Chapitre 8

Notions topologiques et compacité dans les espaces métriques

Lors du premier chapitre nous avions constaté que n'importe quel nombre réel pouvait être approché par une suite de nombre rationnels (cf. exercice 1.6). Ce procédé est notamment agréable lorsqu'il est appliqué à un nombre irrationnel puisque cela revient à affirmer qu'il est possible d'approcher un nombre peu évident à appréhender par une suite de nombres beaucoup plus simples (ici, des fractions).

Maintenant que nous venons d'achever une partie de notre étude portant sur la convergence de séries de fonctions et que nous avons constaté qu'il est possible de construire des fonctions continues très particulières (cf. exemple 6.4.2). Il semble alors naturel de chercher à imiter ce que nous avions obtenu dans $\mathbb{R}$: **est-il possible d'obtenir une famille de fonction suffisamment riches à partir de laquelle nous pourrons obtenir des suites de fonctions approchant (au sens de la convergence uniforme) n'importe quelle fonction continue ?**

Dans le premier chapitre nous avions également observé qu'un intervalle de la forme $[a, b]$ possédait une propriété particulière vis-à-vis des suites : dès lors que nous disposions d'une suite (u_n) appartenant à cet intervalle (i.e. $a \leq u_n \leq b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) nous pouvions construire une sous-suite (u_{n_k}) qui convergeait vers une limite $l \in [a, b]$. Il est alors tentant de chercher à voir ce qui se produit dans le cadre des suites de fonctions : **si (f_n) est une suite de fonctions bornées, est-il possible d'obtenir une sous-suite uniformément convergente ?**

Pour répondre à ces interrogations, il va être nécessaire de prendre du recul et d'introduire des idées mathématiques plus abstraites que ce que nous avons déjà rencontré. Cette abstraction est nécessaire pour mettre en évidence les propriétés clés qui vous nous permettre de comprendre, à partir du même point de vu, ce qui se produisait dans $\mathbb{R}$ et ce qui pourrait se produire dans $C^0\big([a, b], \mathbb{R}\big)$. C'est pourquoi nous allons faire un peu de topologie dans ce chapitre et aborder la notion d'ensembles fermés (fermés en abrégé), d'ensembles ouverts (ouverts en abrégé) et d'ensembles compacts (compacts en abrégé).

8.1 Introduction

Débutons par une courte introduction ayant pour objectif de motiver les notions abstraites que nous allons étudier dans ce chapitre. A cet effet, rappelons les faits suivants :

- Soit (u_n) une suite numérique convergente vers un nombre $l \in \mathbb{R}$. Nous savons que cela se quantifie comme suit : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, nous avons $|u_n - l| < \varepsilon$. Autrement dit, à partir du rang N,
$$u_n \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$$
la suite se trouve dans l'intervalle ouvert $]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$, centré en l et de rayon (quelconque) $\varepsilon > 0$.
- Soit $f : I \to \mathbb{R}$ avec $I \subset$ un intervalle ouvert. Si f est continue en $a \in I$, nous savons que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tou $x \in I$ vérifiant $|x - a| < \alpha$ alors $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Ceci peut se reformuler comme suit :
$$x \in]a - \alpha, a + \alpha[\Rightarrow f(x) \in]f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon[.$$
Autrement dit, $]a - \alpha, a + \alpha[\subset f^{-1}\big(]f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon[\big)$: l'image réciproque (par l'application f) de tout intervalle ouvert centré en $f(a)$ contient un intervalle ouvert centré en a.

Dans ces deux exemples, liés à des notions importantes introduites plus tôt dans cet ouvrage, nous observons la **présence d'intervalles ouverts** de la forme $]a, b[$ avec a et b deux réels distincts. Voyons ce qu'il est possible de dire à propos de ce genre d'ensembles.

8.2 Notions topologiques (partie 1)

Au lycée, l'élève a rencontré des intervalles ouverts (dont l'intérêt vis-à-vis de la continuité ou de la convergence a été mis en évidence dans la section précédente) de la forme $I =]a, b[$ avec $a < b$ des réels (éventuellement infinis). Nous proposons de généraliser ceci dans l'optique d'introduire des notions topologiques plus abstraites par la suite.

Définition 8.2.1. *Soit $O \subset \mathbb{R}$, nous dirons que O est un ouvert de $\mathbb{R}$ s'il est vide ou si pour tout $x \in O$, il existe un intervalle ouvert $]a, b[$ contenant x et contenu dans O.*

Remarque. Dit autrement, O est la réunion d'intervalles ouverts. Il est aisé de vérifier qu'un intervalle ouvert est bien un ouvert.

Cette définition a quelques conséquences, nous observons que :

- toute réunion (finie ou non) d'ouverts est encore un ouvert ;
- toute intersection finie d'ouverts est encore un ouvert ;
- $\mathbb{R}$ et $\emptyset$ sont des ouverts.

Remarque. En revanche, l'intersection quelconque d'intervalles ouverts n'est pas forcément un intervalle ouvert [1]. Par exemple, si $a_i = 0$ et $b_i = \frac{1}{n}$ pour tout $i \geq 1$ et $O_i =]a_i, b_i[$ alors

$$\cap_{i=1}^{n} O_i = \{0\}.$$

qui n'est pas un ouvert.

Via la définition 8.2.1, nous observons donc qu'elle induit une propriété de **stabilité des intervalles via les opérations ensemblistes de réunions et d'intersections (en nombre fini)**. Les mathématiciens sont friands de ce genre de stabilité, c'est pourquoi nous introduisons la définition suivante. Dans ce qui suit $\mathcal{P}(X)$ désigne l'ensemble des parties de X, c'est un ensemble qui contient tous les ensembles que nous pouvons former à partir d'éléments d'un ensemble X quelconque.

Définition 8.2.2. *Soit X un ensemble et $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$. Nous dirons que $\mathcal{O}$ est une topologie sur X si*

1. *$\emptyset \in \mathcal{O}$ et $X \in \mathcal{O}$.*
2. *L'union [2] d'ensembles de $\mathcal{O}$ est encore dans $\mathcal{O}$: soient $(O_i)_{i \in I}$ une famille de $\mathcal{O}$ alors*
$$\cup_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}.$$
3. *L'intersection d'un nombre **fini** d'élément de $\mathcal{O}$ est encore un élément de $\mathcal{O}$: soient $n \in \mathbb{N}_*$ et $(O_i)_{i=1,\ldots,n}$ une famille de $\mathcal{O}$ alors*
$$\cap_{i=1}^{n} O_i \in \mathcal{O}.$$

Les ensembles de $\mathcal{O}$ sont appelés ouverts [3] *de X ; le complémentaire (dans X) d'un ouvert est appelé* fermé [4] *de X. Un espace X muni d'une topologie $\mathcal{O}$ est appelé **espace topologique**.*

Voyons quelques exemples de topologies permettant de familiariser avec la définition 8.2.2.

Exemple 8.2.1.
1. Si $X = \mathbb{R}$ alors, comme nous avons pu le constater dans cette introduction [5], l'ensemble [6] la notion d'ouvert de $\mathbb{R}$ forme une topologie sur $\mathbb{R}$.
2. Soit X un ensemble alors $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$ est une topologie (dite triviale) sur X.
3. Si $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ est un ensemble fini alors $\mathcal{O} = \mathcal{P}(X)$ est une topologie sur X. Traitons le cas $n = 3$ pour décrire explicitement ce que contient $\mathcal{O}$: il est demandé au lecteur de vérifier que
$$\mathcal{O} = \Big\{\emptyset, \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\}, X\Big\}$$
est une topologie sur X. Dans cet exemple, les éléments de $\mathcal{O}$ sont à la fois ouverts et fermés [7]

1. Ceci expliquant donc la raison pour laquelle nous nous sommes limités à l'intersection d'un nombre fini d'ensemble.
2. L'union est supposée quelconque, nous ne sommes pas obligés de nous restreindre à une réunion dénombrable (indexée par $\mathbb{N}$ par exemple) d'ensembles.
3. Sous-entendu : ensembles ouverts
4. Sous-entendu : ensemble fermé
5. Pour être rigoureux, il faudrait vérifier que $\emptyset$ et $\mathbb{R}$ peuvent s'obtenir à partir de réunion d'intervalles ouverts ou par intersection d'un nombre fini d'intervalles ouverts, nous laissons le soin au lecteur de vérifier ceci.
6. Pour être précis, il s'agit de la topologie engendrée par les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, il s'agit de la plus petite topologie (au sens de l'inclusion) contenant les intervalles ouverts $]a, b[$.
7. Le lecteur est prié de vérifier cette affirmation.

Remarque. Certains ensembles ne sont ni ouverts ni fermés : c'est le cas de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ par exemple.

Lorsque nous parlerons d'ouverts ou de fermés, il sera important de mentionner dans quel espace nous nous situons (sauf si le contexte empêche toute ambiguïté). Voyons cela sur un exemple.

Exemple 8.2.2. Considérons $X = \mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle et $A \subset X$ un sous-ensemble non vide.

1. Si $A = [1, +\infty[$ alors l'ensemble $[1, 12[$ est un ouvert A mais ce n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$; $]2, +\infty[$ est un ouvert de A et de $\mathbb{R}$.
2. Si $A =]-10, 1[$ alors $]-10, 0]$ est un fermé de A mais ce n'est pas un fermé de $\mathbb{R}$; $[-5, 0]$ est un fermé de A et de $\mathbb{R}$.

Remarque. Ce qui précède repose sur la notion de **topologie induite** par un ensemble sur ses sous-ensembles : soit X un ensemble muni d'une topologie et $A \subset X$, nous dirons alors qu'un sous-ensemble $\Omega \subset A$ est un ouvert de A si et seulement si il existe un ouvert O de X tel que

$$\Omega = A \cap O.$$

Cette équivalence est aussi valable pour les fermés (en passant au complémentaire).

La notion d'ouverts permet de définir la notion de voisinage.

Définition 8.2.3. *Soient X un ensemble muni d'une topologie $\mathcal{O}$ et $a \in X$. Nous dirons que $V \subset X$ est un voisinage de a s'il existe un ouvert $O \in \mathcal{O}$ tel que*

$$a \in O \subset V.$$

Remarque. Même si la taille de O n'est pas imposée dans cette définition et que ce voisinage peut-être aussi « grand » que « petit »[8] **la notion de voisinage permet d'exprimer de façon abstraite une idée de « proximité »**.

Poursuivons à présent notre réflexion et focalisons nous sur les intervalles de $\mathbb{R}$[9]. Considérons, par exemple les intervalles $]2; 4[$ et $[2; 4]$. Nous avons l'intuition que 2 et 4 ont une place assez particulière puisqu'ils se trouvent au bord de l'intervalle ; par opposition, 3 se trouverait à « l'intérieur » de l'intervalle. Ces observations poussent à introduire la définition suivante.

Définition 8.2.4. *Soient X un espace topologique (la topologie associée sera notée $\mathcal{O}$) et $A \subset X$.*

1. *Un point $x \in X$ est intérieur à A si A est un voisinage de x ; l'ensemble des points intérieurs à A est noté $\overset{\circ}{A}$. Il désigne le plus grand ouvert contenu dans A :*

$$\overset{\circ}{A} = \bigcup_{\substack{O \subset A \\ O \in \mathcal{O}}} O$$

et $\overset{\circ}{A}$ est appelé intérieur de A.

2. *$\overline{A}$ désigne le plus petit fermé contenant A :*

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{A \subset F \\ F \in \mathcal{O}}} F.$$

$\overline{A}$ est appelé adhérence de A.

8. par exemple, dans $\mathbb{R}$, $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ est un voisinage de de 0 mais $\mathbb{R}$ lui même est aussi un voisinage de 0.
9. Nous aurions très bien pu nous placer dans le plan, cela n'aurait rien changer à notre propos.

Remarque. 1. Il est possible de définir l'extérieur de A : il s'agit de l'ensemble composé des points extérieurs à A, lesquels sont des éléments de X dont A^c (le complémentaire étant pris dans X) est un voisinage. La frontière de A (se trouvant entre l'intérieur et l'extérieur de A) est l'ensemble des points de X dont chaque voisinage contient au moins un point de A et de son complémentaire. **En définitive, la notion de voisinage permet de préciser où se trouve un point $x \in X$ par rapport à un ensemble $A \subset X$: x est soit à l'intérieur de A, à l'extérieur de A ou à sa frontière**.

2. Par définition, nous avons toujours $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$ et ces inclusions peuvent être strictes.
3. Il est possible de montrer (cf. []) que A est ouvert dans A si et seulement si $\mathring{A} = A$; A est fermé dans X si et seulement si $\overline{A} = A$.
4. Il n'est pas anodin que le mot adhérence soit le même que celui utilisé plus tôt dans ce cours pour des suites. Nous y reviendrons plus tard. Notons en passant que $\overline{A}$ peut se voir comme étant le complémentaire de l'extérieur de A : autrement dit, la réunion de $\mathring{A}$ et de sa frontière.

Illustrons ceci par un exemple élémentaire.

Exemple 8.2.3. Considérons $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle ainsi que $A = [2, 4[$ alors

$$\mathring{A} =]2, 4[\quad \text{et} \quad \overline{A} = [2, 4].$$

L'extérieur de A vaut $]-\infty, 2[\cup]4, +\infty[$ et sa frontière $\{2, 4\}$.

Remarque. D'autres exemples, plus élaborés, seront donnés en exercice pour que le lecteur puisse forger son intuition. Comme il peut s'en douter, certains cas de figures sont bien moins évidents que celui que nous venons de traiter. Par exemple, si nous considérons $\mathbb{Q}$ muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}$ [10] : que pouvons-nous dire de

$$\mathring{\mathbb{Q}} \quad \text{et} \quad \overline{\mathbb{Q}} \quad ?$$

Comme nous le verrons, c'est des propriétés topologiques qui permettent de distinguer les ensembles discrets $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Le lecteur doit s'interroger sur les raisons qui ont poussé les mathématiciens à considérer des objets aussi abstraits (topologie, intérieur, adhérence,...). Tentons d'y apporter quelques éclaircissements en revisitant la notion de continuité. Pour cela, il est impératif d'oublier un peu les structures, associées à des ensembles usuels, qui nous paraissent si naturelles.

Soient X et Y deux espaces topologiques, $f : X \to Y$ et $a \in X$ [11]. L'idée [12] que f est continue en a peut s'exprimer comme suit : dès lors que nous nous plaçons dans un ensemble W « proche » de $f(a)$, nous pouvons trouver un ensemble V « proche » de a tel que pour tout $x \in V$ alors

10. Ceci signifie que O' est un ouvert de $\mathbb{Q}$ si et seulement si $O' = O \cap W$ avec O un ouvert de $\mathbb{R}$; l'ensemble des ouverts O' désigne alors la topologie induite sur $\mathbb{Q}$ par celle de $\mathbb{R}$. Ceci implique la nécessité de préciser (sauf si le contexte empêche toute amiguïté) dans quel espace l'ensemble est considéré. Par exemple, $A = [-1, 1[$ est un fermé de de $X = [-10, 1[$ mais ce n'est pas un fermé de $\mathbb{R}$.

11. Pour être rigoureux, a doit être adhérent à X, nous reviendrons sur ce terme plus tard.

12. Laquelle est guidée par notre expérience obtenue en étudiant la continuité de fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ avec I un intervalle.

$f(x) \in W$; implicitement plus W est « proche » de $f(a)$ plus V le sera de a .

Il se trouve que nous avons l'habitude de considérer la notion de proximité lorsque celle-ci se trouve quantifiée via des distances [13]. Dans un espace topologique, la notion de proximité s'obtient via l'utilisation de voisinages. L'avantage de ceci est que la notion de voisinage paraît plus intrinsèque puisque ces derniers sont obtenus à partir de certains ensembles composant l'espace étudié lui-même sans avoir besoin d'introduire une nouvelle fonction (la distance) pour quantifier la proximité entre des objets. Ainsi, dans un espace topologique, la définition de la continuité en un point devient : **f est continue en a si et seulement si l'image réciproque de tout voisinage W de $f(a)$ est un voisinage V de a** [14].

Ce que nous venons de présenter pour la continuité fonctionne également avec la notion de convergence [15] de suites. En effet, considérons X un espace topologique et (u_n) une suite d'éléments de X. Nous dirons que u_n **converge vers $l \in X$ lorsque $n \to +\infty$ dès lors que pour tout voisinage W de l, il existe un rang N tel que pour tout $n \geq N$, nous avons $u_n \in W$.**

Finalement, ces deux exemples suggèrent que toute notion de convergence [16] s'obtient par le biais d'une topologie (laquelle définit alors ensembles ouverts et voisinages impliqués). [17]

Le recul que nous venons de prendre et l'abstraction que nous venons de faire ne sont pas seulement d'ordre esthétique : certaines notions de convergence ne peuvent pas être quantifiées à l'aide d'une distance, nous devrons alors nous restreindre (dans les espaces topologiques) à un aspect qualitatif (la suite converge ou non par exemple) sans pouvoir en dire plus ; nous reviendrons sur ce point dans un chapitre ultérieur.

Une autre raison derrière cette volonté de se placer dans un cadre plus général peut aussi s'expliquer de la manière suivante : en cherchant à épurer un problème ou une notion, le mathématicien se retrouve à faire face à l'essentiel, il n'y a plus de propriétés parasites (lesquelles il serait tenté d'utiliser pour parvenir à ses fins) pour obscurcir sa compréhension et permet de comprendre le sens profond de certaines idées. [18] Bien entendu, un choix aussi spartiate peut rendre ardu la compréhension de certain objets. Aussi, nous ferons le choix d'osciller entre l'abstrait et le concret pour aider le lecteur à se familiariser avec les notions que nous allons exposer.

D'ailleurs, que le lecteur se rassure, la suite de notre exposé va se limiter aux espaces métriques (moins généraux que les espaces topologiques) ce qui va faciliter notre étude sans pour autant nous

13. pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que ....
14. Ceci traduit bien le fait qu'en prenant un point proche de a, son image se trouve proche de $f(a)$
15. En y réfléchissant de nombreuses notions essentielles des mathématiques sont obtenues via un procédé de convergence : les limites, la continuité, la dérivation,...
16. convergence de nombre réels, convergence simple ou uniforme de fonctions sur un intervalle,...
17. Le lecteur pourra garder à l'esprit que plus une topologie est riche (composées d'un large nombre d'ensembles ouverts et fermés, plus il devient difficile pour une suite de converger ou une fonction f d'être continue. En effet, dans le cas de la continuité, l'image réciproque d'un ouvert par f doit encore être un ouvert. Ainsi, plus il y a d'ouvert dans l'espace mis en jeu plus il y a de contraintes à satisfaire. Au contraire, plus la topologie est pauvre (composée de peu d'ouverts ou de fermés) plus la convergence ou la continuité sera simple à établir. Cette remarque sera essentielle lorsque nous aborderons certains problèmes d'analyse en dimension infinie.
18. Comme le raconte Talagrand, c'est précisément le conseil que lui a donné son directeur de thèse Choquet : toujours considérer le cadre le plus général possible.

faire perdre en compréhension. Cependant, nous préciserons en remarque lorsqu'une notion est topologique plutôt que métrique et indiquerons des références pour le lecteur souhaitant se plonger dans ces espaces plus abstraits.

8.3 Approche métrique de la topologie

Dans ce qui va suivre nous allons considérer un espace X (non vide) muni d'une distance.

Définition 8.3.1. *Soit X un espace non vide muni d'une application $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$. Lorsque cette application vérifie alors les propriétés suivantes :*

1. *(séparation) Pour tout $x, y \in E$, $d(x, y) = 0 \iff x = y$.*
2. *(symétrie) Pour tout $x, y \in E$, $d(x, y) = d(y, x)$.*
3. *(inégalité triangulaire) Pour tout $x, y, z \in E$, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.*

nous dirons que d est une distance sur X et que (X, d) est un espace métrique.

> *Remarque.* Notons en passant que dans un espace métrique, **nous ne disposons pas de loi de composition interne ou externe** (contrairement à un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$). Ceci signifie alors que : si $x, y \in X$ alors il n'y a aucune raison pour que $x + y \in X$; de la même manière, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $x \in X$, il n'y a aucune raison raison que $\lambda x \in X$.
>
> Un espace métrique possède tout de même des propriétés agréables. Par exemple, si (x_n) est une suite convergente d'éléments de X alors sa limite est unique. Ce qui n'est pas forcément le cas dans un espace topologique quelconque. [19]

Voici quelques exemples que nous avons déjà rencontré plus tôt dans le livre.

Exemple 8.3.1.
1. $\mathbb{R}$ muni de la distance $d(x, y) = |x - y|$ est un espace métrique.
2. $\mathbb{R}_+^*$ muni de la distance $d(x, y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$ est un espace métrique.
3. Soient $k \in \mathbb{N}_*$ et $p \geq 1$ alors $\mathbb{R}^k$ muni de la distance $d_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^k (x_i - y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}$ où $x = (x_1, \ldots, x_k)$ et $y = (y_1, \ldots, y_k)$ est un espace métrique. [20]
4. $C^0\big([a, b], \mathbb{R}\big)$ muni de la distance $\|f - g\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$ est un espace métrique.
5. $\mathbb{Z}$ muni de la distance discrète définie par
$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
est un espace métrique.
6. Tout espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ muni de la distance $d(u, v) = \|u - v\|$ est un espace métrique.

19. Il faudrait supposer que l'espace topologique est séparé : pour tout points distincts $x, y \in X$, il existe des voisinage disjoints V_1 et V_2 tels que $x \in V_1$ et $x \in V_2$. Cette propriété est automatiquement vérifiée dans un espace métrique.
20. Le lecteur est invité à vérifier cette assertion et notamment à s'interroger sur la nécessité d'imposer $p \geq 1$.

Nous nous plaçons ainsi dans un cadre un peu moins général que celui des espaces topologiques. La raison à cela est que le cadre des espaces métriques englobe tout de même une large variété de situations et la présence d'une distance va faciliter notre étude. La présence d'une distance permet de définir une topologie à partir de la notion de boules ouvertes.

Définition 8.3.2. *Soient (X, d) un espace métrique, $a \in X$ et $r > 0$. Nous définissons alors*

1. *La boule ouverte $B(a, r)$ de centre a et de rayon r comme étant l'ensemble*
$$B(a, r) = \{x \in X \quad ; \quad d(a, x) < r\}.$$
2. *La boule fermée $\overline{B}(a, r)$ de centre a et de rayon r comme étant l'ensemble*
$$\overline{B}(a, r) = \{x \in X \quad ; \quad d(a, x) \leq r\}.$$

Remarque. Curieusement, comme nous allons le voir en exercice, ces boules ne sont pas toujours rondes.

Voyons quelques exemples.

Exemple 8.3.2.
1. Considérons $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ alors
$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R} \quad ; \quad |x - a| < r\} =]a - r; a + r[$$
2. Considérons $\mathbb{R}^2$ muni de la distance euclidienne $d_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ alors
$$B(a, r) = \left\{x \in X \quad ; \quad \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} < r\right\} = D(a, r)$$
le disque de centre a et de rayon r. Si d_2 avait était remplacé par d_1, le lecteur est prié de vérifier que dans ce cas les boules sont carrées.
3. Considérons $C^0([a, b], \mathbb{R})$ muni de la distance $\|f - g\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$ alors
$$B(f, r) = \left\{g : [a, b] \to \mathbb{R} \quad ; \quad \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| < r\right\}.$$
Graphiquement, cela signifie que l'écart entre les courbes C_f et C_g vaut au plus r lorsque x parcourt l'intervalle $[a, b]$.[21]

Voyons maintenant comment obtenir une topologie à partir de ceci.

Définition 8.3.3. *Soient (X, d) un espace métrique, $O \subset X$ et $F \subset X$. Nous dirons que*

1. *O est un ouvert de X s'il est vide ou si tout point de O est centre d'une boule ouverte incluse dans O.*
2. *F est un fermé de X si son complémentaire F^c est un ouvert de X.*

L'ensemble $\mathcal{O}$ composé des ouverts de X est une topologie[22] *sur X*

21. Ce n'est pas toujours une bonne idée de se ramener à cette représentation visuelle. Il semble parfois préférable d'imaginer ces fonctions comme étant des points du plan et de dessiner des boules comme si nous étions dans $\mathbb{R}^2$; cette modélisation est bien sûr erronée mais elle permet de ne pas accorder trop d'importance à la variable x et de se focaliser sur la fonction f elle même.
22. exercice

Remarque. 1. La présence d'une distance nous a permis de définir une topologie sur X. Il est alors naturel de se demander si des distances différentes peuvent donner lieu à des topologies différentes (i.e. les ensembles ouverts obtenus ne sont pas les mêmes en fonction de la distance choisie).

2. La présence d'ouverts permet de définir la notion de voisinage en reprenant la définition 8.2.3. Ainsi, étant donné $a \in X$ et $V \subset X$, V sera un voisinage de A s'il existe $r > 0$ tel que

$$B(a, r) \subset V.$$

Il est aisé de constater ensuite qu'étant donné deux points distincts $x, y \in X$, les ouverts $V_1 = B(x, \frac{L}{3})$ et $V_2 = B(y, \frac{L}{3})$ (où $L = d(x, y)$) sont disjoints. De plus,

$$x \in V_1 \quad \text{et} \quad y \in V_2,$$

l'espace est bien séparé.

Il semble important d'établir la proposition suivante pour s'assurer que la terminologie est cohérente. C'est aussi l'occasion d'apprendre à faire des démonstrations plus abstraites.

Proposition 75. *Soient (X, d) un espace métrique, $a \in X$ et $r > 0$. La boule ouverte $B(a, r)$ est un ensemble ouvert.*

Démonstration. Faire un rapide dessin, bien qu'il soit faux, comme si nous nous trouvions dans le plan permet de mieux visualiser ce qui se produit. L'objectif est de montrer qu'il est possible, en n'importe quel point $y \in B(a, r)$, de placer une boule ouverte $B(y, \eta)$ (avec un rayon $\eta > 0$ assez petit, lequel dépendra de r, a et y) telle que

$$B(y, \eta) \subset B(x, r).$$

Soit $y \in B(a, r)$, il existe alors $\eta > 0$ tel que

$$d(y, a) = r - \eta.$$

Montrons alors que $B(y, \eta) \subset B(a, r)$. Soit $z \in B(y, \eta)$, l'utilisation de l'inégalité triangulaire nous assure alors que

$$d(z, a) \leq d(z, y) + d(y, a) < \eta + d(y, a) = r.$$

Ainsi, $z \in B(a, r)$ ce qui est le résultat attendu. □

Dans la section suivante nous allons voir comment relier ces notions topologiques (ouverts et fermés) en utilisant des suites de points.

8.3.1 Adhérence dans un espace métrique

Nous allons voir ce qui advient de certaines notions que nous avons rencontré plus tôt (cf. chapitre 2 et la notion de valeur d'adhérence) dans le contexte des espaces métriques.

Définition 8.3.4. *Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$ non vide.*

1. *Un point $x \in X$ est un point d'accumulation de A si toute boule boule ouverte, centrée en x, contient un point $y \in A$ distinct de x. Autrement dit, pour tout $r > 0$,*

$$\big(B(x, r) \cap A\big) \setminus \{x\} \neq \emptyset$$

2. *Un point de A qui n'est pas un point d'accumulation est un point isolé. Autrement dit, il existe $r > 0$ tel que*
$$B(x, r) \cap A = \{x\}.$$

Remarque. La notion de point d'accumulation aurait pu s'énoncer dans un espace topologique à l'aide de voisinages : $x \in X$ est un point d'accumulation de A si pour tout voisinage ouvert O de x, nous avons
$$O \cap A \backslash \{x\} \neq \emptyset$$
En particulier, étant donné un point d'accumulation $x \in X$, ceci montre que tout voisinage O de x contient une infinité [23] de points de A. Il est à noter qu'un point d'accumulation n'est pas forcément un élément de A.

Voyons ce que donne ces définitions sur un exemple.

Exemple 8.3.3. Soit $X = \mathbb{R}$ muni de la distance usuelle.

1. Considérons l'ensemble $A =]0; 1]$. 0 est un point d'accumulation de A puisque pour tout $r > 0$, nous avons
$$B(0, r) \cap A =]0, r[$$
et cet ensemble contient des points de A distincts de 0 (le point $y = \frac{r}{2}$ par exemple).
2. Considérons à présent $B =]0, 1] \cup \{1.0001\} \cup \{5\}$. Cet ensemble possède deux points isolés $x = 5$ et $y = 1.0001$. Pour cela, il suffit d'observer que la boule $B(5, 1)$ ne contient que le point 5 et que la boule $B(1.0001, 10^{-5})$ ne contient que le point 1.0001.
3. Les points isolés de $[0, 1] \cup \mathbb{N}$ sont les entiers $n \geq 2$.

Remarque. En reprenant le premier exemple et en faisant varier la valeur de r, nous observons qu'il est possible de construire une suite d'éléments de A qui converge vers 0. En effet, puisque 0 est un point d'accumulation le choix du rayon $r = 1$ nous assure que l'ensemble $A \cap B(0, 1)$ contient des éléments distincts de 0, soit x_1 un tel élément. Recommençons avec, cette fois-ci, $r = \frac{1}{2}$, nous obtenons alors $x_2 \in A \cap B(0, \frac{1}{2})$ un élément de A distinct de 0. Une récurrence immédiate montre que nous obtenons ainsi, une suite (x_n) d'éléments de A tel que
$$d(0, x_n) \leq \frac{1}{2^n} \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ceci nous permet d'introduire une nouvelle définition qui nous permettra d'obtenir une caractérisation séquentielle (à partir de suites) très pratique d'un ensemble fermé dans un espace métrique.

Définition 8.3.5. *Soit A une partie d'un espace métrique (X, d). Un élément $x \in X$ est adhérent à A si toute boule ouverte de centre x contient au moins un point de A.*

Remarque.
1. D'après la terminologie de la définition 8.3.4, un point adhérent est soit un point d'accumulation de A soit un point isolé de A.
2. L'ensemble des points adhérents à A correspond à l'adhérence $\overline{A}$ de A.

23. Dans le cas contraire, nous aurions pu trouver un voisinage ne contenant qu'un nombre fini de points de A et constuire un voisnage O' ne contenant que x

3. Pour vérifier que ce que nous venons d'écrire est consistant avec la définition 2.4.3, il suffit de considérer une suite (x_n) de X et de poser $A = \{x_n \quad ; \quad n \in \mathbb{N}\}$. Un point x est alors une valeur d'adhérence de A si toute boule ouverte de centre x contient au moins un point de A. Il convient alors de reprendre l'argumentaire développé dans la remarque 8.3.1 en faisant varier le rayon de ces boules ouvertes pour obtenir une sous-suite (x_{n_k}) convergent vers x. En effet, puisque x est adhérent à A, la boule ouverte $B(x, 1)$ contient au moins un élément de a, choisissons l'un d'entre eux et notons le x_{n_1}. Recommençons : la boule ouverte $B(x, \frac{1}{2})$ contient au moins un élément de A choisissons l'un d'entre eux et notons le x_{n_2}. Par suite, après $k \geq 2$ itérations, nous obtenons x_{n_k} tel que

$$d(x, x_{n_k}) \leq \frac{1}{2^k}.$$

   Il suffit ensuite de faire tendre $k \to +\infty$ pour établir que

$$\lim_{k \to +\infty} x_{n_k} = x.$$

   Ce procédé sera utilisé à de nombreuses reprises par la suite.

4. Finalement les arguments précédents montrent que tout point adhérent à un ensemble A peut s'obtenir comme une limite d'une suite d'éléments de A

Exemple 8.3.4. En reprenant l'exemple 8.3.3, nous constatons que $\overline{A} = [0, 1]$.

Comme nous l'avions évoqué dans la définition 8.2.4, il est possible de montrer A est fermé si et seulement si $A = \overline{A}$. Autrement dit, un ensemble est fermé s'il contient ses points d'adhérence. Cette observation combinée avec la remarque 8.3.1 est précisément ce dont nous avons besoin pour obtenir une caractérisation séquentielle des ensembles fermés (dans un espace métrique).

Proposition 76 (caractérisation séquentielle des fermés d'un espace métrique)**.** *Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$. A est un fermé de X si et seulement si pour toute suite (x_n) d'élément de A convergeant vers $x \in X$ alors $x \in A$.*

Remarque. De manière imagée, cette proposition affirme que l'ensemble A est littéralement fermé : étant donnée une suite convergente de A, sa limite ne peut pas s'échapper dans un ensemble plus grand.

Démonstration. Il ne faut pas se laisser intimider par l'aspect abstrait de ces notions, les choses sont plutôt simples. Ce qui nous intéresse surtout c'est la réciproque de cette assertion. Supposons que pour toute suite (x_n) d'éléments de A telle que

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x$$

alors $x \in A$ et montrons que A est fermé. D'après la remarque 8.2, il nous suffit de montrer que $A = \overline{A}$. Cependant, d'après la définition 8.2.4, nous avons toujours $A \subset \overline{A}$. Il nous reste donc à établir l'autre inclusion. A cet effet, soit $x \in \overline{A}$. Par définition, il s'agit d'un point adhérent à A dans ce cas, le procédé décrit dans la remarque 8.3.1 permet d'obtenir une suite (x_n) d'éléments de A qui converge vers x. D'après notre hypothèse, ceci entraine alors que $x \in A$ ce qui est le résultat attendu : $\overline{A} \subset A$ et A est bien un ensemble fermé. $\square$

Tout ce qui précède laisse entrevoir une **utilisation intéressante de l'adhérence : pouvoir approcher des éléments d'un espace X à partir de suites obtenues à partir d'un ensemble $A \subset X$ tel que $\overline{A} = X$**. Cette observation fait d'ailleurs écho à ce que nous avions constaté, dans le chapitre 1, entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$. Procédons à un exemple similaire pour illustrer notre propos.

Exemple 8.3.5. Il est possible d'approcher n'importe quel nombre réel $x \in \mathbb{R}$ à partir d'une suite de nombre décimaux. En utilisant la terminologie développée dans ce chapitre, cela revient à dire que $\overline{\mathbb{D}} = \mathbb{R}$. Pour établir ceci, étant donné $x \in \mathbb{R}$, il suffit de construire une suite (x_n) de $\mathbb{D}$ telle que

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x.$$

Pour cela, il suffit de considérer la suite obtenue par les approximations décimales de x : posons

$$x_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nous en déduisons donc [24] que

$$x - \frac{1}{10^n} < x_n \leq x \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Par suite, grâce au théorème des gendarmes, nous en déduisons que

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x.$$

Ce qui achève notre démonstration.

Remarque. Puisque $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, nous en déduisons aussi que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. A titre de comparaison, bien que discret, $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$ [25]

Ceci mène à une notion que nous avions rapidement évoquée dans le chapitre 1.

Définition 8.3.6. *Soit A un sous-ensemble d'un espace métrique (X, d). Nous dirons que A est dense (dans X) lorsque*

$$\overline{A} = X.$$

Remarque. Pour établir $\overline{A} = X$, il suffit de montrer que tout élément $x \in X$ est limite d'une suite de A. De manière alternative [26], il suffit d'établir que toute boule ouverte, centrée en x, rencontre A : pour tout $r > 0$,

$$B(x, r) \cap A \neq \emptyset.$$

Nous savons donc (cf. 8.3.5) que $\mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$ et, comme annoncé au début de ce chapitre, nous allons chercher à déterminer des ensembles denses de l'espace de fonctions $C^0\big([a, b], \mathbb{R}\big)$. Ceci nous permettra alors d'approcher des fonctions complexes par d'autres, beaucoup

24. Puisque pour $y \in \mathbb{R}$, l'inégalité suivante est vérifée : $y - 1 < \lfloor y \rfloor \leq y$.
25. Pour démontrer ceci, il semble plus simple de montrer que son complémentairte $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$ est un ensemble ouvert. Il suffit alors d'établir, que pour tout $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$ il est possible de trouver un rayon $r > 0$ (assez petit) tel que $B(x, r) \subset x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$.
26. Le lecteur attentif constatera qu'il n'y a qu'un pas pour obtenir une définition valable dans un espace topologique : si X est un espace topologique et $A \subset X$, A est dense dans X si l'intersection de n'importe quel ouvert avec A est non vide.

plus simples.

En étudiant la notion d'adhérence, nous venons de faire un lien entre les ensembles fermés et les suites convergentes (dont les limites ne peuvent quitter l'ensemble considéré). Dans le chapitre 2 et 6 , nous avions aussi dressé un lien entre les suites convergentes et les suites de Cauchy (cf. proposition 10 et 42). Il semble alors naturel de voir ce qu'il advient de tout ceci dans le cadre des espaces métriques. C'est l'objet de la section suivante.

8.3.2 Complétude d'un espace métrique

A plusieurs reprises (dans $\mathbb{R}$ et dans $C^0[a,b]$), nous avons présenté la notion de suite de Cauchy. Cette notion s'exprime naturellement dans un espace métrique.

Définition 8.3.7. *Soit (X,d) un espace métrique et (x_n) une suite d'éléments de X. La suite (x_n) est dite de Cauchy pour la distance d si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, m \geq N$,*

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Remarque. Rappelons que toute suite de Cauchy est bornée et que toute suite convergente est de Cauchy (cf. chapitre 2). La définition de suite de Cauchy ne peut s'énoncer dans des espaces topologiques (puisque la définition ne peut être exprimée utilisant uniquement la notion d'ouverts). En revanche, la définition précédente peut tout de même se reformuler à l'aide d'ensembles. Pour cela, il convient d'introduire la définition de diamètre : si $A \subset X$, le diamètre de A (pour la distance d) est donné par

$$\delta(A) = \sup_{x,y \in A} d(x,y).$$

Ainsi, (x_n) est une suite de Cauchy si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} \delta(A_n) = 0$ où $A_n = \{x_i \quad ; \quad i \geq n\}$.

La notion de suite de Cauchy nous avait permis d'introduire la notion de complétude.[27]

Définition 8.3.8. *Un espace métrique (X,d) est complet si toutes les suites de Cauchy sont convergentes dans X.*

Nous avons déjà rencontré de nombreux exemples d'espaces métriques complets.

Exemple 8.3.6.
1. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est complet (cf. théorème 10).
2. $(\mathbb{D}, |\cdot|)$ n'est pas complet (cf. exemple 8.3.5). De même $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ n'est pas complet
3. $\big(C^0[a,b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\big)$ est complet (cf. théorème 42).

Remarque. En changeant la distance il est possible d'obtenir un espace qui n'est plus complet alors que les ouverts restent inchangés (i.e. le changement de distance ne modifie pas la topologie associée, celle-ci étant alors composée des mêmes ensembles) : la **complétude est une propriété métrique et non topologique**. Ceci sera traité plus en détails dans l'exemple 8.3.8 et un exercice.

Au vu de la section précédente (notamment la caractérisation séquentielle des fermés, cf. proposition 76), il est naturel de s'interroger quant aux éventuels liens entre la notion de complétude et la notion de fermé.

27. Un chapitre entier sera dédié à cet aspect des espaces métriques et nous verrons que cette seule propriété permet d'obtenir des résultats très utiles et généraux.

Proposition 77. *Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$ (avec $A \neq \emptyset$).*

1. *Si (A, d) est complet alors A est un fermé de X.*
2. *Si de plus (X, d) est complet alors la réciproque de l'affirmation précédente est vraie.*

Remarque. Pour la première assertion, nous ne supposons pas que (X, d) soit complet.

Démonstration. Traitons le premier point et supposons que A est complet pour la distance d pour montrer que A est un fermé de X. A cet effet, via la proposition 76, il suffit de considérer une suite convergente (x_n) d'éléments de A et montrer que sa limite x se trouve aussi dans A. Puisqu'elle converge, la suite (x_n) est donc une suite de Cauchy (de A). Comme A est complet, il existe $l \in A$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = l.$$

Par unicité de la limite $x = l \in A$ et donc A est un ensemble fermé.

Pour la seconde assertion, nous supposons que A est fermé et nous souhaitons montrer que (A, d) est complet. Soit (x_n) une suite de Cauchy de A. Comme $A \subset X$, il s'agit aussi d'une suite de Cauchy de X. Cet espace étant complet, la suite (x_n) converge vers une limite $l \in X$. Comme nous avons une suite convergente (x_n) d'un espace fermé A, sa limite se trouve dans A : $l \in A$. Nous avons donc établi que les suites de Cauchy de (A, d) convergent dans A, l'espace est bien complet. □

Voyons un exemple montrons ce qui peut se produire lorsque certaines hypothèses de la proposition précédente sont mises en défaut.

Exemple 8.3.7.
1. Soit $A =]0, 1]$ un sous-ensemble non fermé de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. La suite (x_n) définie par $x_n = \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$ est de Cauchy mais elle ne converge pas dans A.
2. Soit (y_n) la suite définie par $y_0 = 2$ et

$$y_{n+1} = \frac{y_n}{2} + \frac{1}{y_n} \quad \text{pour tout} \quad n \geq 0.$$

Par récurrence, nous pouvons montrer qu'il s'agit d'une suite d'éléments de $\mathbb{Q}$, nous savons que cette suite converge (cf. chapitre 2) vers $\sqrt{2}$. Il s'agit donc d'une suite de Cauchy de $\mathbb{Q}$ qui ne converge pas dans $\mathbb{Q}$.

Pour conclure cette section montrons un exemple qui met en évidence que la notion de complétude dépend de la métrique choisie.

Exemple 8.3.8. $\mathbb{R}$ muni de sa distance usuelle ($d(x, y) = |x - y|$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$) est un espace complet. L'ensemble $A = [1, +\infty[$ étant fermé dans $\mathbb{R}$, l'espace (A, d) est donc complet d'après la proposition 77. Considérons une deuxième métrique[28] d' sur A en posant

$$d'(x, y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| \quad \text{pour tout} \quad x, y \in A.$$

Introduisons ensuite la suite (x_n) définie par

$$x_n = \sqrt{n} \quad \text{pour tout} \quad n \geq 1.$$

28. Nous laissons le soin au lecteur de vérifier qu'il s'agit bien d'une distance.

Il s'agit d'une suite d'éléments de F. De plus, puisque pour tout $n \geq 1$ et tout $k \geq 0$ nous avons[29]

$$\begin{aligned} d'(x_n, x_{n+k}) = \frac{\sqrt{n+k} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+k}} &= \frac{k}{\sqrt{n}\sqrt{n+k}(\sqrt{n+k} + \sqrt{n})} \\ &\leq \frac{k}{\sqrt{n}\sqrt{k}^2} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0 \quad \text{lorsque} \quad n \to +\infty \end{aligned}$$

il s'agit d'une suite de Cauchy (pour la distance d') de A. Si (A, d') était complet, il existerait $l \in A$ tel que

$$\lim_{n \to +\infty} d'(x_n, l) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{l} \right| = 0$$

ce qui impossible. L'ensemble (A, d') n'est pas complet ; a fortiori, $(\mathbb{R}, d')$ ne l'est pas non plus.

Remarque. Il se trouve que les métriques d et d' engendrent pourtant la même topologie (i.e. les mêmes ensembles ouverts). Ceci indique donc qu'il y a tout de même une certaine similarité entre d et d', il alors naturellement de s'interroger à ce qui manque à ces deux distances pour que les suites de Cauchy associées à d coïncident avec celles associées à d'.[30]

Cette section clos une partie importante de ce chapitre. Il nous reste une dernière notion à étudier avant de pouvoir chercher à établir les parties denses de $C^0\big([a, b], \mathbb{R}\big)$ muni de la distance uniforme. Celle-ci va être présentée dans la section suivante.

8.4 Espaces compacts

Dans le chapitre 2, nous avions obtenu le théorème de Bolzano-Weierstrass 9 qui affirmait que de toute suite bornée, il était possible d'en extraire une sous-suite convergente. La démonstration de ce résultat mettait en évidence le rôle essentiel joué par l'ensemble $[a, b]$. Nous avions indiqué (cf. remarque 2.4.2) que ce genre d'ensemble était un ensemble compact. Pour espérer généraliser le théorème de Bolzano-Weierstrass 9, il est essentiel de chercher à mieux comprendre, d'un point de vu topologique, les propriétés satisfaites par l'intervalle $[a, b]$. Ceci mène à la définition suivante.

Définition 8.4.1. *Soit (X, d) un espace métrique et $K \subset X$.*

1. *Une famille d'ouverts $(O_i)_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de K si*

$$K \subset \cup_{i \in I} O_i.$$

2. *L'ensemble K est dit compact si de tout recouvrement ouvert de K, il est possible d'en extraire un sous recouvrement fini : il existe un nombre fini d'indices $i_1, i_2, \ldots, i_N$ tel que*

$$K \subset \cup_{j=1}^{N} O_{i_j}.$$

29. La deuxième égalité ci-dessous s'obtient en multipliant par le nombre conjugué.

30. Procédons à une courte disgression, quitte à s'éloigner un peu de notre sujet. Le fait que les distances d et d' engendrent la même topologie signifie que les applications $I_d : (A, d) \to (A, d')$ qui $x \mapsto x$ et $I_d : (A, d') \to (A, d)$ qui $x \mapsto x$ sont continues (on parle d'homéomorphisme). Pour que les suites de Cauchy de (A, d) soient les mêmes que celles de (A, d'), il aurait fallu que les applications sus-mentionnées soient **uniformément** continues (ce qui n'était pas le cas dans notre exemple). Nous renvoyons le lecteur à [?] pour plus de détails à ce sujet.

Remarque. Il est important de faire plusieurs remarques :

- Cette définition pourrait s'étendre sans heurts à des espaces topologiques puisqu'elle ne fait intervenir que des ensembles ouverts.
- Nous avions vu dans l'exemple 8.2.2 l'importance de préciser dans quel espace l'ensemble considéré était ouvert (ou fermé). Rappelons rapidement que si $A \subset Y \subset X$ alors A peut-être ouvert relativement à Y sans être un ouvert de X. Il devient donc primordial de préciser l'espace métrique dans lequel l'ensemble A est plongé afin de savoir s'il s'agit ou non d'un ouvert. Nous serions en droit de nous demander si cela est encore valable pour un ensemble compact. Comme nous allons le voir, il n'en est rien.

  Temporairement, lorsque la définition 8.4.1 est vérifiée nous dirons que K est compact relativement à X. Si $K \subset Y \subset X$, nous allons alors montrer que K est relativement compact à Y si et seulement si K est relativement compact à X.

  En effet, si K est relativement compact à X et si $(O_i)_{i\in I}$ désigne un recouvrement ouvert (relativement à Y) de K :

$$K \subset \cup_{i\in I} O_i$$

  alors il existe (cf. remarque 8.2) des ouverts $(\Omega_i)_{i\in I}$ de X tels que $O_i = \Omega_i \cap Y$. Puisque K est relativement compact à X et que $(\Omega_i)_{i\in I}$ est aussi un recouvrement ouvert (relativement à X) de K, il existe alors un nombre fini d'indice $i_1, i_2, \dots, i_N$ tels que

$$K \subset \cup_{j=1}^{N} \Omega_{i_j}. \tag{8.4.1}$$

  Par suite, puisque $K \subset Y$, nous avons

$$K \subset \cup_{j=1}^{N} O_{i_j} \tag{8.4.2}$$

  et donc K est compact relativement à Y. Réciproquement, supposons que K est compact relativement à Y et considérons $(\Omega_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert (relativement à X) de K. Posons ensuite, pour tout $i \in I$, $O_i = \Omega_i \cap Y$ (des ouverts de Y). Dans ce cas, il existe un nombre fini d'indices tels que (8.4.2) soit vérifiée et comme $O_i \subset \Omega_i$ pour tout $i \in I$, nous savons que (8.4.1) est satisfaite.

Avant de poursuivre notre étude des ensembles compacts, il semble important de donner des exemples.

Exemple 8.4.1. Tout ensemble fini est compact.

Nous avions affirmé que $[a, b]$ était un ensemble compact, nous allons maintenant établir formellement cette affirmation.

Proposition 78. *L'intervalle fermé et borné $[a, b]$ avec $a \leq b \in \mathbb{R}$ est un compact de $\mathbb{R}$.*

Remarque. Si l'intervalle n'est pas fermé, le résultat est mis en défaut : $\left(\left]\frac{1}{n}, 1\right[\right)_{n\geq 1}$ recouvre $]0, 1]$ mais aucune sous-famille ne fait de même. De manière similaire, le lecteur pourra montrer que le résultat est de nouveau mis en défaut si l'ensemble n'est pas borné.

Démonstration. Si $a = b$, l'intervalle est réduit à un point et il n'y a rien à faire. Sinon, $a < b$ et soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts recouvrant $[a; b]$. Considérons alors l'ensemble

$$A = \left\{ x \in [a, b] \quad ; \quad [a, x] \subset \cup_{j\in J} O_j \quad \text{avec} \quad J \subset I \quad \text{un ensemble fini} \right\}.$$

L'objectif est de montrer que $b \in A$. Puisque $a \in A$, nous avons $A \neq \emptyset$. De plus, A est majoré par b. Donc A admet une borne supérieure :

$$m = \sup A \quad \text{et} \quad m \in [a, b].$$

Par suite il existe $j_0 \in I$ tel que $m \in O_{j_0}$. Autrement dit, O_{j_0} est un voisinage de m, il existe donc $x_0 \in O_{j_0}$ tel que $x_0 < m$ et $[x_0; m] \subset O_{j_0}$. Pour un tel $x_0 \in A$, nous avons alors

$$[a; x_0] \subset \cup_{j\in J} O_j \quad \text{avec} \quad J \subset I \quad \text{un ensemble fini.}$$

D'où,

$$[a; m] = [a; x_0] \cup [x; m] \subset \sup_{j\in J_*} O_j \quad \text{où} \quad J_* = J \cup \{j_0\}.$$

Nous venons donc de montrer que $m \in A$. En outre, le recouvrement précédent $(O_j)_{j\in J_*}$ fonctionne aussi pour n'importe quel point $m' > m$ se trouvant dans $O_{j_0} \cap [a, b]$. Ceci n'est envisageable qu'à condition que $m = b$. Ce qui conclut la démonstration. □

Sans ajouter de difficultés nous allons voir qu'il est possible de directement travailler dans $\mathbb{R}^k$ avec des pavés afin d'obtenir un résultat plus général.

Définition 8.4.2. *Un pavé de $\mathbb{R}^k$ est un ensemble de la forme*

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_k, b_k]$$

avec $a_i \in \mathbb{R}$ et $b_i \in \mathbb{R}$ pour tout $i = 1, \ldots, k$.

Nous avons alors

Proposition 79. *Tout pavé de dimension k est un ensemble compact.*

Démonstration. Nous utiliserons la distance euclidienne d_2 dans $\mathbb{R}^k$: pour tout $x = (x_1, \ldots, x_k)$ et $y = (y_1, \ldots, y_k)$

$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (x_i - y_i)^2}.$$

Dans ce cas, si $K = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_k, b_k]$ est un pavé de $\mathbb{R}^k$ alors, pour tout $x, y \in K$ nous avons

$$d_2(x, y) \leq \alpha$$

où $\alpha = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (a_i - b_i)^2}$ (il s'agit du diamètre de K). Pour montrer que I est compact nous allons raisonner par l'absurde en supposons qu'il existe un recouvrement ouvert $(O_i)_{i\in I}$ de K pour lequel il est impossible d'extraire un sous-recouvrement fini de K : i.e., il n'existe pas de sous ensemble fini $J \subset I$ tel que

$$K \subset \cup_{j\in J} O_j.$$

Nous allons procéder à un argument de dichotomie pour aboutir à une contradiction. Pour tout $j = 1, \dots, k$, posons
$$c_j = \frac{a_j + b_j}{2}.$$
Nous avons donc $K = \Pi_{j=1}^k [a_j; b_j] = \Pi_{j=1}^k [a_j, c_j] \cup [c_j; b_j] = \left(\Pi_{j=1}^k [a_j, c_j]\right) \cup \left(\Pi_{j=1}^k [c_j; b_j]\right)$. Forcément, l'un de ces ensembles (que nous noterons I_1) ne peut être recouvert par un nombre fini d'ouverts issu de la famille $(O_i)_{i\in I}$. Recommençons notre procédé (en déterminant les milieux des segments) avec I_1, pour obtenir un ensemble plus petit I_2 qui ne peut être recouvert par un nombre fini d'ouverts issu de la famille $(O_i)_{i\in I}$ et ainsi de suite. Nous obtenons ainsi une suite d'ensembles de segments (I_n) telle que
$$K \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots \quad \text{pour tout} \quad n \geq 1$$
et I_n ne peut être recouvert par un nombre fini d'ouverts issu de la famille $(O_i)_{i\in I}$. De plus, pour tout $n \geq 1$ et tout $x, y \in I_n$, nous avons
$$d_2(x, y) \leq \frac{\alpha}{2^n}.$$
C'est pourquoi, d'après le théorème des segments emboités (cf. remarque 2.3.1), il existe z tel que $z \in I_n$ pour tout $n \geq 1$. En particulier, puisque $z \in K$, il existe $i_0 \in I$ tel que $z \in O_{i_0}$. Ainsi, O_{i_0} étant un ouvert, il existe $r > 0$ tel que
$$B(z, r) \subset O_{i_0}.$$
Or, si n est choisit suffisamment grand de sorte que $2^{-n}\alpha < r$ nous en déduisons que $I_{n_0} \subset O_{i_0}$ alors que I_{n_0} ne pouvait, par construction, être recouvert par un nombre fini d'ouverts. Ceci est absurde et termine la démonstration. □

8.4.1 Propriétés des espaces compacts

Il semble important de regarder les propriétés de vérifiées par des espaces compacts.

Aspects topologiques

Puisqu'un espace compact se définit dans un cadre topologique, il est naturel de chercher à comprendre quels sont les liens existants entre la notion de compacité et celle d'ensembles fermés.

Proposition 80. *Soit (X, d) un espace métrique. Si $K \subset X$ un ensemble compact alors K est un fermé de X.*

Démonstration. L'objectif est de montrer que K^c est un ouvert de X. Pour cela, il suffit de montrer que pour tout $x \in K^c$, il existe $r_x > 0$ tel que $B(x, r_x) \subset K^c$.

Si $K = \emptyset$, il n'y a rien à faire ; sinon considérons $x \in K^c$. Pour tout $y \in K$ considérons $r_y > 0$ tel que
$$r_y < \frac{d(x, y)}{2}$$

et posons $O_y = B(y, r_y)$. Par construction, ces ensembles permettent d'obtenir un recouvrement ouvert de K :

$$K \subset \cup_{y \in K} O_y.$$

Or, K étant compact, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ et $y_1, \ldots, y_N \in K$ tel que

$$K \subset \cup_{i=1}^{N} O_{y_i}.$$

Notons que $O = \cup_{i=1}^{N} O_{y_i}$ est un ouvert de X et considérons

$$B(x, r) = \cap_{i=1}^{N} B(x, r_i)$$

i.e. $r = \min_{i=1;\ldots,N} r_i > 0$. Par construction, $B(x, r) \cap O = \emptyset$, d'où $B(x, r) \subset K^c$ (puisque $K \subset O$), ce qu'il fallait démontrer. □

Remarque. La réciproque est fausse, il existe des ensembles fermés qui ne sont pas compacts. Par exemple, $F = [0; +\infty[$ est un ensemble fermé de $\mathbb{R}$ mais ce n'est pas un ensemble compact. Pour cela il suffit de constater que nous avons à disposition un recouvrement ouvert de F

$$F \subset \cup_{n \geq 0}]n - 1; n + 1[$$

pour lequel il n'est pas possible d'extraire un sous-recouvrement fini de F.

Il est cependant naturel de s'interroger : que manque-t-il à un ensemble fermé pour que celui-ci soit compact ?

Proposition 81. *Soient (X, d) un espace métrique et K un compact de X. Si $F \subset K$ un ensemble fermé de X alors F est compact.*

Remarque. D'une certaine manière, la compacité de K s'est transmise à F. Nous verrons plus tard la raison derrière ceci.

Démonstration. Soit $(O_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de F :

$$\text{i.e.} \quad F \subset \cup_{i \in I} O_i.$$

Notons en passant que F^c est un ouvert. Nous avons alors

$$K \subset \left(\cup_{i \in I} O_i \right) \cup F^c = \cup_{j \in J} O_j$$

où J est l'ensemble d'indices I auquel nous avons ajouté un indice correspondant à F^c. Par compacité de K, nous pouvons extraire un recouvrement fini d'ouverts :

$$K \subset \cup_{j=1}^{N} O_j.$$

En outre, puisque $F \subset K$ nous avons aussi (quitte à éventuellement enlever F^c du sous-recouvrement fini précédent),

$$F \subset \cup_{j=1}^{N} O_j$$

ce qui nous assure la compacité de F. □

En conséquence de la proposition précédente, nous voyons apparaitre une propriété de stabilité des ensembles compacts

Proposition 82. *Soit (X, d) un espace métrique et $(K_i)_{i \in I}$ une famille de compacts de X. Alors*

- *$\cap_{i \in I} K_i$ est compact.*
- *$\cup_{j \in J} K_j$, avec $J \subset I$ un ensemble fini, est compact.*

Remarque. La première assertion est une conséquence des propositions 80 et 81.

Démonstration. La démonstration est très simple : $\cap_{i \in I} K_i$ est un ensemble fermé (en tant qu'intersection d'ensembles fermés) inclut dans un ensemble compact (K_{i_0} pour n'importe quel indice $i_0 \in I$). La proposition 81 nous permet alors de conclure.

Pour le deuxième point, considérons $(O_i)_{i \in I}$ un recouvrement d'ouverts tels que

$$\cup_{j \in J} K_j \subset \cup_{i \in I} O_i.$$

Or, nous avons $K_{j_1} \subset \cup_{j \in J} K_j$ pour tout $j_1 \in J$. D'où,

$$K_{j_1} \subset \cup_{i \in I} O_i$$

et, par compacité, nous pouvons trouver un ensemble I_1 fini d'indices tel que $K_{j_1} \subset \cup_{i \in I_1} O_i$. Il suffit ensuite de recommencer $k = \mathrm{Card}(J)$ fois afin d'obtenir des ensembles finis $I_1, I_2, \ldots, I_k$ d'indices tels que

$$K_{j_l} \subset \cup_{i \in I_l} O_i$$

pour tout $l = 1, \ldots, k$. Posons alors $\widetilde{I} = I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_k$. Par construction, nous avons

$$\cup_{j \in J} K_j \subset \cup_{i \in \widetilde{I}} O_i$$

qui est un recouvrement fini d'ouverts. La réunion est donc compact. □

Remarque. Notons qu'une réunion quelconque de compact n'est pas forcément un compact. Cela provient du fait qu'une réunion quelconque de fermés n'est pas forcément un ensemble fermé.

Nous pouvons dès à présent généraliser à des espaces métriques le théorème des segments emboités (cf. remarque 2.3.1) grâce à la notion de compacité.

Théorème 83. *Soient (X, d) un espace métrique et $(K_i)_{i \in I}$ une famille de compacts telle que pour toute sous-famille finie $J \subset I$ d'indices, nous avons*

$$\cup_{j \in J} K_j \neq \emptyset.$$

Alors $\cup_{i \in I} K_i \neq \emptyset$.

Remarque. Notons que la propriété de compacité nous a permis de passer des sous-familles finies d'indices à l'ensemble I tout entier.

Démonstration. Soit K_1 un compact de $(K_i)_{i\in I}$. Par l'absurde, nous supposons que

$$K_1 \cap_{i\in I\backslash\{1\}} K_i = \emptyset.$$

Posons $J = I\backslash\{1\}$ et notons $O_j = K_j^c$ pour tout $j \in J$; observons qu'il s'agit d'ensembles ouverts (cf. proposition 80). Par hypothèse, nous avons alors

$$K_1 \subset \cup_{j\in J} O_j$$

et, par compacité, il est possible de trouver un nombre fini d'indices : $j_1, \ldots, j_n$ de J tels que

$$K_1 \subset \cup_{l=1}^{N} O_{j_l}.$$

Dans ce cas, nous avons forcément

$$K_1 \cap (K_{j_1} \cap \ldots \cap K_{j_N}) = \emptyset$$

ce qui est absurde. □

Remarque. Le lecteur aura constater que la démonstration reste valable dans un espace topologique séparé plutôt que dans un espace métrique.

Ceci fournit sans peine le corollaire suivant.

Corollaire 84 (Compacts emboités)**.** *Si $(K_n)_{n\geq 1}$ est une suite décroissante*[31] *de compacts non vides alors*

$$\cap_{n\geq 1} K_n \neq \emptyset.$$

Nous pouvons à présent voir de quelle manière se comporte les ensembles compacts vis-à-vis des applications continues.

Compacité et continuité

La continuité préserve la compacité, c'est le contenu de la proposition suivante.

Proposition 85. *Soit $f : X \to Y$ une application continue entre deux espaces métriques*[32]*. Si $K \subset X$ est un ensemble compact alors $f(K) = \{f(x) ; x \in K\}$ est aussi compact.*

Remarque. Cependant, contrairement aux ensembles fermés, l'image réciproque d'un compact par une application continue n'est pas forcément un compact[33]. En effet, $x \mapsto \sin(x)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et $[-1, 1]$ est un compact de $\mathbb{R}$ cependant

$$\sin^{-1}\big([-1, 1]\big) = \mathbb{R}$$

n'est pas compact.

Dans la démonstration qui va suivre, nous utiliserons les faits suivant :

$$f\big(f^{-1}(A)\big) \subset A \quad \text{pour tout} \quad A \subset Y \quad ; \quad B \subset X \Rightarrow B \subset f^{-1}\big(f(B)\big)$$

et nous laissons au lecteur le soin de les démontrer.

31. i.e. $K_{n+1} \subset K_n$ pour tout $n \geq 1$
32. Nous aurions pu supposer qu'il s'agit de deux espaces topologiques séparés, les notions métriques ne seront pas utilisées dans la démonstration.
33. Lorsque c'est toutefois le cas, l'application est dite « propre » nous reviendrons la dessus plus tard.

Démonstration. Soit $(O_i)_{i\in I}$ un recouvrement d'ouverts (de Y) tel que

$$f(K) \subset \cup_{i\in I} O_i.$$

Dans ce cas, nous avons aussi $K \subset \cup_{i\in I} f^{-1}(O_i)$ et, pour tout $i \in I$, $f^{-1}(O_i)$ sont des ouverts de X (puisque f est une application continue). Par compacité de K, il existe $N \in \mathbb{N}_*$ tel que

$$K \subset \cup_{j=1}^{N} f^{-1}(O_{i_j}).$$

D'où, $f(K) \subset \cup_{j=1}^{N} O_{i_j}$: i.e. $f(K)$ est un compact. □

Le résultat précédent à des conséquences intéressantes sur le comportement de la fonction mis en jeu.

Proposition 86. *Soient (X, d) un espace compact et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction continue alors f est bornée est atteint ses bornes.*

Remarque. Ce résultat sera particulièrement utile dans des problèmes d'optimisation.

Démonstration. D'après la proposition 85, $f(X)$ est un compact de $\mathbb{R}$. Alors, d'après la remarque 8.6.2, $f(X)$ est borné. Par suite,

$$m = \inf_{x\in X} f(x) \quad \text{et} \quad M = \sup_{x\in X} f(x)$$

existent. De plus, d'après la proposition 80, $f(X)$ est fermé. Il est alors possible de trouver $x_0 \in X$ et $x_1 \in X$ tels que

$$m = f(x_0) \quad \text{et} \quad M = f(x_1).$$

□

Nous avons vu dans un chapitre précédent la notion de continuité uniforme (cf. définition 7.2.2) d'une fonction ainsi qu'une version faible du théorème de Heine (cf théorème 56). Nous allons pouvoir exposer ces notions dans le cadre des espaces métriques.

Définition 8.4.3 (Continuité uniforme)**.** *Soient (X, d) et (Y, d') deux espaces métriques ainsi que $f : X \to Y$. Nous dirons que f est uniformément continue sur X si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que*

$$\textit{pour tout} \quad x, y \in X \quad \textit{tels que} \quad d(x, y) < \alpha \quad \textit{alors} \quad d'\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon.$$

Remarque. A nouveau, la continuité d'une fonction en un point est une propriété locale, au contraire, la continuité uniforme est une propriété globale. La notion de **continuité uniforme est une propriété métrique et non topologique**.

Nous renvoyons le lecteur vers l'exemple 7.2.1. Voici la version générale du théorème de Heine, lequel nous assure que la compacité entraine automatiquement transforme la continuité en une uniforme continuité.

Théorème 87 (Heine)**.** *Soient (X, d) et (Y, d') deux espaces métriques ainsi que $f : X \to Y$ une application continue. Si X est compact alors f est uniformément continue sur X.*

Remarque. Ce résultat sera très utile dans la section suivante et dans l'étude ponctuelle des séries de Fourier (cf. chapitre **??**).

Démonstration. Puisque f est continue en tout point de X, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $x \in X$, il existe $\alpha_x > 0$ tel que pour tout $y \in X$,

$$d(x,y) < \alpha_x \quad \text{implique} \quad d'\big(f(x), f(y)\big) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Considérons ensuite $O_x = \{y \in X\,;\, d(x,y) < \frac{\alpha_x}{2}\}$ [34]. Puisque $x \in O_x$, ces ensembles forment un recouvrement ouvert de X : i.e.

$$X \subset \cup_{x\in X} O_x.$$

Par compacité de X, il est possible d'en extraire un sous-recouvrement fini. Autrement dit, il existe $N \in \mathbb{N}_*$ tel que

$$X \subset \cup_{i=1}^{N} O_{x_i}. \tag{8.4.3}$$

Ce qui nous permet de définir $\alpha = \frac{1}{2}\min_{i=1,\dots,N} \alpha_{x_i} > 0$ [35]. Considérons à présent, $x, y \in X$ tel que $d(x,y) < \alpha$. D'après (8.4.3), il existe $m \in \{1,\dots,N\}$ tel que $x \in O_{x_m}$:

$$\text{i.e.} \quad d(x, x_m) \leq \frac{\alpha_{x_m}}{2}.$$

En outre,

$$d(y, x_m) \leq d(x,y) + d(x, x_m) < \alpha + \frac{\alpha_{x_m}}{2} \leq \alpha_{x_m}.$$

Par définition de α_{x_m}, ceci entraine alors que

$$d'\big(f(x), f(y)\big) \leq d'\big(f(x), f(x_m)\big) + d'\big(f(x_m), f(y)\big) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Nous avons maintenant suffisamment d'élément à disposition pour exhiber une partie dense de $C^0\big([a,b],\mathbb{R}\big)$.

8.5 Densité

Comme nous l'avions vu dans le chapitre 2, les nombres rationnels sont un ensemble particulier de $\mathbb{R}$: il est dense. Ceci signifie que n'importe quelle nombre réel pour être approché par une suite de nombre rationnels. Ce fait est commode car les nombres rationnels sont beaucoup plus simples à manipuler que les irrationnels.

Dans le chapitre 6 nous avons commencé à étudier en détail l'espace des fonctions continues muni de la topologie induite par la convergence uniforme. Certaines fonctions continues sont des êtres mathématiques particulièrement compliqués, il serait intéressant de produire un ensemble dense (comme $\mathbb{Q}$ l'est dans $\mathbb{R}$) permettant d'approcher uniformément (i.e. au sens de la convergence

34. Il s'agit de la boule ouverte de centre x et rayon $\frac{r_x}{2}$, en particulier, il s'agit d'un ouvert de X

35. Ici, la compacité nous a permis de passer d'une famille quelconque à un ensemble fini. Ceci est essentiel pour assurer que $\alpha > 0$.

uniforme) une fonction continue.

Dans cette section nous allons montrer qu'il est possible d'utiliser pour cela des suites de polynôme. Nous verrons dans un chapitre ultérieur quelles étaient les propriétés essentielles vérifiées par l'ensemble des polynômes afin d'être en mesure d'exhiber d'autres ensembles denses dans $C^0\big([a,b],\mathbb{R}\big)$.

Notre démonstration va reposer sur un **argument de convolution** : il s'agit d'un **procédé de régularisation, utilisant une intégrale**, permettant de transmettre certaines propriétés de régularité d'une fonction à une autre. Pour mettre en oeuvre cette idée, quelques préliminaires sont nécessaires. Pour tout $n \geq 1$, définissons Q_n par

$$Q_n(x) = a_n(1-x^2)^n \quad \text{pour tout} \quad x \in [0,1]$$

avec a_n un coefficient tel que $\int_{-1}^{1} Q_n(x)dx = 1$. Voyons quelles sont les propriétés satisfaites par la suite (Q_n).

Lemme 88. *Pour tout $n \geq 1$, $a_n < \sqrt{n}$.*

Démonstration. Par parité et monotonie, nous avons

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx = 2\int_0^1 (1-x^2)^n dx &\geq 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}}(1-x^2)^n dx \\ &\geq 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}}(1-nx^2)dx \\ &= \frac{4}{3\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

où la dernière minoration s'obtient en constatant [36] que $(1-x^2)^n \geq 1-nx^2$ sur $[0,1]$. Nous avons donc montré que

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx > \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Il suffit ensuite de multiplier par a_n l'inégalité précédente pour conclure. □

Voici la deuxième propriété dont nous aurons besoin pour établir le théorème de Weierstrass 90.

Lemme 89. *Pour tout $0 < \alpha < 1$, $(Q_n$ converge uniformément vers 0 sur $[-1,-\alpha] \cup [\alpha,1]$.*

Démonstration. Soit $\alpha \in]0;1[$ et $x \in [-1,-\alpha] \cup [\alpha,1]$. D'après le lemme 88, nous avons

$$Q_n(x) < \sqrt{n}(1-\alpha^2)^n. \tag{8.5.1}$$

D'où, par croissance comparées,

$$\|Q_n\|_\infty < \sqrt{n}(1-\alpha^2)^n \to 0 \quad \text{lorsque} \quad n \to +\infty.$$

□

36. via l'étude des variations de la fonctions $x \mapsto (1-x^2)^n - 1 + nx^2$ par exemple.

Nous pouvons à présent nous attaquer à la démonstration du théorème de Weierstrass.

Théorème 90 (Weierstrass)**.** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Il existe une suite $(P_n)_{n\geq 0}$ de polynômes telle que P_n converge uniformément vers f sur $[a,b]$:*

$$i.e. \quad \lim_{n\to+\infty} \|P_n - f\|_\infty = 0.$$

Démonstration. Sans perdre en généralité, il est possible de supposer que $[a,b] = [0,1]$ et que $f(0) = f(1) = 0$. Posons ensuite $f(x) = 0$ si $x \notin [0,1]$, ainsi définie f est uniformément continue[37] sur $\mathbb{R}$. Posons ensuite

$$P_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x+t)Q_n(t)dt \quad \text{pour tout} \quad x \in [0,1].$$

Il s'agit du produit de convolution[38] entre f et Q_n . Nous constatons d'ailleurs que

$$P_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x+t)Q_n(t)dt = \int_{-1}^{1} f(t)Q_n(t-x)dt.$$

La dernière intégrale montrant alors que P_n est bien un polynôme.

Soit $\varepsilon > 0$, f étant uniformément continue il existe $\alpha > 0$ tel que

$$|x-y| < \alpha \quad \text{implique} \quad |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De plus, f étant continue sur le compact $[0,1]$, la proposition 86 nous assure que

$$M = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| < +\infty.$$

Notons au passage que l'hypothèse de compacité s'avère essentielle pour établir les deux faits précédents.

Puisque $\int_{-1}^{1} Q_n(t)dt = 1$ nous avons,

$$\begin{aligned}
|P_n(x) - f(x)| &= \Big|\int_{-1}^{1} f(x+t)Q_n(t)dt - \int_{-1}^{1} f(x)Q_n(t)dt\Big| \\
&\leq \int_{-1}^{1} |f(x+t) - f(x)|Q_n(t)dt \\
&\leq \int_{-1}^{-\alpha} 2MQ_n(t)dt + \frac{\varepsilon}{2}\int_{-\alpha}^{\alpha} Q_n(t)dt + \int_{\alpha}^{1} 2MQ_n(t)dt \\
&\leq 4M(1-\alpha^2)^n + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

où, dans la dernière majoration nous avons utilisé (8.5.1) pour le permier et dernier terme ; le reste découle du choix de α, la définition de M et le fait que $\int_{-1}^{1} Q_n(t)dt = 1$. En définitive, nous avons montré que pour tout $x \in [0,1]$,

37. f est déjà uniformément continue sur $[0,1]$ d'après le théorème de Heine 87.
38. Cette notion sera étudiée en détail dans un chapitre ultérieur.

$$\|P_n - f\|_\infty \leq 4M(1-\alpha^2)^n + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Il suffit ensuite de choisir n suffisamment grand de sorte que $4M(1-\alpha^2)^n < \frac{\varepsilon}{2}$ pour conclure. □

Remarque. Le lecteur est invité à réfléchir au choix de la suite (Q_n) : quelles sont les propriétés essentielles que vérifient cette suite et qui ont permis de démontrer le théorème de Weierstrass ? Est-il possible de remplacer Q_n par une autre suite de fonction ? Est-ce que cela peut aboutir à un résultat de densité différent ? (i.e. avec autre chose que des polynômes).

8.6 Différentes formulation de la compacité

Il est temps de clarifier certains points exposés dans ce cours : dans le chapitre 2, la notion de compacité avait été brièvement introduite via la formulation suivante (laquelle est liée au théorème 9 de Bolzano-Weierstrass) :

Propriété 91 (Bolzano-Weierstrass)**.** Un ensemble K est compact si toute partie infinie $A \subset K$ admet un point d'accumulation dans K. En particulier, toute suite (u_n) de K admet une sous-suite convergente dans K.

La notion de compacité a ensuite été énoncé dans un cadre d'espace topologique via la définition 8.4.1 qui nous dit la chose suivante :

Propriété 92 (Borel-Lebesgue)**.** Un ensemble K est compact si de tout recouvrement ouvert de K, il est possible d'extraire un sous-recouvrement fini de K.

Il semble essentiel de comprendre comment relier ces deux points de vue et c'est cet objectif qui va occuper les sections suivantes.

8.6.1 Compacité et point d'accumulation : de Borel-Lebesgue vers Bolzano-Weiertrass

Dans cette section, la définition de compacité repose sur la propriété de Borel-Lebesgue 92 et nous allons montrer que la propriété de Bolzano-Weierstrass 91 est aussi vérifiée.

Théorème 93 (Bolzano-Weiertrass généralisé)**.** *Soit X un ensemble compact. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Tout partie $A \subset X$ infini admet un point d'accumulation dans X.*
2. *Tout partie $A \subset X$ ayant ses points isolés*[39] *est fini.*

Remarque. Notons que la deuxième assertion est la contraposée de la première.

Démonstration. D'après la remarque, il suffit d'établir la deuxième assertion. Soit $A \subset X$ un ensemble ayant tous ses points isolés. Tout élément $x \in X$ étant isolé, il existe V_x un voisinage ouvert contenant au plus 1 point (à savoir x, si $x \in A$). Par suite, nous avons donc

$$X \subset \cup_{x\in X} V_x.$$

39. i. e. A n'admet aucun point d'accumulation.

Par compacité, il existe $V_{x_1}, \dots, V_{x_N}$ tels que

$$X \subset \cup_{i=1}^{N} V_{x_i}.$$

Ainsi, A contient au plus N éléments (à savoir $x_1, \dots, x_N$ si ces derniers se trouvent dans A), il s'agit bien d'un ensemble fini. . □

Le résultat précédent permet de montrer que la définition de la compacité via la propriété de Borel-Lebesgue entraine la propriété de Bolzano-Weierstrass.

Corollaire 94. *Soit (X, d) un ensemble compact. Toute suite (u_n) de X admet une sous-suite convergente.*

Remarque. Ce corollaire du théorème 93 montre pourquoi nous avons choisi l'appellation « théorème de Bolzano-Weierstrass généralisé ». En particulier, en reprenant la démonstration du théorème de Bolzano-Weierstrass, nous pouvons facilement montrer qu'un espace métrique compact est aussi complet.

Démonstration. Soit (u_n) une suite de X. Si l'ensemble des valeurs prises par la suite est finie cela signifie que l'une d'entre elles est prise une infinité de fois. Autrement dit, il existe $n_0 \geq 1$ tel que

$$u_i = u_{n_0} \quad \text{pour une infinité d'indices} \quad i \geq 0$$

Ceci nous fournit alors une sous-suite qui converge vers u_{n_0} car constante.

Supposons à présent que $A = \{u_n \quad ; \quad n \geq 0\} \subset X$ soit infini. Le théorème 93 nous assure alors que A admet un point d'accumulation $a \in X$. Autrement dit, pour tout $\rho > 0$,

$$B(a, \rho) \cap A$$

contient une infinité de termes de la suite (u_n). Il suffit alors de faire varier ρ pour construire la sous-suite désirée. Pour $\rho = 1$, choisissons $u_{n_1} \in B(a, 1) \cap A \backslash \{a\}$. Pour $\rho = \frac{1}{2}$, choisissons $u_{n_1} \in B(a, \frac{1}{2}) \cap A \backslash \{a, u_{n_1}\}$. Après en répétant ce procédé, nous construisons donc une sous-suite (u_{n_k}) telle que

$$d(u_{n_k}, a) < \frac{1}{k}.$$

D'où, $\lim_{n \to +\infty} u_{n_k} = a$. □

8.6.2 Précompacité : de Bolzano-Weiertrass vers Borel-Lebesgue

.

Dans cette section, la définition de compacité repose sur la propriété de Bolzano-Weierstrass 91 et nous allons montrer que la propriété Borel-Lebesgue 92 est aussi vérifiée. Pour cela, il est nécessaire d'introduire la notion de précompacité.

Proposition 95 (Précompacité)**.** *Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$ un compact non vide. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_1, \dots, x_N \in A$ tel que*

$$A \subset \cup_{i=1}^{N} B(x_i, \varepsilon).$$

Remarque. Cette proposition expose un aspect métrique de la compacité : un compact est borné [40] ; Cela montre également qu'un ensemble compact est fini, à ε près. Lorsqu'un ensemble A (quelconque) vérifie la conclusion de la proposition, nous dirons que A est **précompact**. Contrairement à la notion de compacité, la notion de précompacité se transmet aux sous-ensembles de A. Notons également que la notion de précompacité n'indique pas qu'il est possible d'extraire un sous-recouvrement fini d'un sous-recouvrement quelconque de X, il montre juste que X pour être recouvert par un nombre fini de boules de même rayon et cela peu importe le rayon choisi.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ fixé et $x_1 \in A$ quelconque. Si $A \subset B(x_1, \varepsilon)$ la proposition est démontrée. Sinon, considérons $x_2 \in K \backslash B(x_1, \varepsilon)$. Si

$$A \subset B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon)$$

la démonstration s'achève. Sinon nous poursuivons notre procédé de construction, lequel nous permet d'obtenir (x_i) une suite d'éléments de A telle que

$$d(x_i, x_j) \geq \varepsilon \quad \text{pour tout} \quad i \neq j.$$

Nous devons montrer que le procédé s'arrête au bout de N étapes. Pour cela, d'après le théorème 93, il suffit de montrer que ces points sont isolés pour savoir qu'ils sont en nombre fini. Or, pour tout $i \geq 1$, nous avons

$$B(x_i, \frac{\varepsilon}{2}) \cap A = \{x_i\}$$

ce qui achève la démonstration. □

Un dernier résultat est nécessaire afin d'établir l'équivalence entre la propriété de Borel-Lebesgue et celle de Bolzano-Weierstrass.

Lemme 96 (Lebesgue)**.** *Soit (X, d) un espace métrique, $A \subset X$ un compact non vide et $(O_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de A :*

$$A \subset \cup_{i \in I} O_i.$$

Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $a \in A$, $B(a, \varepsilon) \subset O_{i_0}$ pour un certain $i_0 \in I$.

Démonstration. La démonstration se fait par l'absurde en supposant que : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_\varepsilon \in A$ tel que pour tout $i \in I$, $B(x_\varepsilon, \varepsilon) \not\subset O_i$. Autrement dit, si $\varepsilon = \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$, nous avons une suite (x_n) telle que

$$\text{pour tout} \quad i \in I, \quad B(x_n, \frac{1}{n}) \not\subset O_i.$$

Or, par compacité, il est possible de trouver une sous-suite (x_{n_k}) et $a \in A$ tels que

$$\lim_{k \to +\infty} x_{n_k} = a.$$

En outre, il existe $j \in I$ tel que $a \in O_j$; puisque O_j est un ouvert, il existe $\rho > 0$ tel que $B(a, \rho) \subset O_j$. Considérons à présent $\alpha_k = d(a, x_{n_k})$ et considérons $N > 0$ tel que pour tout $k \geq N$,

$$\alpha_l = d(a, x_{n_k}) < \rho.$$

40. Car inclus dans une réunion finie de boules dont le diamètre est connu.

Ceci est bien envisageable puisque $\lim_{k\to+\infty} d(a, x_{n_k}) = 0$. Si maintenant $y \in B(x_{n_k}, \rho - \alpha_k)$ nous avons, pour $k \geq N$,

$$d(a, y) \leq d(a, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, y) \leq \alpha_k + p - \alpha_k = \rho.$$

D'où, lorsque $k \geq N$, nous avons montré que

$$B(x_{n_k}, \rho - \alpha_k) \subset B(a, \rho) \subset O_j.$$

Enfin, puisque $\lim_{k\to+\infty} \alpha_k = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{n_k} = 0$, il possible de trouver $\widetilde{N}$ tel que pour tout $k \geq \widetilde{N}$ nous avons

$$\rho - \alpha_k - \frac{1}{n_k} > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \rho - \alpha_k > \frac{1}{n_k}.$$

En conclusion, si $k \geq \max(N, \widetilde{N})$, nous avons établi que

$$B(x_{n_k}, \frac{1}{n_k}) \subset O_j$$

ce qui est absurde. □

Nous pouvons enfin démontrer que la propriété de Bolzano-Weiertrass entraine celle de Borel-Lebesgue.

Théorème 97. *Soit (X, d) un espace métrique et $K \subset X$ un compact*[41] *non vide. Alors, de tout recouvrement ouvert de K, il est possible d'en extraire un sous-recouvrement fini.*

Démonstration. Soit $(O_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de K. D'après le lemme 96, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in K$, il existe $i_x \in I$ tel que

$$B(x, \varepsilon) \subset O_{i_x}.$$

De plus, d'après la proposition 95, il est possible de trouver $x_1, \ldots, x_N$ tel que

$$K \subset \cup_{i=1}^{N} B(x_i, \varepsilon).$$

D'où,

$$K \subset \cup_{i=1}^{N} O_{i_{x_k}}$$

ce qui correspond bien à la propriété de Borel Lebesgue. □

8.6.3 Bilan

Dressons un rapide bilan de ce que nous venons d'observer : dans un espace métrique, la compacité peut se définir de manière équivalente par les deux propriétés données ci-dessous :

(a) : Borel Lebesgue (aspect ensembliste) $\Longleftrightarrow$ (b) : Bolzano-Weiertrass (aspect séquentiel)

41. Défini par la propriété de Bolzano-Weierstrass.

Remarque. Dans le cadre, plus général, des espaces topologiques séparés l'équivalence précédente n'est plus vraie, seule l'implication $(a) \Longrightarrow (b)$ est satisfaite [42]. Ceci explique d'ailleurs pourquoi nous avons choisi de définir la compacité via la propriété de Borel-Lebesgue.

Nous avons aussi constaté les faits suivant :

$$\text{compact} \quad \Longrightarrow \quad \text{précompact} \quad \Longrightarrow \quad \text{borné}$$

et

$$\text{compact} \quad \Longrightarrow \quad \text{complet} \quad \Longrightarrow \quad \text{fermé.}$$

Il est alors naturel de se poser les questions suivantes :

- que manque-t-il à un espace métrique complet ou précompact pour être compact ?
- que manque-t-il à un espace métrique fermé et borné pour être compact ?

Remarque. Rappelons encore que la compacité est une propriété topologique et non métrique. Nous avons choisi de nous placer dans un cadre métrique par confort mais il aurait été possible de rester dans le cadre des espaces topologiques séparés. Dans un tel cadre, la notion complétude et de précompacité ou d'être borné ne font plus sens (puisqu'elles utilisent toutes la notion de distance).

Nous reviendrons sur ces notions dans un chapitre ultérieur. En particulier, nous expliqueront ce qui se produit, en fonction de la dimension, dans les espaces vectoriels normés.

8.7 Compacité dans l'espace des fonctions continues

Dans cette section nous allons chercher à généraliser le théorème de Bolzano-Weiertrass à $C^0\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ en démontrant le théorème d'Ascoli 101. Autrement dit, étant donnée une suite de fonctions (f_n), nous allons chercher à établir des conditions assurant qu'il existe une sous-suite (f_{n_k}) ainsi qu'une fonction f telles que f_{n_k} converge uniformément sur $[a,b]$ vers f. Comme nous allons le constater, la situation est moins simple que dans le cas d'une suite numérique ; la compacité de $[a,b]$ jouera un rôle essentiel.

8.7.1 Equicontinuité d'une famille de fonctions

Voici quelques notions qui seront nécessaires par la suite. Sauf mention du contraire, dans ce qui suit X désignera un espace métrique muni d'une distance d.

Définition 8.7.1. *Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs réelles définies sur un espace X.*

1. *Nous dirons que (f_n) est **simplement bornée** si la suite numérique $\big(f_n(x)\big)$ est bornée pour tout $x \in X$: il existe $\phi : X \to \mathbb{R}$ telle que*
$$|f_n(x)| \leq \phi(x) \quad \textit{pour tout} \quad x \in E \quad \textit{et} \quad n \in \mathbb{N}.$$
2. *Nous dirons que (f_n) est **uniformément bornée** s'il existe $M > 0$ telle que*
$$|f_n(x)| \leq M \quad \textit{pour tout} \quad x \in E \quad \textit{et} \quad n \in \mathbb{N}.$$

42. Ceci éclairci sûrement pourquoi la réciproque était plus difficile à établir.

Comme nous allons le voir ci-dessous, le fait qu'une suite de fonction soit simplement bornée permet, sous des hypothèses peu contraignantes, d'extraire une sous-suite qui converge simplement.

Proposition 98 (Extraction diagonale)**.** *Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un ensemble dénombrable $E \subset X$, il est toujours possible d'extraire une sous-suite qui converge simplement sur E.*

Remarque. Le résultat précédent, spécialisé au cas de suites de fonctions, peut se généraliser et se reformuler en : tout produit dénombrable de compacts est compact. En particulier, si $(X_i)_{i\geq 1}$ est une famille de compact alors $X = \Pi_{i\geq 1} X_i$ est compact. Ainsi, toute suite $x = (x^{(i)})_{i\geq 1}$ [43] de X admet une sous-suite convergente dans X.

Démonstration. La démonstration repose sur l'utilisation du théorème de Bolzano-Weierstrass 9 lequel permet d'extraire des sous-suites convergentes d'une suite bornée. Puisque E est un ensemble dénombrable, supposons que celui-ci s'écrive $E = \{x_1, x_2, \ldots\}$.

Par hypothèse, la suite $\big(f_n(x_1)\big)_{n\geq 1}$ est une suite bornée, il existe donc une sous-suite, notée $\big(f_{n_{1,k}}(x_1)\big)_{k\geq 1}$ qui converge lorsque $k \to +\infty$. Observons ensuite, en remplaçant x_1 par x_2 dans la sous-suite obtenue, que $\big(f_{n_{1,k}}(x_2)\big)_{k\geq 1}$ est une également une suite bornée. Le théorème 9 nous assure alors qu'il est possible d'extraire une autre sous-suite convergente ; celle-ci sera notée $\big(f_{n_{2,k}}(x_2)\big)_{k\geq 1}$. En répétant ce procédé, après m extractions successives, nous obtenons une sous-suite convergente $\big(f_{n_{m,k}}(x_m)\big)_{k\geq 1}$. Pour obtenir une sous-suite qui converge simplement sur E, il suffit alors de considérer la suite définie par :

$$f_{n_{1,1}}, \quad f_{n_{2,2}}, \quad f_{n_{3,3}}, \ldots$$

Visuellement, cela correspond à prendre la diagonale du tableau suivant :

	x_1	x_2	x_3	x_4	$\ldots$
$n=1$	$\mathbf{f_{n_{1,1}}}$	$f_{n_{1,2}}$	$f_{n_{1,3}}$	$f_{n_{1,4}}$	$\ldots$
$n=2$	$f_{n_{2,1}}$	$\mathbf{f_{n_{2,2}}}$	$f_{n_{2,3}}$	$f_{n_{2,4}}$	$\ldots$
$n=3$	$f_{n_{3,1}}$	$f_{n_{3,2}}$	$\mathbf{f_{n_{3,3}}}$	$f_{n_{3,4}}$	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

□

Comment procéder lorsque l'ensemble de définition de la suite de fonctions n'est pas dénombrable, comme nous allons le voir les choses sont moins simples. Ceci va s'observer sur l'exemple suivant. Dans cet exemple, nous utiliserons le théorème convergence dominée de Lebesgue (qui ne sera présenté que dans un chapitre ultérieur), celui-ci fournit un moyen très pratique [44] pour passer à la limite sous une intégrale. Nous demandons, temporairement, au lecteur d'accepter l'emploi de ce résultat.

43. i.e. pour tout $i \geq 1$, $x^{(i)} = (x_n^{(i)})_{n\geq 1}$ est une suite d'éléments de X_i.
44. En comparaison de l'aspect contraignant de la convergence uniforme, souvent mis en défaut sur quelques points.

Exemple 8.7.1. Soit (f_n) la suite définie sur $[0, 2\pi]$ par

$$f_n(x) = \sin(nx) \quad \text{pour tout} \quad n \geq 1.$$

Cette suite est uniformément bornée par 1 sur $[0, 2\pi]$. S'il existe une sous-suite (n_k) telle que la suite $\sin(n_k x)$ converge, lorsque $k \to +\infty$, pour tout $x \in [0, 2\pi]$ alors

$$\lim_{k \to +\infty} \sin(n_k x) - \sin(n_{k+1} x) = 0.$$

D'où,

$$\lim_{k \to +\infty} \big(\sin(n_k x) - \sin(n_{k+1} x)\big)^2 = 0.$$

En conséquence, grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue, nous en déduisons que

$$\lim_{k \to +\infty} \int_0^{2\pi} \big(\sin(n_k x) - \sin(n_{k+1} x)\big)^2 dx = \int_0^{2\pi} \lim_{k \to +\infty} \big(\sin(n_k x) - \sin(n_{k+1} x)\big)^2 dx = 0.$$

Or, un calcul élémentaire montre que

$$\int_0^{2\pi} \big(\sin(n_k x) - \sin(n_{k+1} x)\big)^2 dx = 2\pi$$

ce qui est absurde. Il n'est donc pas possible d'extraire une sous-suite convergente de (f_n) malgré qu'elle soit uniformément bornée.

Puisque la convergence uniforme est celle qui permet de conserver (en passant à la limite) les propriétés de régularités d'une fonction, il semble naturel de chercher à extraire des sous-suites qui converge uniformément (au lieu de simplement) sur l'ensemble d'étude. A nouveau, le fait que la suite soit uniformément bornée ne sera pas suffisant.

Exemple 8.7.2. Soit (f_n) la suite définie sur $[0, 1]$ par

$$f_n(x) = \frac{x^2}{x^2 + (1 - nx)^2} \quad \text{pour tout} \quad x \in [0, 1] \quad \text{et} \quad n \geq 1.$$

Cette suite est uniformément bornée puisque $|f_n(x)| \leq 1$ pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in [0, 1]$. De plus, f_n converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, 1]$. Cependant, cette converge ne peut-être uniforme car

$$f_n(\frac{1}{n}) = 1 \quad \text{pour tout} \quad n \geq 1.$$

Il n'est donc pas possible d'extraire de (f_n) une sous-suite qui convergera uniformément sur $[0, 1]$.

Les deux exemples qui précèdent montrent que la situation est plus délicate que pour les suites numériques[45]. Il faut donc que les suites de fonctions vérifient des hypothèses supplémentaires, c'est l'intérêt de la définition suivante.

Définition 8.7.2 (Equicontinuité). *Une famille $\mathcal{F}$ de fonctions f définies sur un espace métrique (X, d) et à valeurs réelles est dite équicontinue sur X si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $f \in \mathcal{F}$*

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \textit{pour tout} \quad x, y \in X \quad \textit{tels que} \quad d(x, y) < \alpha.$$

45. Pour lesquelles, être bornée suffisait pour obtenir une sous-suite convergente

Remarque. Cette nouvelle définition est à rapprocher de celle de l'uniforme continuité (cf. 8.4.3). Ici, une deuxième uniformité, vis-à-vis de la famille $\mathcal{F}$, est supposée. Dans les exemples précédents, l'ensemble composé des suites de fonctions étudiées dans les exemples précédents n'étaient pas équicontinue.

Voyons quelques exemples. D'autres seront traités en exercice.

Exemple 8.7.3. 1. Soit $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_N\}$ est une famille finie de fonctions définies sur un espace métrique et à valeurs dans $\mathbb{R}$. $\mathcal{F}$ est équicontinue car les fonctions sont uniformément continues sur (X, d).

2. L'ensemble des fonctions lipschitziennes $f : X \to \mathbb{R}$ (avec (X, d) un espace métrique) est équicontinue.

Dans ce qui suit, nous allons clarifier les liens existants entre la convergence uniforme d'une suite de fonctions et l'équicontinuité. Débutons par un premier résultat.

Proposition 99. *Soit (K, d) un espace métrique compact et (f_n) une suite de fonctions continues sur K à valeurs réelles. Si (f_n) converge uniformément sur K alors la famille $\mathcal{F} = \{f_n \quad ; \quad n \geq 1\}$ est équicontinue.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$, puisque la suite converge uniformément, elle satisfait le critère de Cauchy uniforme 42. Ainsi, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, nous avons

$$\|f_n - f_N\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}.$$

De plus, d'après le Théorème de Heine 87, la famille de fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_N$ est uniformément continue[46] : il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $i = 1, \ldots, N$,

$$|f_i(x) - f_i(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{pour tout} \quad x, y \in K \quad \text{tels que} \quad d(x, y) < \alpha. \tag{8.7.1}$$

Pour établir que la famille $\mathcal{F}$ est équicontinue, il suffit de montrer que (8.7.1) est aussi satisfaite pour $n > N$. Soit $n > N$ et $x, y \in K$ tels que $d(x, y) < \alpha$ alors

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq |f_n(x) - f_N(x) + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f_n(y)| < \varepsilon$$

où le terme central a été majoré via l'uniforme continuité, les deux autres grâce au critère de Cauchy uniforme. □

Comme nous allons le voir, **l'équicontinuité est précisément ce qui nous manquait pour obtenir une sous-suite qui converge uniformément**. En particulier, cette propriété supplémentaire **permet de passer d'une convergence faible (la convergence simple) à une convergence forte (la convergence uniforme)**.

8.7.2 Théorème d'Ascoli : compacité dans l'espace des fonctions continues

Il nous faut présenter un argument supplémentaire afin d'établir le théorème d'Ascoli 101.

46. Il est important de n'avoir qu'un nombre fini de fonctions afin de s'assurer qu'il est possible de trouver le même α pour toutes ces fonctions. Celui-ci s'obtient en posant $\alpha = \min_{i=1,\ldots,N} \alpha_i$ où α_i est associé à la fonction f_i.

Compacité et partie séparable

Pour mettre en oeuvre le principe d'extraction diagonale, nous avons besoin d'un ensemble dénombrable. Il se trouve que chaque ensemble compact K admet un sous-ensemble dénombrable E et dense (i.e. $\overline{E} = K$).

Proposition 100. *Soit* (K, d) *un espace métrique compact alors il existe un ensemble dénombrable* $E \subset K$ *tel que* $\overline{E} = K$.

Remarque. Lorsque un ensemble K (pas forcément compact) admet un sous ensemble vérifiant la conclusion de la proposition, cet ensemble est dit *séparable*. Par exemple $\mathbb{R}$ est séparable car $\mathbb{Q}$ est dense et dénombrable dans $\mathbb{R}$.

La preuve de la proposition repose sur l'utilisation de la propriété de Bolzano-Weierstrass 93 et argument que nous avons déjà présenté (cf. démonstration du corollaire 94). Ici, cela sera visible alors de l'utilisation de la propriété de précompacité.

Démonstration. Puisque (K, d) est compact, il est aussi précompact (cf. proposition 95). Ainsi pour tout $n \geq 1$ et $\delta = \frac{1}{n}$, il existe N_n points $x_{N_1}, \ldots, x_{N_n}$ tels que

$$K \subset \cup_{j=1}^{N_n} B(x_{N_j}, \frac{1}{n}).$$

Soient $\varepsilon > 0$ et $x \in K$ fixés. En utilisant la propriété de précompacité pour $n = 1$, nous choisissons $x_{j_1} \in \{x_1, \ldots, x_{N_1}\}$ tel que

$$d(x, x_{j_1}) \leq 1.$$

Répétons cette opération, cette fois-ci pour $n = 2$, nous obtenons alors $x_{j_2} \in \{x_1, \ldots, x_{N_2}\}$ tel que

$$d(x, x_{j_2}) \leq \frac{1}{2}.$$

Au bout de n étapes, nous obtenons $x_{j_n} \in \{x_1, \ldots, x_{N_n}\}$ tel que

$$d(x, x_{j_n}) < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

à condition que n soit assez grand. Nous avons donc construit une suite (x_{j_n}) d'éléments de K qui converge vers x et ceci pour n'importe quel $x \in K$. Dans ce cas $E = \{x_{j_n}\,;\, n \geq 1\}$, ce qui achève la démonstration. $\square$

Nous pouvons maintenant démontrer l'un des résultats les plus importants de ce chapitre.

Théorème 101 (Ascoli vectoriel)**.** *Soient* K *un espace métrique compact et* (f_n) *une suite de fonctions continues sur* K *à valeurs réelles. Si* (f_n) *est simplement bornée et équicontinue sur* K *alors*

1. (f_n) *est uniformément bornée sur* K
2. (f_n) *admet une sous-suite uniformément convergente sur* K.

Remarque. En termes de compacité, le théorème d'Ascoli (vectoriel) signifie que les parties (de $C^0(K,\mathbb{R})$ avec K compact) relativement compactes (i.e. d'adhérence compacte) pour la topologie de la convergence uniforme sont les parties simplement bornées et équicontinues. Autrement dit, si $\mathcal{F} \subset C^0(K,\mathbb{R})$ l'équivalence suivante est vérifiée

$$\overline{\mathcal{F}} \quad \text{est un compact de}\, C^0(K,\mathbb{R}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathcal{F} \quad \text{est équicontinue et simplement bornée.}$$

Il s'agit de l'analogue du théorème de Bolzano-Weierstrass **??** dans l'espace des fonctions continues $C^0(K,\mathbb{R})$. Mentionnons à nouveau le fait que l'equicontinuité a permis de passer d'une borne simple (dépendant de n) à une borne uniforme (indépendante de n) et d'obtenir une sous-suite uniformément convergente sur K.

Démonstration. Puisque la famille $\mathcal{F} = \{f_n \quad ; \quad n \geq 1\}$ est équicontinue, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon \quad \text{pour tout}\, n \geq 1 \quad \text{et tous} \quad x, y \in K \quad \text{lorsque} \quad d(x,y) < \alpha.$$

Ce nombre α permet, par compacité de K, de trouver un recouvrement fini : il existe $x_1, \ldots, x_m \in K$ tels que

$$K \subset \cup_{i=1}^m B(x_i, \alpha).$$

La suite $(f_n))$ étant simplement bornée sur K, il existe $M_1, \ldots, M_m$ des constantes positives telles que

$$|f_n(x_i)| < M_i \quad \text{pour tout} \quad i = 1, \ldots, m.$$

Posons alors $M = \max_{i=1,\ldots,m} M_i$, dans ce cas nous avons

$$|f_n(x)| \leq |f_n(x) - f_n(x_k)| + |f_n(x_k)| < \varepsilon + M \quad \text{pour tout} \quad x \in K \quad \text{et pour tout} \quad n \in \mathbb{N}$$

où $k \in \{1, \ldots, m\}$ est tel que $x \in B(x_k, \alpha)$. La suite (f_n) est bien uniformément bornée.

Soit $E \subset K$ un ensemble dénombrable et dense dans K (son existence provient de la proposition 100). A partir de la suite (f_n) et de l'extraction diagonale (cf. proposition 98), il est possible d'obtenir une sous-suite $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ qui converge simplement sur E. Quitte à ajouter les points $x_1, \ldots, x_m$ (associés au recouvrement fini de K) à E, la convergence simple de $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ sur E nous assure l'existence d'un entier N tel que pour tout $i, j \geq N$ et tout $l = 1, \ldots, m$ nous avons

$$|f_{n_i}(x_l) - f_{n_j}(x_l)| < \varepsilon. \tag{8.7.2}$$

Notons que l'existence d'un tel N repose sur le fait qu'il n'y a qu'un nombre fini de points mis en jeu (les points $x_1, \ldots, x_m$). Si $x \in K$ et si x_k est un point du recouvrement tel que $x \in B(x_k, \alpha)$ alors, par équicontinuité, nous avons

$$|f_{n_i}(x) - f_{n_i}(x_k)| < \varepsilon \quad \text{pour tout} \quad i \geq 1.$$

Tout ce qui précède va nous permettre de montrer que la suite (f_{n_i}) vérifie le critère de Cauchy uniforme (cf. proposition 42) ; cela nous assurera alors la convergence uniforme désirée et terminera notre démonstration. En effet, soit $x \in K$ et $i, j \geq N$ alors

$$|f_{n_i}(x) - f_{n_j}(x)| \leq |f_{n_i}(x) - f_{n_i}(x_k)| + |f_{n_i}(x_k) - f_{n_j}(x_k)| + |f_{n_j}(x_k) - f_{n_j}(x)| < 3\varepsilon$$

où le terme central a été majoré grâce à (8.7.2) et les deux autres via l'équicontinuité. □

8.8 Références historiques

8.9 Exercices

Exercice 8.1. Soit $K = \{0\} \cup_{n\geq 1} \{\frac{1}{n}\}$. Montrer que K est un ensemble compact à l'aide de la définition.

Exercice 8.2. Donner un exemple d'un recouvrement ouvert de $]0,1[$ qui n'admet aucun sous-recouvrement fini.

Exercice 8.3. Un espace métrique (X,d) est séparable s'il contient un ensemble dénombrable et dense. Montrer que $\mathbb{R}^k$ est séparable.

Exercice 8.4. Soit (X,d) un espace métrique dans lequel tout ensemble infini admet un point d'accumulation. Montrer que X est séparable.

Indication : soit $\delta > 0$ et $x_1 \in X$. Ayant choisi $x_2, \ldots, x_j \in X$ choisir x_{j+1} (si possible) tel que $d(x_i, x_{j+1}) \geq \delta$ pour tout $i = 1, \ldots, j$. Montrer que ce procédé s'arrête au bout d'un nombre fini d'étapes et que X peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon δ. Poser $\delta = \frac{1}{n}$ et considérer le centre d'une telle boule.

Exercice 8.5. Donner un exemple d'un ensemble bornée de $\mathbb{R}$ ayant exactement 3 points d'accumulation.

Exercice 8.6. Soit X un ensemble fini et posons, pour tout $x, y \in X$,

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que (X,d) est un espace métrique. Quels en sont les ouverts ? les fermés ? les compacts ? Quelles sont les suites de Cauchy pour d ? Que peut–on en conclure pour (X,d) ?

Exercice 8.7. Donner un exemple de recouvrement ouvert de l'intervalle $]0,1[$ dont on ne peut extraire aucun sous-recouvrement fini.

Exercice 8.8. Soit $\mathbb{Q}$ muni de la distance $d(r,s) = |r-s|$. Soit $E = \{r \in \mathbb{Q}\,;\, 2 < r^2 < 3\}$. Montrer que E est un sous-ensemble fermé et borné de $\mathbb{Q}$ mais qu'il n'est pas compact. S'agit-il d'un ouvert de $\mathbb{Q}$?

Exercice 8.9.
1. Montrer que, pour tout $x, y > 0$, $d(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$ définit une distance sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Pour cette distance, définir les boules de centre 1 et de rayon r.

3. Soit $x_n = \sqrt{n}$ avec $n \geq 1$. La suite est-elle de Cauchy pour cette distance ?

Exercice 8.10. Soit (X, d) un espace métrique. Démontrer que $E \subset X$ est dense dans X si et seulement si toute boule de X rencontre E.

Exercice 8.11. Soit (X, d) un espace métrique, $E \subset X$ une partie non vide et $u \notin E$.

1. (a) Donner un exemple ou $d(u, E) = 0$.
   (b) Lorsque E est fermée, prouver que $d(u, E) > 0$.
2. Si E est compacte, montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $d(u, E) = d(u, x_0)$.

Exercice 8.12. Soit (X, d) un espace métrique compact et $\mathcal{H}$ une famille d'applications continues $h : X \to \mathbb{R}$. Posons $Z(\mathcal{H}) = \{x \in X\,;\, \forall h \in \mathcal{H}\ h(x) = 0\}$.

1. Prouver que $Z(\mathcal{H})$ est compact.
2. Ici $X = [0, 2\pi]$. Déterminer $Z\mathcal{H}$ pour $\mathcal{H} = (h_n)$ où $h_n(x) = \sin nx$ pour tout $(x, n) \in X \times \mathbb{N}^*$.

Exercice 8.13. Soit E, F deux espace métriques et $f : E \to F$. Le graphe de f est $G(f) = \big\{(x, f(x)) \in E \times F\,;\, x \in E\big\}$.

1. Si f est continue, montrer que $G(f)$ est fermé dans $E \times F$.
2. Démontrer que si F est compact et $G(f)$ est fermé alors f est continue.

Exercice 8.14. Soit E un espace métrique compact et $f : E \to E$ telle que, pour tout $x, y \in E$,

$$x \neq y \quad \Longrightarrow \quad d(f(x), f(y)) < d(x, y).$$

1. (a) L'application f est uniformément continue ?
   (b) Prouver que si f admet un point fixe alors il est unique.
   (c) En utilisant l'application $\phi : E \to \mathbb{R}_+$ définie par $\phi(x) = d(f(x), x)$, démontrer que f admet un point fixe.
2. Ici $E = [0, \frac{\pi}{2}]$ et $f(x) = \sin(x)$.
   (a) Montrer que f vérifie la propriété donnée. Quel est sont point fixe ?
   (b) L'application f est-elle une contraction de E ?

Exercice 8.15. 1. Soit $k > 0$ et F l'ensemble des fonctions différentiables $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ telles que $|f'(t)| \leq k$ pour tout $t \in]a, b[$. Montrer que F est une famille équicontinue.

2. Si $L > 0$ et $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une suite d'applications L-lipschitziennes avec $\|f_n(0)\|_2 = \sqrt{2}$, alors montrer que l'on peut extraire une sous-suite convergente de (f_n).

Exercice 8.16. On considère la suite de fonctions $f_n(t) = \sin(\sqrt{t + 4(n\pi)^2})$ avec $t \in [0, \infty[$.

1. Montrer qu'il s'agit d'une suite de fonctions équicontinues convergent simplement vers $f \equiv 0$.

2. La suite (f_n) est elle relativement compacte dans $C_b^0([0,\infty[)$ muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$? Que dit le théorème d'Ascoli ?

Exercice 8.17. Soit $K : C^0([a,b]) \to C^0([a,b])$ donnée par

$$(Kf)(s) = \int_a^b k(s,t)f(t)dt \quad \text{avec} k \in C^0([a,b]\times[a,b])$$

et soit (f_n) une suite bornée de $C^0([a,b])$ muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$.

1. Rappeler pourquoi k est uniformément continue.
2. En déduire l'équicontinuité de (Kf_n).
3. Montrer que (Kf_n) contient une sous-suite convergente dans $C^0([a,b])$.

Exercice 8.18. Soit E un espace métrique compact, et $f : E \to \mathbb{R}$ une application localement bornée sur E : pour tout $x \in E$, il existe un voisinage V_x de x et $M_x > 0$ tel que, pour tout $y \in V_x$, on a $|f(y)| \leq M_x$. Démontrer que f est bornée sur E.

Exercice 8.19. Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{\|x\|_2\to+\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f admet un minimum.

Exercice 8.20. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\forall M > 0, \exists R > 0$ tel que $\|x\|_2 > R \Longrightarrow |f(x)| > M$.
2. Pour toute partie bornée B de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(B)$ est une partie bornée de $\mathbb{R}^n$.
3. Pour toute partie compacte K de R, $f^{-1}(K)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$.