un ensemble non dénombrable*[16] *de mesure*[17] *non nulle : en particulier, cette fonction n'est pas intégrable au sens de Riemann.*

Remarque. Finalement nous savons que la limite $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx$ existe et est bien définie, que la fonction $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ existe également mais le procédé d'intégration n'est pas assez robuste pour traiter une fonction aussi irrégulière et

$$\int_0^1 f(x)dx \quad \text{n'existe pas.}$$

16. Il s'agit de l'ensemble de Cantor
17. Ce terme sera présenté rigoureusement dans le chapitre sur la théorie de la mesure

7.7 Exercices

Exercice 7.1. Soient α une fonction croissante sur $[a,b]$ et $x_0 \in [a,b]$ tel que α soit continue en ce point. Soit δ_{x_0} la fonction définie par

$$\delta_{x_0} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x = x_0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Justifier que $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ et que $\int f d\alpha = 0$.

Exercice 7.2. Soit f une fonction continue et positive sur $[a,b]$ telle que $\int_a^b f(x)dx = 0$ montrer que $f(x) = 0$ pour tout $x \in [a,b]$.

Exercice 7.3. Soit f une fonction bornée sur $[a,b]$ telle que $f^2 \in \mathcal{R}$, a-t-on $f \in \mathcal{R}$? La réponse est-elle différente s'il est supposé que $f^3 \in \mathcal{R}$?

Exercice 7.4. Soit α une fonction croissante sur $[a,b]$. Pour $f \in \mathcal{R}(\alpha)$, définissons

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f|^2 d\alpha\right)^{1/2}.$$

1. Soient $f, g, h \in \mathcal{R}(\alpha)$ démontrer que

$$\|f - h\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - h\|_2$$

   en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
2. Soient $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ et $\epsilon > 0$, démontrer qu'il existe une fonction continue g sur $[a,b]$ telle que

$$\|f - g\|_2 < \epsilon.$$

   Indication : Soit $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ une partition approprié de $[a,b]$ et considérer $g(t) = \frac{x_i - t}{\Delta x_i} f(x_{i-1}) + \frac{t - x_{i-1}}{\Delta x_i} f(x_i)$ si $x_{i-1} \leq t \leq x_i$.

Exercice 7.5. Soit $f(x) = \int_x^{x+1} \sin(t^2)dt$.

1. Démontrer que $|f(x)| < \frac{1}{x}$ si $x > 0$. *Indication : poser $t^2 = u$ et procéder à une intégration par partie afin de montrer que $f(x)$ peut s'écrire comme*

$$\frac{\cos(x^2)}{2x} - \frac{\cos[(x+1)^2]}{2(x+1)} - \int_{x^2}^{(x+1)^2} \frac{\cos u}{4u^{3/2}} du.$$

   Replacer $\cos(u)$ par -1.
2. Démontrer que $2xf(x) = \cos(x^2) - \cos[(x+1)^2] + r(x)$ où $|r(x)| < \frac{c}{x}$ avec c une constante.
3. Déterminer les limites supérieures et inférieures de $xf(x)$ lorsque $x \to \infty$.
4. Est-ce que $\int_0^\infty \sin(t^2)dt$ converge ?

Exercice 7.6. Traiter de manière similaire (à l'exercice précédent) la fonction $f(x) = \int_x^{x+1} \sin(e^t)dt$.

1. Montrer que $e^x|f(x)| < 2$ et que $e^x f(x) = \cos(e^x) - e^{-1}\cos(e^{x+1}) + r(x)$ où le reste vérifie $|r(x)| < Ce^{-x}$ pour une certaine constane C.

Exercice 7.7. Soit f une fonction à valeurs réelles de classe $C^1[a,b]$ telle que $f(a) = f(b) = 0$ et

$$\int_a^b f^2(x)dx = 1.$$

Démontrer que $\int_a^b xf(x)f'(x)dx = -\frac{1}{2}$ et que

$$\left(\int_a^b [f'(x)]^2 dx\right) \times \left(\int_a^b x^2 f^2(x)dx\right) > \frac{1}{4}.$$

Exercice 7.8. Soit f la fonction définie sur $[0,4]$ par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x = 0, \\ 1 & \text{si} \quad 0 < x < 1, \\ 3 & \text{si} \quad x = 1, \\ -2 & \text{si} \quad 1 < x \leq 2, \\ 4 & \text{si} \quad 2 < x \leq 4. \end{cases}$$

1. Calculer $\int_0^4 f(t)dt$.
2. Soit $x \in [0,4]$, calculer $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.
3. Montrer que F est une fonction continue sur $[0,4]$. La fonction F est-elle dérivable sur $[0,4]$?

Exercice 7.9. Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ (avec $a < b$).

1. On suppose que $f(x) > 0$ pour tout $x \in [a;b]$, et que $f(x_0) > 0$ en un point $x_0 \in [a;b]$. Montrer que $\int_a^b f(x)dx > 0$. En déduire que : « si f est une fonction continue positive sur $[a;b]$ telle que $\int_a^b f(x)dx = 0$ alors f est identiquement nulle ».
2. On suppose que $\int_a^b f(x)dx = 0$. Montrer qu'il existe $c \in [a;b]$ tel que $f(c) = 0$.
3. Application : on suppose que f est une fonction continue sur $[0;1]$ telle que $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe $d \in [0;1]$ tel que $f(d) = d$.

Exercice 7.10. Calculer les primitives suivantes en utilisant une intégration par parties.

1. $\int x^2 \ln x dx$.
2. $\int x \arctan x dx$.
3. $\int \ln x dx$.
4. $\int \cos x e^x dx$.

Exercice 7.11. Calculer les primitives suivantes, en précisant si nécessaire les intervalles de validité des calculs :

1. $\int \frac{x+2}{x^2-3x-4}dx$.
2. $\int \frac{x-1}{x^2+x+1}dx$.
3. $\int \sin^4 x \cos^3(x) x dx$.
4. $\int \frac{1}{\sin x}dx$.
5. $\int \frac{3-\sin x}{3\cos x+3\tan x}dx$.

Exercice 7.12. Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^x dx$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$. Expliciter $I - n$. En déduire $\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx$.
2. Montrer que $(I_n)_n$ est positive et décroissante. Montrer que $I_n \sim I_{n+1}$ lorsque $n \to +\infty$.
3. Simplifier $I_n \times I_{n+1}$. Montrer que $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ lorsque $n \to +\infty$. En déduire que $\frac{1\times 3\times \ldots \times (2n+1)}{2\times 4\times \ldots \times (2n)} \sim 2\sqrt{\frac{n}{\pi}}$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 7.13. On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est négligeable si, pour tout nombre réel $\epsilon > 0$, il existe une suite $({}_I n)_n$ d'intervalles $I_n =]a_n; b_n[$ telle que :

$$A \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} I_n \quad \text{et} \quad \sum_n (b_n - a_n) \leq \epsilon.$$

1. Montrer qu'une réunion dénombrable d'ensembles négligeables est un ensemble négligeable.
2. Montrer qu'une fonction bornée $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a; b]$ si et seulement si l'ensemble des points où f n'est pas continue est négligeable.

Exercice 7.14. Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tan \frac{k}{n}$.
2. $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^n \tan \frac{n}{n^2+k^2}$.
3. $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^n \ln \Bigg(\frac{n}{n+k})^{1/n}$.

7.8 Références historiques