Chapitre 9

Théorie de la mesure

L'objectif de ce chapitre est de présenter la théorie de la mesure de Lebesgue. Celle-ci permet d'obtenir une amélioration élégante de l'intégration au sens de Riemann. Pour aboutir, cette recherche d'extension nécessite un changement de point de vue et met en évidence une série de problème techniques qu'il faudra résoudre. Il faudra alors utiliser des notions plus abstraites que celles mises en oeuvre pour l'intégrale de Riemann mais le gain engendré est plus que satisfaisant.

Dans un premier temps, nous allons présenter les problèmes que nous allons rencontrer et pourquoi il est nécessaire d'introduire la définition de mesures et de tribu. Nous verrons ensuite comment définir la notion de mesure, de tribu et quelles sont les propriétés vérifiées par de tels objets. Nous expliquerons ensuite comment construire la mesure de Lebesgue à partir de la notion de mesure extérieur. Enfin, nous ferons une synthèse sur un procédé abstrait d'extension permettant d'obtenir des mesures en suivant l'argumentaire développer dans le cas de la mesure de Lebesgue.

Pour ne pas alourdir l'exposé certains aspects sont malheureusement laissés de côté. Par exemple : invariance par translation ou rotation de la mesure de Lebesgue. à compléter. Le lecteur pourra se tourner vers [**?**, **?**, **?**, **?**, **?**] pour plus de détails.

9.1 Introduction

Avant toutes choses, il semble essentiel de rappeler les lacunes que possède la théorie de l'intégration au sens de Riemann. Elle reste satisfaisante à de nombreux égards mais possède, de manière intrinsèque, des défauts que nous aimerions corriger. En voici quelques exemples.

1. Comme nous l'avons vu dans l'exemple 7.6.3, la fonction $1_{\mathbb{Q}}$ définie par

$$1_{\mathbb{Q}} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   n'est pas intégrable au sens de Riemann alors qu'il s'agit d'une fonction bornée.
2. Nous avions également vu que la propriété d'être intégrable au sens de Riemann n'est, en général, pas préservée si nous passons à la limite. Autrement dit, si (f_n) est une suite de

fonctions intégrables au sens de Riemann qui converge vers f alors f n'est pas forcément intégrable au sens de Riemann. Pour illustrer ceci, le lecteur pourra montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{k \to +\infty} \big(\lim_{j \to +\infty} \cos^{2j}(k!\pi x) \big) = 1_{\mathbb{Q}}(x).$$

3. L'intégrale de Riemann manque de souplesse vis-à-vis de l'interversion entre intégration et limite. Plus précisément, même si (f_n) est une suite de fonctions intégrables au sens de Riemann qui converge vers f, sur un intervalle I, une fonction également intégrable au sens de Riemann. Les hypothèses assurant que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_I f_n dx = \int_I \lim_{n \to +\infty} f_n dx$$

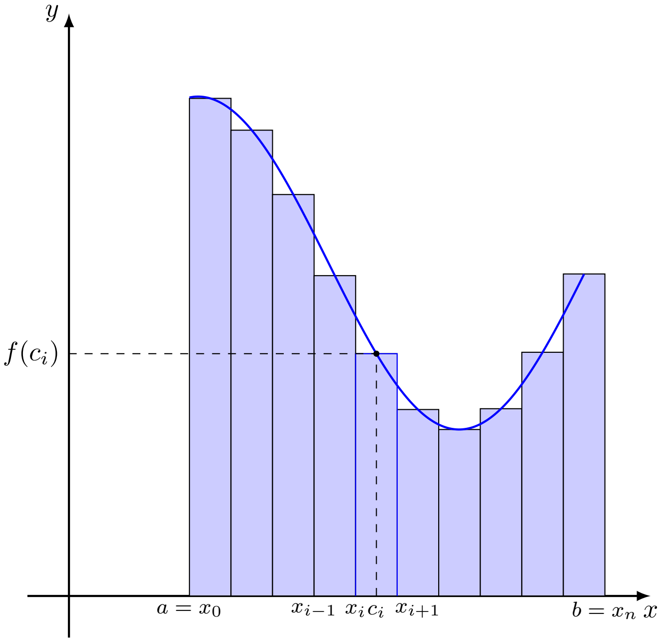
sont très contraignantes et peuvent facilement être mises en défaut.

4. Notons également qu'une fonction intégrable au sens de Riemann est nécessairement bornée et son intégrale finie. Ce ne sera pas forcément le cas avec l'intégrale de Lebesgue : il est possible d'exhiber une fonction f qui peut-être intégrée mais dont l'intégrale vaut $+\infty$. Observons également que le domaine d'intégration est assez restreint : l'intégrale de Riemann se construit initialement sur un intervalle $[a, b]$, il est possible (via la notion d'intégrales généralisées) d'étendre ceci afin de considerer des intervalles de la forme $[a; +\infty[$ou $]-\infty; b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ toutefois ce procédé s'apparente à une forme de bricolage peu satisfaisante car non contenue initialement dans la théorie.

Pour chercher à pallier à ces différents problèmes, il convient de prendre du recul sur la méthode employée par Riemann.

Etant donnée une fonction f, vérifiant les hypothèses idoines sur l'intervalle $[a; b]$, l'objectif est de trouver une subdivision $\mathbf{s} = \{x_0, \ldots, x_N\}$ adéquate $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_N = b$ de sorte que

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{N} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \quad \text{avec} \quad c_i \in]x_{i-1}; x_i[\quad \text{pour tout} \quad i \in \{1, \ldots, N\}.$$



Cette approche sous-entend que la fonction f ne doit pas être trop irrégulière. En effet, pour que l'égalité précédente puisse avoir lieu, il est nécessaire d'avoir une subdivision suffisamment fine de $[a;b]$ de sorte que les oscillations [1] de f puissent être rendues arbitrairement petites sur chaque partie de la subdivision. Notons également que dans cette approche, la subdivision $\mathbf{s}$ n'est soumis à aucunes autres contraintes et n'est finalement pas intrinsèquement liée à la fonction étudiée.

Ce qui précède explique pourquoi la fonction $1_{\mathbb{Q}}$, qui est discontinue partout, n'est pas intégrable au sens de Riemann. Voyons à présent le changement de point de vue proposée par Lebesgue dans sa thèse.

Intégration au sens de Lebesgue :

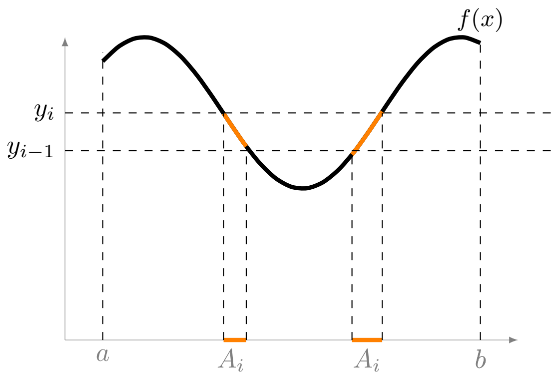
Lebesgue estime que le point le plus important est de comprendre quelles sont les valeurs prises par la fonction f. En ce sens, il propose de faire un découpage suivant l'axe des ordonnées (par opposition au découpage, via la subdivision, de l'axe des abscisses chez Riemann). Ce découpage s'effectue suivant les valeurs atteintes par la fonction f et, de facto, impose une subdivision (pouvant être extrêmement irrégulière) de l'axe des abscisses. Ainsi, si $y_0 < \ldots < y_N$ est un découpage suffisamment fin nous aurions

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{N} c_i m(A_i)$$

où, pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$, $c_i \in]y_{i-1}; y_i[$ et $A_i = \{x \in \mathbb{R} \quad ; \quad y_{i-1} \leq f(x) < y_i\}$ et $m(A_i)$ correspond à la mesure [2] (dont le sens devra être précisé) de l'ensemble A_i. Ci-dessous, nous

1. correspondant aux différences $\max_{x \in]x_{i-1};x_i[} f(x) - \min_{x \in]x_{i-1};x_i[} f(x)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$.
2. « La taille »

proposons une illustration graphique montrant de quelle manière un découpage de l'axe des ordonnées induit une subdivision sur l'axe des abscisses.



Ce procédé peut facilement se mettre en oeuvre sur la fonction $f = 1_{\mathbb{Q}}$ qui ne prend que deux valeurs (0 et 1) associées respectivement aux ensembles

$$A_1 = f^{-1}(\{0\}) = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad A_2 = f^{-1}(\{1\}) = \mathbb{Q}$$

et le lecteur pourra se convaincre de l'irrégularité de tels ensembles qui forment une subdivision de $\mathbb{R}$. Le point de vue adopté permet d'oublier la régularité de la fonction mais soulève de nouvelles questions : **quel sens donner à la mesure d'un ensemble ? Qu'est-ce qu'une mesure et quels sont les ensembles que nous pourrions mesurer ?**

Avant de donner la définition formelle et précise d'une mesure, voyons ce qu'il est raisonnable de demander. Sur $\mathbb{R}$, une mesure devrait être une fonction μ telle que

$$\begin{array}{rccc} \mu : & \mathcal{P}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & [0 + \infty] \\ & A & \longmapsto & \mu(A) \end{array}$$

où $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$. Il est à noter que cette fonction peut prendre la valeur $+\infty$ suivant l'ensemble choisi. Il semble alors naturel d'imposer les conditions suivantes :

- $\mu(\emptyset) = 0$.
- Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille (indexée par un ensemble quelconque I) d'ensembles deux à deux disjoints alors
$$\mu(\cup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} \mu(A_i).$$

  Un soucis se pose alors : l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ est gigantesque et il parait utopique [3] de définir une fonction μ sur un ensemble car nous ne pourrions proposer « une formule » permettant de calculer $\mu(A)$ pour n'importe quel ensemble $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Pour que cela puisse aboutir, il va être nécessaire de se restreindre à des sous-ensembles de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ suffisamment riches pour contenir n'importe quel ensemble « raisonnable » et pour lesquels il sera tout de même possible de

3. En réalité, il est impossible de le faire cf. [].

définir une formule donnant un sens à la notion de mesure. Il semble donc important de prendre le temps de répondre à l'interrogation suivante : **quels sont les ensembles que nous pouvons espérer mesurer ?**

9.2 Ensembles mesurables, algèbres et tribus

Traitons un exemple permettant d'avoir plus d'intuition sur les notions abstraites que nous allons introduire par la suite. Supposons alors que nous souhaitons mesurer des ensembles inclus dans l'intervalle $X =]0;1[$. Les faits suivants apparaissent comme étant des pré-requis naturels :

- nous devrions pouvoir mesurer l'ensemble $X =]0,1[$;
- si nous connaissons la mesure de $A =]0;\frac{1}{4}]$, nous devrions aussi connaitre celle de $A^c =]\frac{1}{4},1[$;
- si nous connaissons la mesure de $A =]0;\frac{1}{4}]$ ainsi que celle de $B = [\frac{3}{4},1[$, nous devrions aussi connaitre celle de $A \cup B =]0,\frac{1}{4}] \cup [\frac{3}{4},1[$;
- de la même manière, si nous connaissons la mesure de $A =]0,\frac{1}{4}]$ ainsi que celle de $B = [0,\frac{1}{2}]$, nous devrions aussi connaitre celle de $A \cap B = [\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$.

En observant ce qui précède, nous constatons que nous avons besoin d'une classe d'ensembles $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}([0,1])$ qui soit **stable par passage au complémentaire, par réunion et par intersection finie.** [4] Ceci mène à la définition suivante.

Définition 9.2.1. *Soit X un ensemble, nous dirons que $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ est une algèbre* [5] *sur X lorsque*

1. *$\emptyset \in \mathcal{A}$ et $X \in \mathcal{A}$.*
2. *si $A \in \mathcal{A}$ alors $A^c \in \mathcal{A}$.*
3. *si $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{A}$ alors $A \cup B \in \mathcal{A}$.*

Remarque. En particulier, la combinaison des points 2 et 3 nous assure aussi que si $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{A}$ alors $A \cap B \in \mathcal{A}$. D'ailleurs, une récurrence immédiate montre que ceci (ainsi que le point 3) est encore valable pour une famille finie d'éléments de $\mathcal{A}$: pour $n \geq 1$, si $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ alors

$$\cup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A} \quad \text{et} \quad \cap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}.$$

Un instant de réflexion laisse envisager qu'il manque une propriété aux algèbres pour la théorie que souhaitons établir. En effet, nous pouvons observer que $X =]0;1[$ peut s'obtenir comme la réunion (infinie) des ensembles $]\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}[$. Autrement dit,

$$]0,1[= \cup_{n\geq 1} \left] \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right[.$$

4. Le lecteur aura à l'esprit les similitudes existantes entre ces conditions avec celles qui permettent de définir une topologie sur un ensemble (cf. définition 8.2.2). La différence étant qu'une topologie ne nécessite pas de stabilité par complémentaire, que la stabilité par réunion n'est pas limitée à une réunion finie et que la stabilité par intersection s'obtient pour un nombre fini.

5. Il est parfois précisé *algèbre de Boole*. Cette notion ne doit pas être confondue avec celle portant sur la structure algébrique d'un espace vectoriel muni d'une seconde loi de composition interne.

Il semble donc raisonnable de demander aux algèbres une **stabilité sur des réunions d'ensembles dénombrables et plus seulement des réunions finies**. En fait, comme nous le verrons par la suite, cette stabilité va jouer un rôle essentiel vis-à-vis de la propriété d'intégrabilité[6].

Définition 9.2.2. *Soient X un ensemble et $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$. Nous dirons que $\mathcal{T}$ est une tribu (ou une σ-algèbre) si $\mathcal{T}$ est une algèbre stable par union dénombrable. Autrement dit, $\mathcal{T}$ est une tribu si*

1. *$X \in \mathcal{T}$.*
2. *si $A \in \mathcal{T}$ alors $A^c \in \mathcal{T}$.*
3. *si, pour tout n, $A_n \in \mathcal{T}$ alors $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$.*

Remarque. La stabilité par passage au complémentaire montre aussi que si, pour tout n, $A_n \in \mathcal{T}$ alors $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$.

Cette nouvelle notion permet de définir les ensembles sur lesquels nous allons pouvoir construire une mesure μ.

Définition 9.2.3. *Soient X un ensemble et $\mathcal{T}$ une tribu sur X. Le couple $(X, \mathcal{T})$ est appelé espace mesurable.*

Remarque. Les ensembles contenus dans $\mathcal{T}$ sont dit mesurables, ce sont précisément sur ces ensembles que nous allons devoir préciser la notion de mesure.

Comme lecteur pourra l'observer au travers des exercices servant à illustrer ce chapitre, il est bien souvent difficile de décrire de manière explicite les éléments composant une tribu. Pour cette raison, il est plus commode de chercher à décrire une tribu à partir d'une partie génératrice. Etant donné un ensemble X, ceci mène à la notion de tribu engendrée par un sous-ensemble de $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$.

Définition 9.2.4. *La tribu engendrée par une famille de parties $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ est la plus petite tribu contenant $\mathcal{E}$; elle est définie comme l'intersection de toutes les tribus contenant $\mathcal{E}$ et sera notée $\sigma(\mathcal{E})$.*

Remarque. Il est possible d'adopter le même genre de définition pour les algèbres.

Certaines tribus engendrées sont plus importantes que d'autres. Nous obtenons un exemple fondamental lorsque X est muni d'une topologie $\mathcal{O}$.

Définition 9.2.5. *Soit X un espace topologique, nous appellerons tribu des boréliens sur X la tribu engendrée par les ouverts de X. Celle-ci sera notée $\mathcal{B}(X)$.*

Voyons cela sur un exemple.

Exemple 9.2.1. Voyons ce qui ce produit si $X = \mathbb{R}$. Un ouvert O est un ensemble tel que pour tout $x \in O$, il existe des nombres a, b (pouvant être choisis parmi les nombres rationnels) tels que $]a; b[\subset O$. En particulier, n'importe quel ouvert peut s'exprimer comme étant une réunion dénombrable d'intervalles ouverts (cf. chapitre précédent). Pour ces raisons (et d'après les propriétés de stabilité d'une tribu), la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ peut être engendrée par la famille des intervalles ouverts dont les extrémités sont nombres rationnels.

6. Il s'agit précisément de ce qui va permettre de corriger un défaut de l'intégrale de Riemann : la notion d'être intégrable au sens de Riemann ne se conserve pas par passage à la limite.

Remarque. En fait, toujours grâce aux propriétés de stabilité d'une tribu, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ peut s'obtenir via la tribu engendrée à l'aide d'une famille composée de n'importe quel type d'intervalles :

$$[a,b], \quad]a,b[, \quad [a,+\infty[, \quad]-\infty,b], \quad [a,b[, \quad \ldots$$

avec $a,b \in \mathbb{R}$ ou $a,b \in \mathbb{Q}$.

Une question assez naturelle surgit : **est-il possible d'obtenir la tribu des boréliens $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ à partir de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$**. Autrement dit, comment obtenir la tribu d'un espace produit à partir des ensembles qui le compose ? Rien n'est plus simple en utilisant la notion de tribu engendrée.

Définition 9.2.6 (Tribu produit)**.** *Soient $(X,\mathcal{A})$ et $(Y,\mathcal{T})$ deux espaces mesurables, la tribu engendrée par les ensembles*

$$A \times B \quad \textit{avec} \quad A \in \mathcal{A} \quad \textit{et} \quad B \in \mathcal{T}$$

sera notée $\mathcal{A} \otimes \mathcal{T}$. Il s'agit d'une tribu sur l'espace produit $X \times Y$.

Remarque. Il est possible de montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ (cf []). Finalement le procédé décrit ci-dessous est à rapprocher de celui permettant d'obtenir une topologie d'un ensemble produit à partir de la topologie de ses facteurs. Par exemple, un ouvert de $\mathbb{R}^2$ est une réunion de pavés ouverts de la forme

$$]a,b[\times]c,d[.$$

9.3 Mesures

Maintenant que nous avons mis en évidence les ensembles qui peuvent être mesurés, nous allons voir comment définir précisément une mesure sur une tribu donnée. Nous parlerons ensuite des propriétés vérifiées par de tels objets.

Définition 9.3.1. *Soit $(X,\mathcal{T})$ un espace mesurable. Une mesure est une application*

$$\begin{array}{rccl} \mu : & \mathcal{T} & \longrightarrow & [0+\infty] \\ & A & \longmapsto & \mu(A) \end{array}$$

telle que $\mu(\emptyset) = 0$ et si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}$ est une famille d'ensembles mesurables deux à deux disjoints alors

$$\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

Le triplet $(X,\mathcal{T},\mu)$ est appelé espace mesuré.

Remarque. Il est à noter que les deux membres de la dernière égalité peuvent être infini. Soit parce que la mesure de $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ l'est, soit parce que la mesure d'un ensemble A_n l'est.

Avant de présenter quelques exemples voyons quelles sont les propriétés des mesures qui peuvent être déduites de la définition.

Proposition 102. *Soit μ une mesure*[7] *sur un espace mesurable $(X,\mathcal{T})$.*

7. Rapidement, par soucis de simplicité, nous dirons μ une mesure plutôt que μ une mesure $\mathcal{T}$. A aucun moment cet abus de langage ne sera source de confusion.

1. *(Monotonie) Pour tout* $A, B \in \mathcal{T}$*, si* $A \subset B$ *alors* $\mu(A) \leq \mu(B)$.
2. *(Sous-additvité) Si pout tout* $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathcal{T}$ *alors* $\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$.
3. *(Croissance monotone) Si* $A_n \in \mathcal{T}$ *et* $A_n \subset A_{n+1}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *alors* $\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$.
4. *(Décroissance monotone) Si* $A_n \in \mathcal{T}$*,* $A_{n+1} \subset A_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et s'il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $\mu(A_{n_0}) < +\infty$ *alors* $\mu(\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$.

Démonstration. 1. L'idée est d'utiliser l'additivité de μ sur une famille particulière $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles deux à deux disjoints. Posons alors $A_1 = A, A_2 = B\backslash A$ et $A_n = \emptyset$ pour tout $n \geq 2$. Dans ce cas, par additivité de μ, nous avons

$$\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \quad \iff \mu(B) = \mu(A) + \mu(B\backslash A).$$

En outre, $\mu(B\backslash A) \geq 0$ d'où

$$\mu(B) \geq \mu(A).$$

2. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ensembles mesurables. Pour établir l'assertion, il convient de construire une famille $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles deux à deux disjoints à partir de $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ce procédé sera utilisé à de nombreuses reprises. A cet effet, posons $B_1 = A_1$ puis $B_2 = A_2 \cap B_1^c$, $B_3 = A_3 \cap (B_1 \cup B_2)^c$ et ainsi de suite (i.e. $B_n = A_n \cap (\cup_{k=1}^{n-1} B_k)^c$ pour tout $n \geq 2$). Par suite, via la propriété d'additivité de μ, nous avons

$$\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n).$$

Pour conclure, il suffit d'observer que $\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et $B_n \subset A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, en utilisant la monotonie de μ, nous en déduisons que

$$\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

3. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'ensembles mesurables. A partir de celle-ci, produisons à nouveau une suite disjointe $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme dans l'assertion précédente. Observons en passant que l'hypothèse $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous assure, par construction, que

$$\cup_{k=1}^{N} B_k = A_N \quad \text{pour tout} \quad N \in \mathbb{N}.$$

D'où, $\mu(\cup_{k=1}^{N} B_k) = \mu(A_N)$. Or, puisque les ensembles $(B_k)_{k\geq 1}$ sont deux à deux disjoints nous avons aussi

$$\mu(A_N) = \sum_{k=1}^{N} \mu(B_k).$$

En outre, en posant $A = \cup_{k\geq 1} B_k$, nous avons pour les mêmes raisons :

$$\mu(A) = \sum_{k\geq 1} \mu(B_k).$$

Donc

$$\mu(A) = \lim_{N\to+\infty} \mu(A_N).$$

4. Pour établir la dernière assertion, il convient de passer au complémentaire afin de produire une suite décroissante d'ensembles. Il faut toutefois être prudent durant les calculs afin de s'assurer qu'aucune forme indéterminée n'apparaisse. Sans perdre en généralité, quitte à re-numéroter les éléments de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, nous pouvons supposer que $n_0 = 1$. Pour tout $n \geq 1$, posons $C_n = A_1 \cap A_n^c = A_1 \backslash A_n$. Ce choix entraine (un dessin suffit pour s'en convaincre) que $C_n \subset C_{n+1}$ pour tout $n \geq 1$. En outre, puisque $A_n \subset A_1$ pour tout $n \geq 1$ nous avons
$$\mu(A_n) \leq \mu(A_1) < +\infty.$$
Ceci permet de nous assurer que $\mu(C_n) = \mu(A_1) - \mu(A_n) < +\infty$ pour tout $n \geq 1$. En utilisant l'assertion précédente avec la suite croissante $(C_n)_{n\geq 1}$ nous avons
$$\lim_{n\to+\infty} \mu(C_n) = \mu(\cup_{n\geq 1} C_n)$$
or $\mu(\cup_{n\geq 1} C_n) = \mu(\cup_{n\geq 1} A_1 \backslash A_n) = \mu\big(A_1 \backslash \cup_{n\geq 1} A_n\big) = \mu(A_1) - \mu(\cap_{n\geq 1} A_n)$. D'où,
$$\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \mu(\cap_{n\geq 1} A_n).$$

□

Voyons quelques exemples, plus concrets, de mesures positives afin de se forger une meilleure intuition vis-à-vis de ces nouveaux objets.

Exemple 9.3.1. 1. Si $X = \mathbb{N}$ muni de la tribu $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ alors la mesure de comptage μ est définie, pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ par
$$\mu(A) = \mathrm{Card}(A)$$
qui, à un ensemble A, lui associe son cardinal.

2. Si $(X, \mathcal{T})$ est un ensemble mesurable et $x \in X$, la mesure de Dirac en x (notée δ_x) est définie, pour tout $A \in \mathcal{T}$, par
$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

3. Si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{T}, \nu)$ sont des espaces mesurés alors il est possible[8] de définir une mesure (dite produit) $\mu \otimes \nu$ sur $\mathcal{A} \otimes \mathcal{T}$ en posant
$$\mu \otimes \nu(A \times B) = \mu(A)\nu(B) \quad \text{avec} \quad A \in \mathcal{A} \quad \text{et} \quad B \in \mathcal{T}.$$

Remarque. Notons en passant que $\delta_x(A) = 1_A(x)$. Notons aussi que la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ peut s'exprimer comme une somme de masse de Dirac $\sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_n$. En effet, si $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ alors
$$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_n\right)(A) = \sum_{n\in A} \delta_n = \mathrm{Card}(A).$$

Bien que simples, ces quelques exemples permettent retrouver des notions très importantes : les mesures de probabilités sur un ensemble fini par exemple. En effet, si $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ muni

8. Certains aspect techniques sont passés sous silence. Par exemple, il convient de vérifier que si $Q \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{T}$ alors l'ensemble $Q_x = \{y \in Y \,;\, (x, y) \in Q\} \in \mathcal{T}$ pour tout $x \in X$. Ceci peut se trouver dans [].

de $\mathcal{P}(X)$, la mesure uniforme sur X (modélisant, par exemple, un jet de dé équilibré à 6 faces) s'obtient de la manière suivante : pour tout $A \in \mathcal{P}(X)$ alors

$$\mu(A) = \frac{1}{6}\mathrm{Card}(A).$$

Ceci permet alors de retrouver des notions élémentaires de probabilités abordées en classe de seconde.

Finalement, la remarque précédente montre que l'ensemble des mesures positives [9] reste stable par combinaison linéaire (avec des coefficients positifs ou nuls) : si μ, ν sont des mesures et α, β des réels positifs ou nuls alors

$$\alpha\mu + \beta\nu$$

est encore une mesure. Il semble toutefois moins clair que ce procédé reste valable pour une combinaison linéaire (du même genre) cette fois-ci avec infinité de termes. Comme nous allons l'observer, la propriété de croissance monotone (cf. item 3 proposition 102) nous permet de justifier ceci.

Proposition 103. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace mesuré et $(\mu_n)_{n\geq 0}$ une suite de mesures. Si $(\mu_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante au sens que, pour tout $A \in \mathcal{T}$,*

$$\mu_n(A) \leq \mu_{n+1}(A) \quad \textit{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$

alors l'application μ définie par

$$\mu(A) = \lim_{n\to+\infty} \mu_n(A) \in [0; +\infty] \quad \textit{pour tout} \quad A \in \mathcal{T}$$

est une mesure.

Démonstration. Le seul point nécessitant une démonstration est celui concernant l'additivité dénombrable de μ sur une famille (dénombrable) d'ensembles deux à deux disjoints. A cet effet, considérons $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une telle famille et notons $A = \cup_{k\in\mathbb{N}} A_k$. Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, μ_n est une mesure nous avons

$$\mu(A) = \lim_{n\to+\infty} \mu_n(A) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu_n(A_k).$$

Dans ce qui va suivre, toutes les limites sont à comprendre dans $[0, +\infty]$ [10]. Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les mesures μ_n sont croissantes, nous avons

$$\mu(A) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k\geq 0} \mu_n(A_k) \leq \sum_{k\geq 0} \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu_n(A_k) = \sum_{k\geq 0} \mu(A_k).$$

Par ailleurs, pour tout entier N, nous avons aussi

$$\mu(A) \geq \sum_{k=0}^{N} \mu_n(A_k)$$

9. Il existe des mesures dite *signées* qui changent de signes, il existe aussi des mesures complexes (cf. [**?**]).
10. A plusieurs reprises, nous utilisons le fait qu'une suite croissante converge dans $[0, +\infty]$ vers son supremum. Rappelons qu'il s'agit d'une généralisation du fait qu'une suite croissante et majorée converge vers sa borne supérieure.

d'où

$$\mu(A) \geq \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \mu_n(A_k) = \sum_{k=0}^{N} \lim_{n\to+\infty} \mu_n(A_k) = \sum_{k=0}^{N} \mu(A_k).$$

Ceci étant vrai pour tout entier N, nous en déduisons alors que $\mu(A) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k)$ et donc $\mu(A) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k)$. [11]

□

Finalement, ce qui précède montre que la construction de mesures s'effectue sans difficultés majeures lorsque l'ensemble X, muni de la tribu $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$, est fini ou dénombrable. Dans ces cas là, les mesures s'obtiennent sous la forme de somme de masse de Dirac :

$$\mu = \sum_{x\in X} \mu(\{x\})\delta_x$$

où $\mu(\{x\})$ correspond au poids accordé au point $x \in X$. Si $\mu(\{x\}) = 1$ pour tout $x \in X$, nous retrouvons la mesure de comptage sur X ; il est aussi possible de choisir les poids de sorte $\sum_{x\in X} \mu(\{x\}) = 1$ pour obtenir des mesures de probabilités.

Exemple 9.3.2. 1. Si $X = \{0; 1\}$, le choix $\mu(\{0\}) = \frac{1}{2}$ et $\mu(\{1\}) = \frac{1}{2}$ permet de retrouver la mesure de probabilité liée à une epreuve de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{2}$.

2. Si $X = \mathbb{N}$ et $\lambda > 0$, le choix

$$\mu(\{x\}) = \frac{e^{-\lambda}}{x!}\lambda^x \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{N}$$

permet d'obtenir la mesure de probabilité $\mu = \sum_{k\geq 0} \frac{e^{-\lambda}}{k!}\lambda^k\delta_k$ liée à une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

En revanche, les méthodes décrites plus tôt ne permettent pas d'obtenir une mesure μ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ permettant de retrouver la notion de longueur : si $a < b$ alors $\mu(]a; b]) = b - a$.

Pour aboutir à cela, il faut introduire de nouvelles idées et un procédé de construction plus complexe. Nous allons décrire ceci, sans entrer dans l'intégralité des détails techniques. Avant de nous atteler cela, nous traitons dans une courte section la notion d'ensemble négligeable

9.3.1 Ensembles négligeables

Un ensemble négligeable est essentiellement un ensemble de mesure nulle. La définition précise est un peu plus compliquée.

Définition 9.3.2 (Ensemble négligeable)**.** *. Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré ; une partie $N \subset X$* [12] *est dite négligeable (par rapport à μ), ou μ-négligeable, s'il existe $A \in \mathcal{T}$ tel que $N \subset A$ et $\mu(A) = 0$.*

11. Ceci justifiant alors l'écriture de la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ par $\sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_n$.
12. Observons que N n'est pas nécessairement mesurable a priori

Remarque. Il est souvent commode de compléter une tribu $\mathcal{T}$ afin qu'elle contienne les ensembles négligeables par rapport à une mesure μ donnée. Cette complétion s'effectue en posant

$$\mathcal{T}_\mu = \{A \cup N \,;\, A \in \mathcal{T},\ N\, \mu - \text{négligeable}\},$$

qui définit une tribu sur X contenant les ensembles μ-négligeables (et contenant A) : c'est la tribu complétée de $\mathcal{T}$ par rapport à μ. L'interêt derrière ceci est de s'assurer que les sous-ensembles contenus dans un ensemble négligeable sont eux aussi mesurables ; cela permettra d'éviter des problèmes techniques de mesurabilité dans le prochain chapitre .

La propriété presque partout est naturellement associée aux ensembles négligeables. Une propriété sur $(X, \mathcal{T}, \mu)$ est dite avoir lieu μ-presque partout si l'ensemble où elle n'a pas lieu est μnégligeable. Voyons deux exemples.

Exemple 9.3.3.

1. Soit $f : (X, \mathcal{T}) \to \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$ est nulle μ-presque partout si l'ensemble $\{x \in X \,;\, f(x) \neq 0\}$ est μ-négligeable.
2. Nous avions vu que le suite de fonctions $f_n(x) = x^n$ ne convergeait pas uniformément sur $[0, 1]$ vers la fonction identiquement nulle à cause de ce qui se produit en $x = 1$. En revanche, puisque $\{1\}$ est un ensemble de mesure nulle pour λ la mesure de Lebesgue, la convergence uniforme à lieu λ-presque partout.

Remarque. En anticipant un peu le prochain chapitre, soulignons le fait que l'intégrale de Lebesgue ne prend pas en compte ce qui se produit sur un ensemble négligeable. La notion de presque partout permet alors une certaine souplesse qui manquait à l'intégrale de Riemann. Le deuxième exemple suggère alors que l'interversion entre intégrale et limite risque d'être plus aisée car il est possible d'écarter les points gênants pour peu que leur réunion soit un ensemble négligeable.

Avant de passer à la construction de la mesure de Lebesgue λ, soulevons une question : **étant donné un espace mesurable** $(X, \mathcal{T})$ **ainsi que deux mesures** μ **et** ν**, comment faire pour montrer que** $\mu = \nu$ **?** Cette question aura d'autant plus d'importance lorsque nous parlerons de probabilités.

9.4 Construction de la mesure de Lebesgue

L'objectif de cette section est d'aboutir à la construction de la mesure de Lebesgue λ (laquelle vérifiera $\lambda(]a; b]) = b - a$). Pour aboutir à ce résultat, certains préliminaires sont indispensables. Le lecteur observera que le principe de construction ressemble à celui utilisé pour construire l'intégrale de Riemann : débuter par des ensembles simples, trouver ensuite un moyen d'approcher les véritables ensembles d'interêts par ces ensembles simples.

Pour gagner en clarté, certains aspects techniques seront omis ou seulement esquissés. Des références seront systématiquement données.

9.4.1 Mesure extérieure

La construction s'effectue en plusieurs étapes :

1. définir μ sur une algèbre $\mathcal{A}$ en précisant sa valeur sur des ensembles élémentaires engendrant l'algèbre ;
2. trouver un procédé d'extension permettant d'obtenir un prolongement de μ sur une tribu contenant $\sigma(\mathcal{A})$.

Voyons comment ceci se met en oeuvre dans le cas de la mesure de Lebesgue λ. Nous expliquerons ensuite quelles modifications apporter pour traiter des cas plus abstraits.

Définition 9.4.1 (Ouvert élémentaire)**.** *Nous appelons ouvert élémentaire de $\mathbb{R}^n$, un ensemble B de la forme*

$$B = \prod_{i=1}^{n}]a_i, b_i[= \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \quad ; \quad x_i \in]a_i, b_i[\quad \textit{pour tout} \quad i = 1, \ldots, n \right\}$$

où $b_i \geq a_i$ sont des nombres réels. Si $B = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$ nous dirons que B est un fermé élémentaire de $\mathbb{R}^n$.

Ceci nous permet alors de définir la notion de volume d'un ouvert élémentaire B en posant

$$\mathrm{Vol}(B) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i). \tag{9.4.1}$$

Remarque. Le lecteur vérifiera que suivant la dimension n, la fonction volume Vol permet de retrouver la notion de longueur d'un intervalle, d'aire d'un rectangle ou du volume d'une boite. La fonction volume peut-être considérée sans difficulté sur l'algèbre engendrée par les ouverts élémentaires [13]. En revanche, en général, si A est un ensemble quelconque de $\mathbb{R}^n$ nous ne savons pas ce que signifie $\mathrm{Vol}(A)$.

A présent, nous souhaitons prolonger la fonction volume en une mesure λ (la mesure de Lebesgue) définie sur une certaine tribu (qu'il faudra définir) de $\mathbb{R}^n$. Pour cela, nous allons reprendre la notion de recouvrement rencontrée via la notion de compacité (cf. chap.

Définition 9.4.2. *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$, nous dirons qu'une collection $(B_j)_{j \in J}$, avec J un ensemble quelconque, est un recouvrement d'ouverts élémentaires de A si et seulement si*

$$A \subset \cup_{j \in J} B_j.$$

Puisque nous cherchons à produire une mesure λ, celle-ci doit être sous-additive et vérifier une propriété de monotonie. De plus, λ doit coïncider avec Vol sur les ouverts élémentaires. C'est pourquoi, si nous considérons $A \subset \mathbb{R}^n$ et $(B_j)_{j \in J}$ un recouvrement d'ouverts élémentaires de A, nous devons avoir :

$$\lambda(A) \leq \lambda(\cup_{j \in J} B_j) \leq \sum_{j \in J} \lambda(B_j) = \sum_{j \in J} \mathrm{Vol}(B_j).$$

Ceci mène à

$$\lambda(A) \leq \inf \left\{ \sum_{j \in J} \mathrm{Vol}(B_j) \quad ; \quad (B_j)_{j \in J} \,\text{recouvre}\, A \quad ; \quad J \,\text{au plus dénombrable} \right\}.$$

13. Ceci ne pose pas de difficulté car, l'algèbre engendrée, n'implique que des réunions ou des intersections **en nombre fini** d'ouverts élémentaires

Ceci suggère que la quantité de droite (dans l'inégalité précédente) est une manière de mesurer A. Il parait naturel d'espérer être capable de choisir habilement [14] le recouvrement $(B_j)_{j\in J}$ de sorte que le membre de droite soit une mesure la plus précise possible d'un ensemble quelconque $A \subset \mathbb{R}^n$. Ceci nous incite à introduire la quantité suivante.

Définition 9.4.3 (Mesure extérieure)**.** *Si $A \subset \mathbb{R}^n$, nous définissons la mesure extérieure $\lambda^*(A)$ de A par*

$$\lambda^*(A) = \inf\left\{\sum_{j\in J} \mathrm{Vol}(B_j) \quad ; \quad (B_j)_{j\in J} \textit{ recouvre } A \quad ; \quad J \textit{ au plus dénombrable}\right\}.$$

Remarque.

1. Contrairement à λ, λ^* est définie pour n'importe quel sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ et non plus seulement pour des ensembles élémentaires.
2. La terminologie est légèrement trompeuse et laisse suggérer que λ^* est une mesure sur $\mathbb{R}^n$; comme nous le verrons ce n'est pas le cas. Il sera nécessaire de se restreindre à une classe particulière d'ensembles de $\mathbb{R}^n$ pour que λ^* vérifie les propriétés d'une mesure.
3. D'une certaine manière, le procédé permettant de définir λ^* est à rapprocher de la quantité γ_2 introduite par Talagrand dans son ouvrage [**?**]. Historiquement, γ_2 a été introduite par Talagrand pour améliorer la notion de mesures majorantes définie par Fernique afin de caractériser le supremum d'une certaine classe de processus aléatoires.

Comme annoncé ci-dessus λ^* n'est pas une mesure, pourtant elle vérifie beaucoup de propriétés satisfaite par une mesure.

Proposition 104. *La mesure exterieure λ^* vérifie les propriétés suivantes :*

1. $\lambda^*(\emptyset) = 0$.
2. *Pour tout $A \subset \mathbb{R}^n$, nous avons $0 \leq \lambda^*(A) \leq +\infty$.*
3. *(Monotonie) Pour tout $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$, nous avons $\lambda^*(A) \leq \lambda^*(B)$.*
4. *(Sous-additivité) Si $(A_j)_{j\in J}$ est une collection au plus dénombrable de sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ alors $\lambda^*(\cup_{j\in J} A_j) \leq \sum_{j\in J} \lambda^*(A_j)$.*

Remarque. Autrement dit, λ^* **vérifie toute les propriétés requises d'une mesure sauf la notion d'additivité**. Ici, seule une propriété de sous-additivité est disponible. C'est pour cette raison qu'il faudra restreindre λ^* a une classe raisonnable d'ensembles de $\mathbb{R}^n$ pour obtenir ce que nous souhaitons.

Pour avoir plus d'intuition sur cette nouvelle fonction d'ensembles λ^*, il semble important de voir s'il est possible de déterminer sa valeur sur des ensembles particuliers et simples.

Proposition 105. *Soit B un fermé élémentaire défini par*

$$B = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i] = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad ; x_i \in [a_i, bi] \quad \textit{pour tout} \quad i = 1, \ldots, n\right\}$$

alors

$$\lambda^*(B) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

14. Un peu comme nous l'avions fait avec les subdivisions pour l'intégrale de Riemann.

Remarque. Autrement dit, cette proposition atteste que λ^* coïncide avec la fonction volume sur les fermés élémentaires.

Démonstration. L'idée est de se ramener à des ouverts élémentaires pour lesquelles la fonction Vol est définie de manière explicite.

Soit $\varepsilon > 0$, il est clair que $B \subset \prod_{i=1}^{n}]a_i - \varepsilon, b_i + \varepsilon[$. Ainsi, par définition de λ^* nous avons

$$\lambda^*(B) \leq \mathrm{Vol}\Big(\prod_{i=1}^{n}]a_i - \varepsilon, b_i + \varepsilon[\Big) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i + 2\varepsilon).$$

D'où, lorsque $\varepsilon \to 0$, nous obtenons $\lambda^*(B) \leq \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$. Pour conclure la démonstration, il suffit de montrer que $\lambda^*(B) \geq \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$.

Or, par définition de λ^*, il suffit de montrer que

$$\sum_{j\in J} \mathrm{Vol}(B_j) \geq \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$$

lorsque $(B_j)_{j\in J}$ est un recouvrement (au plus dénombrable) d'ouverts élémentaires de B. En outre, B étant un ensemble fermé et borné de $\mathbb{R}^n$ il s'agit d'un ensemble compact (cf. proposition 79). Si $(B_j)_{j\in J}$ est un recouvrement d'ouverts élémentaires de B, nous savons alors (cf. définition 8.4.1) qu'il existe un sous-recouvrement fini $(B_j)_{j\in J'}$ avec $J' \subset J$ de B. Par suite, en utilisant la monotonie de Vol, nous devons avoir

$$\sum_{j\in J'} \mathrm{Vol}(B_j) \geq \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$$

avec J' un ensemble fini. En résumé, pour conclure il nous suffit d'établir que

$$\sum_{j\in J} \mathrm{Vol}(B_j^{(j)}) \geq \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$$

où $(B^{(j)})_{j\in J}$ est un sous-recouvrement fini de $\prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$. Nous avons remplacé l'ensemble B_j par $B^{(j)}$ afin de faciliter les notations en réservant les indices pour désigner les composantes (des coordonnées dans $\mathbb{R}^n$) de l'ensemble $B^{(j)}$.

La démonstration s'effectue via une récurrence sur la dimension n. Lorsque $n = 1$, l'ensemble B correspond à un intervalle fermé $B = [a, b]$ et les ouverts élémentaires $B^{(j)}$ sont de la forme $B^{(j)} =]a_j, b_j[$. Si J est un ensemble fini, nous devons donc établir que

$$\sum_{j\in J}(b_j - a_j) \geq (b - a).$$

A cet effet, pour tout $j \in J$, nous allons introduire les fonctions $f^{(j)}$ définies [15] par

$$f^{(j)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]a_j, b_j[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

15. Plus tard, dans le chapitre suivant, nous dirons que $f^{(j)}$, pour tout $j \in J$, est la fonction indicatrice de l'ensemble $B^{(j)}$ et une notation particulière sera introduite.

afin d'utiliser l'intégrale de Riemann [16] . En effet, pour tout $j \in J$, ces fonctions sont intégrables (au sens de Riemann) et nous avons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^{(j)}(x)dx = b_j - a_j.$$

De plus, puisque $B \subset \cup_{j\in J} B^{(j)}$ nous avons $\sum_{j\in J} f^{(j)}(x) \geq f(x)$ où f est définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]a,b[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

C'est pourquoi, par linéarité de l'intégrale, nous avons

$$\sum_{j\in J} \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(j)}(x)dx \geq \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{j\in J}(b_j - a_j) \geq b - a.$$

Ce qui conclut l'initialisation de la récurrence. Soit $n > 1$ et supposons à présent que notre résultat est vrai pour la dimension $n-1$ et cherchons à l'établir en dimension n. A présent, pour tout $j \in J$, $B^{(j)}$ est de la forme

$$B^{(j)} = \prod_{i=1}^{n}]a_i^{(j)}, b_i^{(j)}[.$$

Cet ensemble peut se décomposer de la manière suivante :

$$B^{(j)} = A^{(j)} \times]a_n^{(j)}, b_n^{(j)}[\quad \text{avec} \quad A^{(j)} = \prod_{i=1}^{n-1}]a_i^{(j)}, b_i^{(j)}[\subset \mathbb{R}^{n-1}.$$

De la même manière $B = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i] = A \times [a_n, b_n]$ avec $A = \prod_{i=1}^{n-1} [a_i, b_i]$. Observons maintenant que $(A^{(j)})_{j\in J}$ est un recouvrement de A (dans $\mathbb{R}^{n-1}$). Ainsi, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$\sum_{j\in J} \mathrm{Vol}_{n-1}(A^{(j)}) \geq \mathrm{Vol}_{n-1}(A) \tag{9.4.2}$$

où l'indice $n-1$ est là pour souligner le fait que les calculs de volumes ont lieu dans $\mathbb{R}^{n-1}$; si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in B$, notons que l'inégalité (9.4.2) dépend de encore de la dernière variable $x_n \in [a_n, b_n]$. Intégrons, sur l'intervalle $[a_n, b_n]$, ensuite cette inégalité suivant la variable x_n. Nous obtenons

$$\int_{a_n}^{b_n} \sum_{j\in J} \mathrm{Vol}_{n-1}(A^{(j)})dx_n \geq \int_{a_n}^{b_n} \mathrm{Vol}_{n-1}(A)dx_n \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{j\in J} \mathrm{Vol}_{n-1}(A^{(j)})(b_n - a_n) \geq \mathrm{Vol}_{n-1}(A)(b_n - a_n).$$

Puisque $[a_n, b_n] \subset]a_n^{(j)}, b_n^{(j)}[$ nous en déduisons que

$$\sum_{j\in J} \mathrm{Vol}_{n-1}(A^{(j)})(b_n^{(j)} - a_n^{(j)}) \geq \mathrm{Vol}_{n-1}(A)(b_n - a_n)$$

16. A priori, il peut sembler curieux d'introduire de telles fonctions. Pourtant, comme nous le verrons pas la suite, ces fonctions seront de nouveau employées lorsque nous étudierons l'intégrale de Lebesgue. De plus ce genre d'idées sera aussi pratique lorsque nous souhaiterons généraliser ce procédé permettant de construire une intégrale à l'aide d'une partition de l'unité.

et il ne reste plus qu'à observer que le membre de gauche vaut $\sum_{j\in J}\mathrm{Vol}(B^{(j)})$ tandis que le membre de droite vaut $\mathrm{Vol}(B)$. Ce qui conclu la démonstration.

□

Maintenant que la valeur de la mesure extérieure d'un fermé élémentaire a été obtenu, nous pouvons facilement en déduire celle d'une boite ouverte.

Corollaire 106. *Soit $B = \prod_{i=1}^{n}]a_i;b_i[$ un ouvert élémentaire*

$$i.e.\quad B = \Big\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \quad \text{tel que} \quad x_i \in]a_i;b_i[\quad \text{pour tout} \quad i\in\{1;\dots;n\}\Big\}.$$

Alors, nous avons

$$\lambda^*(B) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i).$$

Remarque. En particulier, ce résultat montre que λ^* coïncide avec λ sur les ouverts élémentaires.

Démonstration. Sans perdre en généralité, nous pouvons supposer que $b_i > a_i$ pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$; le cas $b_i = a_i$ pour tout $i\in\{1,\dots,n\}$ étant évident. Observons ensuite que, pour tout $\varepsilon > 0$ [17],

$$\prod_{i=1}^{n}[a_i+\varepsilon;b_i-\varepsilon] \subset \prod_{i=1}^{n}]a_i;b_i[\subset \prod_{i=1}^{n}[a_i;b_i].$$

Ainsi, grâce à la monotonie de λ^* et la proposition 105, nous avons

$$\prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i - 2\varepsilon) \le \lambda^*(B) \le \prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i).$$

Il reste ensuite à faire tendre ε vers 0 pour conclure. □

Le procédé de comparaison utilisé ci-dessus permet d'obtenir simplement la mesure extérieure d'autres ensembles. Voyons d'autres exemples d'application de ceci.

Exemple 9.4.1.
1. Soit $R > 0$, puisque $]-R,R[\subset\mathbb{R}$ nous avons $\lambda^*(]-R;R[) \le \lambda^*(\mathbb{R})$. D'où,
$$2R \le \lambda^*(\mathbb{R}).$$
Il suffit ensuite de faire tendre $R\to+\infty$ pour obtenir que $\lambda^*(\mathbb{R}) = +\infty$.
2. $\mathbb{Q}$ étant un ensemble dénombrable, nous savons que $\mathbb{Q} = \cup_{q\in\mathbb{Q}}\{q\}$. En outre, puisque $\lambda^*(\{q\}) = 0$ nous en déduisons que
$$\lambda^*(\mathbb{Q}) \le \sum_{q\in\mathbb{Q}}\lambda^*(\{q\}) = 0.$$
Ce résultat reste valable pour n'importe quel ensemble dénombrable. [18]
3. Avec les mêmes arguments, nous invitons le lecteur à déterminer la mesure extérieure de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ et $[0,1]\backslash\mathbb{Q}$.

17. à condition que ε soit suffisamment petit de sorte que $b_i - \varepsilon > a_i + \varepsilon$ pour tout $i = 1,\dots,n$.
18. Sachant que $\lambda^*(\mathbb{R}) = +\infty$, ceci montre que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable car s'il l'était il serait de mesure nulle.

Remarque. Dit autrement, le deuxième exemple montre que les ensembles dénombrables sont négligeables pour la mesure de Lebesgue. **Serait-il possible de produire un ensemble négligeable non dénombrable ?**

De manière assez curieuse, le fait de savoir que $\lambda^*(\mathbb{Q}) = 0$ nous assure que, pour tout $\varepsilon > 0$, il est possible de recouvrir $\mathbb{Q}$ par une quantité dénombrable d'intervalles dont la somme des longueurs est plus petite que ε. Cette observation semble beaucoup plus délicate à obtenir de manière directe en construisant explictement le recouvrement utilisé.

9.4.2 Procédé d'extension

Comme nous l'avons annoncé plus tôt, la mesure extérieure seule ne suffira pas à obtenir la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ car elle n'est pas additive.

Proposition 107. *La mesure λ^* n'est pas additive : il existe une famille $(A_j)_{j\in J}$ au plus dénombrable d'ensembles deux à deux disjoints de $\mathbb{R}^n$ telle que*

$$\lambda^*(\cup_{j\in J} A_j) \neq \sum_{j\in J} \lambda^*(A_j)$$

Remarque. La démonstration de ceci repose sur l'utilisation de l'axiome du choix (cf. **??**). Il se trouve que l'utilisation de ceci est nécessaire pour obtenir des ensembles pathologiques permettant de faire échouer cette propriété d'additivité. Ce genre d'arguments (reposant sur l'axiome du choix) permet d'obtenir des paradoxes comme celui de Banach-Tarski : il est possible d'obtenir une partition (finie) de la boule unité de $\mathbb{R}^3$ telle qu'une rotation et translation des éléments de cette partition permet de former deux sphères unités en les assemblant de nouveau.

Il se trouve que le problème soulevé par le résultat précédent provient du fait que les ensembles manipulés ne sont pas *mesurables*. Pour éviter ces cas pathologiques nous allons devoir considérer une classe particulière d'ensembles, plus raisonnables, et il faudra s'assurer que cette nouvelle classe soit suffisamment riche pour contenir la tribu des boréliens $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Définition 9.4.4 (Mesurabilité)**.** *Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. Nous dirons que E est un ensemble* mesurable[19] *si la relation suivante est satisfaite*

$$\lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c)$$

pour n'importe quel ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$. Dans ce cas, nous dirons que la mesure de Lebesgue de E vaut $\lambda(E) = \lambda^*(E)$; lorsque E n'est pas mesurable aucune valeur de $\lambda(E)$ n'est donnée.

Nous noterons $\mathcal{M}$ l'ensemble des ensembles mesurables pour la mesure Lebesgue

Remarque. Une manière de comprendre ceci est de se dire que l'ensemble E est suffisamment régulier pour qu'il soit possible de l'utiliser pour découper n'importe quel ensemble A en deux pièces disjointes, lesquelles pourront toujours être mesurées afin de retrouver la mesure de l'ensemble A. Cela permet d'éviter les phénomènes pathologiques décrit plus tôt (comme le paradoxe de Banach-Tarski).

19. mesurable pour la mesure de Lebesgue λ, ce qui n'est pas le cas de tout les éléments de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$

Voyons quelques exemples d'ensembles mesurables.

Exemple 9.4.2. Pour simplifier, nous dirons *mesurable* au lieu de *Lebesgue mesurable*.

1. $\emptyset$ et $\mathbb{R}^n$ sont mesurables.
2. $H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,;\, x_n > 0\}$ est mesurable.

En fait, il est possible d'obtenir une proposition allant plus loin.

Proposition 108. *$\mathcal{M}$ est une tribu. De plus, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}$.*

Remarque. La démonstration de ceci est disponible sans []. $\mathcal{M}$ est la tribu complétée de la tribu boréliennes $\mathcal{B}(\mathbb{R}^)$. Il parait normal de se demander s'il existe des ensembles mesurables qui ne sont pas des boréliens.

La preuve de ceci montre en particulier que tout ouvert ou fermé élémentaire est mesurable, que tout ensemble A de mesure extérieure nulle (i.e. $\lambda^*(A) = 0$) est mesurable et aussi que si $A \subset B$ sont deux ensembles mesurables alors then $B \backslash A$ est aussi mesurable et $\lambda(B \backslash A) = \lambda(B) - \lambda(A)$.

Comme nous allons le voir, le fait de restreindre λ^* à $\mathcal{M}$ va nous permettre d'obtenir la propriété de σ-additivité manquante. Autrement dit $\lambda := \lambda^*_{|\mathcal{M}}$ est une mesure. En fait, il s'agit précisément de la mesure de Lebesgue, laquelle est alors obtenue comme l'extension de la fonction volume Vol définie par (9.4.1). Ainsi, si $A \in \mathcal{M}$ nous posons

$$\lambda(A) = \lambda^*(A).$$

En particulier, si A est une boite élémentaire alors $\lambda(A) = \mathrm{Vol}(A)$. Pour établir ceci, nous allons, au préalable, supposer avoir avoir démontré (cf. []) le résultat suivant (qui est un résultat clé).

Lemme 109 (Additivité sur une famille finie d'ensembles mesurables)**.** *Soient $(A_j)_{j \in J}$ est une famille* ***finie*** *d'ensembles disjoints et mesurables et $B \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble quelconque alors*

$$\lambda^*(B \cap \cup_{j \in J} A_j) = \sum_{j \in J} \lambda^*(B \cap A_j).$$

De plus, $\lambda^*(\cup_{j \in J} A_j) = \sum_{j \in J} \lambda^*(A_j)$.

Remarque. Ceci permet d'en déduire sans peine (cf. []) que si $A \subset B$ sont deux ensembles mesurables alors $B \backslash A$ est aussi mesurable et $\lambda(A \backslash B) = \lambda(B) - \lambda(A)$.

Voyons à présent comment cette **propriété sur les familles finies** permet d'obtenir le même résultat sur des **familles dénombrables** d'ensembles.

Lemme 110 (Additivité dénombrable)**.** *Soient $(A_j)_{j \leq 1}$ est une famille* ***dénombrable*** *d'ensembles disjoints et mesurables et $B \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble quelconque alors $\cup_{j \leq 1} A_j$ est mesurable et*

$$\lambda^*(\cup_{j \leq 1} A_j) = \sum_{j \leq 1} \lambda^*(A_j).$$

Démonstration. Soit $A = \cup_{j \leq 1} A_j$. Nous devons établir que $A \in \mathcal{M}$. Considérons alors $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble et notons que $\lambda^*(E) \leq \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \backslash A)$ par sous-additivité de λ^*. Il nous suffit donc d'établir l'inégalité inverse.

Puisque $E \cap A = \cup_{j=1}^{\infty} E \cap A_j$ nous avons

$$\lambda^*(E \cap A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^*(E \cap A_j) = \sup_{N \geq 1} \sum_{j=1}^{N} \lambda^*(E \cap A_j).$$

Posons alors $F_N = \cup_{j=1}^{N} A_j$, puisque λ^* est **additive pour les familles finies d'ensembles mesurables** (d'après la proposition 109) nous avons $\lambda^*(E \cap F_N) = \sum_{j=1}^{N} \lambda^*(E \cap A_j)$. Ainsi, nous avons établi que

$$\lambda^*(E \cap A) \leq \sup_{N \geq 1} \lambda^*(E \cap F_N).$$

Voyons maintenant ce qui se passe avec $E \backslash A$. Puisque $F_N \subset A$ nous avons, par monotonie de λ^*,

$$\lambda^*(E \backslash A) \leq \lambda^*(E \backslash F_N) \quad \text{pour tout} \quad N \geq 1.$$

En résumé, ce qui précède nous mène alors à

$$\lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \backslash A) \leq \sup_{N \geq 1} \lambda^*(E \cap F_N) + \lambda^*(E \backslash F_N).$$

Or, puisque $F_N \in \mathcal{M}$ nous avons $\lambda^*(E \cap F_N) + \lambda^*(E \backslash F_N) = \lambda^*(E)$. Autrement dit,

$$\lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \backslash A) \leq \lambda^*(E)$$

qui était l'inégalité recherchée, justifiant ainsi que l'ensemble A est mesurable[20]. L'additivité de λ^* s'obtient alors simplement. Nous savons déjà, par sous-additivité que $\lambda^*(\cup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^*(A_j)$. En outre grâce à la monotonie de λ^* nous avons, pour tout $N \geq 1$,

$$\lambda^*(F_N) \leq \lambda^*(A) \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{N} \lambda^*(A_j) \leq \lambda^*(A).$$

Il ne reste plus qu'à faire tendre $N \to +\infty$ pour conclure. □

Nous avons donc établi que $\mathcal{M}$ est une tribu et que $\lambda^*_{|\mathcal{M}}$ est une mesure. Ce qui termine la construction de la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Remarque. Comme cela a été obtenu pour l'intégrale de Riemann, il est possible dé généraliser la mesure de Lebesgue en imposant que $\lambda([a, b[) = F(b) - F(a)$ où F est une fonction croissante et continue à gauche. La mesure obtenue est appelée *mesure de Lebesgue Stieljes* (cf. [**?**]). Nous ne donnerons pas plus de détails à ce sujet.

9.5 Construction abstraite d'une mesure

Tâchons de prendre du recul sur la construction qui a été faite afin d'obtenir la mesure de Lebesgue afin de déterminer quels en étaient les points essentiels. Soit X un ensemble topologique[21], il parait raisonnable de se demander ce que doit vérifier X afin de mettre en œuvre la construction d'une mesure semblable à celle de Lebesgue sur un tel ensemble, nous reviendrons ce sur ce point ultérieurement et laissons le lecteur méditer sur cette question quelques chapitres.

20. et donc que $\mathcal{M}$ est une tribu
21. Ceci facilite l'analogie avec la section précédente, il est possible de considérer un cadre plus général.

1. Tout d'abord, nous avons considéré une « **version primitive** », notons la λ_0, d'une mesure (dans ce qui précédait il s'agissait de la fonction Vol) laquelle était définie sur une algèbre $\mathcal{A}$ (celle liée aux ensembles élémentaires) ; nous avions aussi établi le fait que cette application d'ensembles était σ **additive sur l'algèbre** $\mathcal{A}$.
2. Ensuite, nous avons introduit la notion de **mesure extérieure** (l'application λ^*) définie pour n'importe quel sous-ensemble A de X à partir d'un recouvrement de A par des éléments de l'algèbre $\mathcal{A}$. Nous avions observé que λ^* coïncidait avec λ_0 en se restreignant à l'algèbre $\mathcal{A}$.
3. La mesure extérieure vérifie plein de propriétés agréables mais celle **d'additivité est manquante**. Il faut alors se **restreindre à une classe d'ensembles favorables** : les ensembles mesurables pour λ^* (i.e. $\mathcal{M}$). Ce procédé permet alors d'obtenir une mesure μ (la mesure de Lebesgue λ) en considérant la restriction de λ^* à $\mathcal{M}$; à nouveau, $\lambda_{|\mathcal{M}}$ coïncide avec λ_0. Nous avons ensuite vérifié que $\mathcal{M}$ contient la tribu des boréliens et la tribu engendrée par l'algèbre $\mathcal{A}$ (dans la section précédente ces deux tribus coïncidaient).

Remarque. Si μ est σ-finie (i.e. l'ensemble X peut s'écrire $X = \cup_{i=1}^{\infty} X_i$ avec $\mu(X_i) < \infty$ pour tout $i \geq 1$, le prolongement obtenu est alors unique (cf. []).

Il est possible (cf. []) d'extirper des démonstrations qui précèdent des arguments qui restent valable dans un cadre très général. Par exemple, lorsque (X, d) est un espace métrique, il est possible d'exhiber une condition [22] portant sur λ_0 afin de s'assurer qu'il existe une tribu $\mathcal{M}$ (contenant $\sigma\big(\sigma(\mathcal{A}) \cup \mathcal{B}(X)\big)$ ainsi qu'une mesure $\lambda : \mathcal{M} \to \mathbb{R}_+$ qui prolonge λ_0. Il s'agit du théorème de Carathéodory.

Nous reviendrons plus tard sur certaines notions laissées de côté : la régularité de λ par rapport aux fermés et aux ouverts de $\mathbb{R}^n$. Nous traiterons ceci en abordant l'intégrale d'un point de vue dual (via l'action d'une mesure sur des ensembles de fonctions) .

9.6 Références historiques

Voir Rudin ? A compléter.

9.7 Exercices

Exercice 9.1. Soit E une partie (fixée) d'un ensemble X, et soit

$$E = \{A \in \mathcal{P}(X) ; : A \subset E\}.$$

Déterminer l'algèbre engendrée par E.

Exercice 9.2. Si $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ sont des tribus sur X, on pose

$$J = \{A_1 \cap A_2 ;\, A_1 \in \mathcal{T}_1,\, A_2 \in \mathcal{T}_2\} \quad \text{et} \quad U = \{A_1 \cup A_2 ;\, A_1 \in \mathcal{T}_1,\, A_2 \in \mathcal{T}_2\}.$$

Démontrer que $\sigma(J) = \sigma(\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2) = \sigma(U)$.

22. Si $\mathcal{A}$ est l'algèbre sur laquelle λ_0 est définie, il suffit de supposer que pour tout $A, B \in \mathcal{A}$ tels que $d(A, B) > 0$ alors $\lambda_0(A \cup B) = \lambda_0(A) + \lambda(B)$.

Exercice 9.3. Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et soit (A_n) une suite d'ensembles mesurables. Pour un entier $m \geq 1$ on note B_m l'ensemble des $x \in X$ qui appartiennent à au moins m des ensembles A_n. Montrer que B_m est mesurable et que

$$\mu(B_m) \leq \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Exercice 9.4. Sur $X = [0, 1]$, décrire l'algèbre (de Boole) $\mathcal{A}$ engendrée par :

1. $]0, \frac{1}{2}[$;
2. $[0, \frac{1}{3}[$ et $]\frac{2}{3}, 1]$;
3. $[0, \frac{1}{4}]$ et $[\frac{2}{3}, 1]$.

Exercice 9.5. Démontrer que $A = \{A \subset \mathbb{N}\,;\, A \,\text{ou}\, A^c \,\text{est fini}\}$ est une algèbre . Est-ce une σ-algèbre ? Mêmes questions si $\mathbb{N}$ est remplacé par $\mathbb{R}$.

Exercice 9.6. Si l'on définit la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ comme la tribu sur $\mathbb{R}$ engendrée par les intervalles $]a, b]$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, démontrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est aussi engendrée par les intervalles $]a, b]$, avec $a, b \in \mathbb{Q}$. Proposer d'autres familles génératrices.

Remarque. Indication : Si $]a, b]$ est un intervalle avec $b \in \mathbb{R}$ alors $]a, b] = \cup_{n \in \mathbb{N}}]a, q_n]$ où q_n, $n \in \mathbb{N}$, est une suite de rationnels qui décroît vers b.

Exercice 9.7.

1. Démontrer que si A et B sont des parties de X, $1_{A \cap B} = 1_A 1_B$, $1_{A^c} = 1 - 1_A$ et $1_{A \Delta B} = |1_A - 1_B|$ où $A \Delta B = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$.
2. Si A_n, $n \in \mathbb{N}$, est une suite de parties de X et $A = \cap_{m \in \mathbb{N}} \cup_{n \geq m} A_n$ établir l'égalité, pour tout $x \in X$, $\limsup_{n \to +\infty} 1_{A_n}(x) = 1_A(x)$.

Exercice 9.8. Si $\mathcal{B}$ est une σ-algèbre sur un ensemble E et si $f : X \to E$ est une fonction, démontrer que $f^{-1}(B)$ est une σ-algèbre sur X. Établir que $f^{-1}(\mathcal{B})$ est la plus petite σ-algèbre sur X rendant $f : X \to (E, \mathcal{B})$ mesurable.

Exercice 9.9. Soit μ une mesure sur un espace mesurable $(X, \mathcal{T})$.

1. Soit $B \in \mathcal{T}$; démontrer que l'application $A \in \mathcal{A} \mapsto \mu(B \cap A)$ est une mesure sur $(X, \mathcal{A})$.
2. Soient $A, B \in \mathcal{T}$ tels que $A \subset B$ et $\mu(A) = \mu(B) < \infty$. Démontrer que $\mu(A \cap C) = \mu(B \cap C)$ pour tout $C \in \mathcal{T}$.

Exercice 9.10. Soit μ_n, $n \in \mathbb{N}$, une suite de mesures sur un espace mesurable $(X, \mathcal{T})$.

1. Pour tout $A \in \mathcal{T}$, poser $\mu(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n(A)$. Démontrer que μ est une mesure sur $(X, \mathcal{T})$.
2. Il est à présent supposé que $\mu_n(X) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit p_n, $n \in \mathbb{N}$, une suite de réels positifs telle que $\sum_{n \in \mathbb{N}} p_n = 1$. Pour tout $A \in \mathcal{T}$, poser $\mu(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n \mu_n(A)$. Vérifier que μ est une mesure de probabilité sur $(X, \mathcal{T})$.

3. Considérer les mesures $\mu_1 = \sum_{n\geq 1} \delta_n$ et $\mu_2 = \sum_{n\geq 1} n\delta_n$. Pour chacune de ces mesures, calculer la mesure des ensembles : pour $N \geq 1$,

$$A_k = \left[k, k+1+\frac{1}{k^2}\right],\ k \geq 1 \quad ; \quad \cup_{k=1}^{N} A_k \quad ; \quad \cup_{k\geq 1} A_k \quad ; \quad \cap_{k=1}^{N} A_k \quad \text{et} \cup_{k\geq 1} A_k.$$

Exercice 9.11. Si A_n, $n \in \mathbb{N}$, est une famille de parties mesurables d'un espace mesuré $(X, \mathcal{T}, \mu)$ telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) < \infty$, montrer que $\mu(A) = 0$ où $A = \cap_{m\in\mathbb{N}} \cup_{n\geq m} A_n$.

Exercice 9.12 (Théorème d'Egorov). . Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et soit $B \in \mathcal{T}$ tel que $\mu(B) < \infty$. Soient f_n, $n \in \mathbb{N}$, et f des fonctions mesurables sur $(X, \mathcal{T}, \mu)$ telles que $f_n(x) \to f(x)$ pour tout $x \in B$.

1. Pour $\epsilon > 0$, poser

$$G_n(\epsilon) = \{x \in B\,;\, |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\},\ n \in \mathbb{N}$$

et $H_m = \cup_{n\geq m} G_n(\epsilon)$ ainsi que $H = \cap_{m\in\mathbb{N}} H_m$. Identifier H et démontrer que $\lim_{n\to+\infty} \mu(H_n) = 0$. En déduire que pour tout $\eta > 0$, il existe $G(\eta, \epsilon) \in \mathcal{T}$ et $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mu\big(G(\eta,\epsilon)\big) \leq \eta$ et $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$ pour tout $x \in B\backslash G(\eta,\epsilon)$ et $n \geq m_0$.

2. Démontrer que pour tout $\eta > 0$, il existe $G(\eta) \in \mathcal{T}$ tel que $\mu\big(G(\eta)\big) \leq \eta$ et f_n, $n \in \mathbb{N}$, converge uniformément vers f sur $B\backslash G(\eta)$.

Remarque. Il est essentiel dans la démonstration que $\mu(B) < \infty$.

Exercice 9.13 (Support d'une mesure). . Soit μ une mesure sur un espace métrique (X, d) muni de la tribu des boréliens $\mathcal{B}(X)$; on appelle support de μ, noté $\mathrm{Supp}(\mu)$, l'ensemble des $x \in X$ pour lesquels $\mu\big(B(x,\delta)\big) > 0$ pour tout $\delta > 0$, où $B(x, \delta)$ est la boule (ouverte) de centre x et de rayon δ. Vérifier que $\mathrm{Supp}(\mu)$ est un fermé de (X, d).

Exercice 9.14. Soit $f : (X, \mathcal{T}) \to (E, \mathcal{B})$ une fonction mesurable, et soit μ une mesure sur $(X, \mathcal{T})$.

1. Démontrer que l'image μ_f de μ par f, définie par $\mu_f(B) = \mu\big(f^{-1}(B)\big)$ avec $B \in \mathcal{B}$, est une mesure sur $(E, \mathcal{B})$.
2. Si $X = \mathbb{R}$ muni de la tribu des boréliens, et f est la fonction partie entière, $f(x) = \lfloor x \rfloor$, $x \in \mathbb{R}$, décrire la mesure image de la mesure de Lebesgue λ par f.

Exercice 9.15. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f = 0$ presque partout (pour la mesure de Lebesgue λ sur $\big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$) ; démontrer que $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Remarque. Indication. Si $f(x) \neq 0$, par exemple $f(x) = a > 0$, il existe par continuité un intervalle ouvert I contenant x sur lequel $f(y) \geq \frac{a}{2}$.

Exercice 9.16 (Ensemble de Cantor). . Poser $E_0 = [0, 1]$. Enlever le tiers central (ouvert) de E_0 pour obtenir $E_1 = I_1^1 \cup I_1^2$. Répéter la même opération pour I_1^1 et I_1^2 pour obtenir $E_2 = I_2^1 \cup I_2^2 \cup I_3^2 \cup I_4^2$, et ainsi de suite.

1. Démontrer que chaque E_n, $n \in \mathbb{N}$, est compact. En déduire que $\mathcal{C} = \cap_{n\in\mathbb{N}} E_n$ est non vide et compact (l'ensemble $\mathcal{C}$ est appelé l'ensemble de Cantor).
2. Montrer que $\lambda(\mathcal{C}) = 0$ (où λ est la mesure de Lebesgue restreinte à $[0, 1]$).
3. Démontrer que $\mathcal{C}$ ne contient aucun intervalle ouvert (et donc que l'intérieur de $\mathcal{C}$ est vide).
4. Montrer que $\mathcal{C}\backslash\{1\}$ comprend les sommes de toutes les séries $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}$ où $x_n \in \{0, 2\}$. En déduire que $\mathcal{C}$ n'est pas dénombrable (en fait, il a la même cardinalité que $[0, 1]$ bien que $\lambda(\mathcal{C}) = 0 \neq 1 = \lambda([0, 1])$).