

Voyage au pays de l'analyse

Kevin Tanguy

3 novembre 2025

Chapitre 10

Théorie de la mesure - calcul intégral

Plus tôt dans ce cours, nous avons montré que le procédé d'intégration de Riemann n'était pas complètement satisfaisant d'un point de vue théorique. Pour palier certains de ces défauts, nous avons choisi d'exposer l'approche d'Henri Lebesgue qui repose sur la théorie de la mesure. La construction proposée va nous permettre d'obtenir une théorie de l'intégration plus souple et plus générale que celle proposée par Riemann.

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié la notion de tribus et nous avons proposé une construction de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. Nous avons également cherché à mettre en évidence les propriétés utilisées qui permettent de généraliser cette construction dans un cadre abstrait. Dans ce qui va suivre, nous allons considérer $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré abstrait (des exemples concrets seront donnés tout au long du chapitre pour illustrer la polyvalence du calcul intégral proposé par Lebesgue) et nous allons voir à présent comment construire le calcul intégral lié à la mesure positive μ .

10.1 Intégration par rapport à une mesure

L'objectif de cette section est de construire la notion d'intégrale par rapport à une mesure donnée. En particulier, lorsque la mesure correspondra à la mesure de Lebesgue, nous obtiendrons une généralisation de l'intégrale de Riemann. Pour mettre en oeuvre cette construction, il faut d'abord s'interroger sur la **classe de fonctions** que nous souhaitons intégrer.

Etant donné que l'espace sous-jacent est muni d'une tribu (sur laquelle la mesure est définie), il semble naturel d'imposer que les fonctions mises en jeu préservent la structure induite par la tribu : il s'agit de la notion de **fonctions mesurables** ; par analogie, dans le cadre des espaces métriques¹ : pour être continues, les fonctions doivent préserver la topologie sous-jacente dont les espaces sont équipés.

1. Et reste vrai dans le contexte plus général des espaces topologiques

10.1.1 Fonctions mesurables

Les fonctions intégrables au sens de Riemann nécessitaient des hypothèses de régularités plutôt contraignantes et il est possible de produire des exemples relativement simples de fonctions qu'il n'était pas possible d'intégrer (la fonction de Dirichlet $x \mapsto 1_{\mathbb{Q}}(x)$ par exemple). De plus, la classe des fonctions intégrables au sens de Riemann n'était pas stable par passage à la limite à la limite (sauf sous des hypothèses assez fortes).

La théorie de la mesure et la notion d'ensembles mesurables vont permettre de considérer une classe bien plus large de fonctions lesquelles pourront alors être intégrées, leur intégrale sera alors finie ou égale à $+\infty$.²

Définition 10.1.1. Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(Y, \mathcal{F})$ deux espaces mesurables et $f : X \rightarrow Y$. Nous dirons que f est mesurable³ si et seulement si $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$ pour tout élément $V \in \mathcal{F}$.

Remarque. Autrement dit, f **préserve la structures des tribus** associées. Lorsque X et Y sont des espaces topologiques et les tribus considérées sont celles des boréliens (i.e. les tribus engendrées par les ouverts), une fonction mesurable est dite alors **borélienne**.

Lorsque la tribu est engendrée par une famille d'ensembles $\mathcal{E}$ (i.e. $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{E})$), il est possible d'obtenir des résultats (cf. [?, ?] permettant de simplifier la vérification qu'une fonction est mesurable. Pour cela il suffit de vérifier que $f^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{T}$. Rappelons à cet effet un résultat énoncé dans le chapitre précédent concernant une manière d'engendrer la tribu des boréliens sur $\mathbb{R}$.

Proposition 10.1. La tribu des boréliens $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ coïncide avec la tribu engendrée⁴ par les intervalles $]a, b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Elle coïncide également avec la tribu engendrée par les intervalles $[a, b]$, ou $[a, b[$ ou $]a, b]$.

Remarque. Rappelons en passant le fait suivant : les éléments engendrant une tribu sont explicites, ce n'est pas le cas d'un ensemble quelconque de la tribu. Par exemple, si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ alors A n'est pas forcément un intervalle.

Un des grands avantages de la notion de mesurabilité est qu'elle est vérifiée par une large classe de fonctions et qu'elle est **préservée par les opérations usuelles de l'analyse**. Voyons plutôt.

- Proposition 10.2.**
1. La composition de deux fonctions mesurables est mesurable.
 2. Soient X_1 et X_2 deux espaces topologiques munis de leur tribu borélienne. Une fonction continue de X_1 dans X_2 est mesurable⁵.
 3. Si f, g sont des fonctions mesurables de $(X, \mathcal{T})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ alors l'application

$$\Phi : x \in X \mapsto (f(x), g(x)) \in \mathbb{R}^2$$

est mesurable de $(X, \mathcal{T})$ dans $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$

2. Notons que la théorie de la mesure permet d'obtenir une valeur de l'intégrale pour n'importe quelle fonction mesurable, ce qui n'était pas le cas pour l'intégrale de Riemann : il n'était pas possible d'attribuer de valeurs à l'intégrale de certaines fonctions bornées. C'est le cas, par exemple de $x \mapsto 1_{\mathbb{Q}}$ qui est bornée mais dont l'intégrale de Riemann associée n'existe pas. Aussi, une fonction intégrable au sens de Riemann avait nécessairement une intégrale finie.

3. par rapport aux tribus $\mathcal{T}$ et $\mathcal{F}$

4. Soit $\mathcal{E}$ un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\Omega)$, la tribu engendrée par $\mathcal{E}$ est l'intersection de toutes les tribus contenant $\mathcal{E}$.

5. ou borélienne ici.

4. L'espace des fonctions mesurables de $(X, \mathcal{T})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est stable pour les opérations suivantes : pour tout $x \in X$ et pour toutes fonctions mesurables $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$
- (a) la multiplication par une constante $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ est mesurable
 - (b) l'addition $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ donne une fonction mesurable,
 - (c) la multiplication $(fg)(x) = f(x) \times g(x)$ donne une fonction mesurable,
 - (d) le maximum $\max(f, g)(x) = \max(f(x), g(x))$ donne une fonction mesurable.
5. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de $(X, \mathcal{T})$ dans un espace métrique (E, d) muni de sa tribu borélienne. Si f_n converge ponctuellement vers f sur X alors la limite f est mesurable.

Remarque. Il est remarquable que la propriété de **mesurabilité soit préservée par passage à la limite simple**. Ceci n'était notamment pas le cas de la propriété d'être Riemann-intégrable (ou, dans un autre contexte, d'être continue), cela nécessitait une hypothèse de convergence uniforme (sur l'intervalle d'étude) pour que cela soit préservé par passage à la limite. Cette propriété laisse déjà pressentir la souplesse de la théorie de l'intégration que nous sommes entrain de construire.

Pour construire l'intégrale de Riemann, nous avons observé qu'il suffisait d'expliquer ce qui se produisait sur des fonctions relativement simples (les fonctions dites *en escaliers*) afin de pouvoir traiter le cas des fonctions plus élaborées (lesquelles étaient approchées par des fonctions en escaliers) au sens de Riemann. Dans le cadre de la théorie de la mesure, nous allons voir qu'il existe une classe analogue de fonctions élémentaires qui permettront ensuite d'approcher n'importe quelle fonction mesurable.

Exemple 10.1.1. Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable et $A \in \mathcal{T}$. La fonction indicatrice de A , notée 1_A , définie par

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

est mesurable de $(X, \mathcal{T})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Plus généralement, si I est un ensemble fini et $(A_i)_{i \in I} \subset \mathcal{T}$ une famille d'ensembles mesurables disjoints alors la fonction $f(x) = \sum_{i \in I} \alpha_i 1_{A_i}(x)$ où $\alpha_i \in \mathbb{R}^d$ pour tout $i \in I$ est mesurable de $(X, \mathcal{T})$ dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. La fonction f est alors dite « **étagée** ».

Remarque. Le fait que les fonctions soient étagées, plutôt qu'en escaliers, réside dans le fait que le procédé d'intégration s'effectue en découpant la graphe de la fonction f suivant des tranches issues de l'axe des ordonnées (plutôt que de l'axe des abscisses comme dans l'intégrale de Riemann).

L'exemple précédent trouve tout son intérêt dans la proposition suivante.

Proposition 10.3. *Toute fonction f mesurable de $(X, \mathcal{T})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est limite simple de fonctions étagées. Si f est positive la suite des fonctions étagées (ayant pour limite simple f) est également croissante.*

Démonstration. L'idée est d'utiliser une décomposition dyadique : soit $n \in \mathbb{N}$ et considérons les ensembles

$$A_{n,i} = \left\{ x \in X \quad ; \quad \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n} \right\} \quad \text{avec } i \in \{1, \dots, n2^n\}$$

ainsi que $B_n = \{x \in X \quad ; \quad f(x) \geq n\}$. Alors, nous avons l'identité suivante : pour tout $x \in X$,

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} 1_{A_{n,i}}(x) + n 1_{B_n}(x).$$

Il convient ensuite d'observer⁶ que

$$A_{n,i} = A_{n+1,2i} \cup A_{n+1,2i+1} \quad \text{ainsi que} \quad B_n = B_{n+1} \cup_{i=n2^{n+1}+1}^{(n+1)2^{n+1}} A_{n+1,i}$$

pour établir que $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$.

Concernant la convergence de (f_n) , il suffit de constater que si $f(x) < +\infty$ et $n > f(x)$ alors

$$f(x) - f_n(x) \leq \frac{1}{2^n}$$

ce qui induit alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$: la convergence est donc uniforme sur X . Au contraire, si $f(x) = +\infty$ alors $f_n(x) = n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$. $\square$

Remarque. Il est intéressant de se demander s'il est possible d'approcher des fonctions mesurables par des fonctions plus régulières (continues à support compact par exemple) et de chercher à comprendre quelles relations il y a entre ces différentes classes de fonctions. Nous aborderons le théorème de Lusin dans le chapitre suivant ; celui-ci dit en substance qu'en dehors d'un ensemble de mesure presque nulle, une fonction mesurable peut-être considérée comme une fonction à support compact.

Maintenant que nous savons quelles sont les fonctions qui pourront être intégrées, il est désormais temps de construire l'intégrale sur un espace mesuré $(X, \mathcal{T}, \mu)$.

10.1.2 Intégrale de fonctions positives

L'idée est de débiter par expliquer comme calculer l'intégrale d'une fonction indicatrice puis celle d'une fonction étagée pour ensuite de traiter le cas des fonctions mesurables et positives (via l'utilisation d'un supremum). Finalement, il s'agit d'un procédé similaire à celui qui a été déployé dans le cadre de la construction de l'intégrale de Riemann.

Définition 10.1.2. Si $A \in \mathcal{T}$ alors la fonction $f = 1_A$ est mesurable et son intégrale par rapport à μ est définie par

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \mu(A).$$

Plus généralement, si $B \in \mathcal{A}$, l'intégrale de $f = 1_A$ sur B par rapport à μ est définie par

$$\int_B f d\mu = \mu(A \cap B).$$

Comme nous avons déjà présenté deux exemples de mesures, il est intéressant de voir ce qui fournit cette définition dans ces cas particuliers.

Exemple 10.1.2. 1. Si $(X, \mathcal{T}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $\mu = \lambda$ la mesure de Lebesgue et $A =]a, b]$ alors

$$\int_{\mathbb{R}} 1_A d\lambda = \lambda(]a, b]) = b - a.$$

6. Un dessin met facilement en évidence cette observation qui découle de la partition dyadique.

2. $(X, \mathcal{T}) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ et μ la mesure de comptage alors

$$\int_{\mathbb{N}} 1_A d\mu = \text{Card}(A).$$

3. Si $(X, \mathcal{T}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $\mu = \delta_0$ la mesure de Dirac en 0 et $A =]a, b[$ alors

$$\int_{\mathbb{R}} 1_A d\delta_0 = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque. L'exemple précédent illustre à nouveau la souplesse de la théorie de la mesure qui permet de traiter des objets a priori très différents. Finalement, cela revient à considérer la théorie de l'intégration comme étant, dans un sens, équivalente à la théorie des séries numériques⁷.

Savoir intégrer des fonctions indicatrices permet, par linéarité⁸, d'intégrer des fonctions étagées.

Définition 10.1.3. Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction étagée positive,

$$\text{i.e. } f(x) = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}(x) \quad \text{où } n \in \mathbb{N}_*$$

avec, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $a_i > 0$ et A_i des ensembles mesurables disjoints. L'intégrale de f sur $B \in \mathcal{T}$ est définie comme suit

$$\int_B f d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i \cap B) \quad \text{pour tout } B \in \mathcal{T}.$$

Remarque. Il est important de vérifier que $\int_B f d\mu$ ne dépend pas du choix de la décomposition de f en somme d'indicatrices⁹ (cf. []). Le lecteur peut également vérifier que la définition précédente permet d'établir la linéarité de l'intégrale sur l'espace des fonctions **étagées positives**. Autrement dit, si f, g sont des fonctions étagées positives et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ alors

$$\int_B \alpha f + \beta g d\mu = \alpha \int_B f d\mu + \beta \int_B g d\mu.$$

Nous noterons aussi en passant que les valeurs prises par f sur un ensemble μ -négligeable (i.e. de mesure nulle pour μ) n'ont aucun impact sur la valeur de l'intégrale associée. En effet, si f est une fonction étagée positive et C un ensemble mesurable tel que $\mu(C) = 0$ alors $\int_C f d\mu = 0$ car, par définition de l'intégrale d'une fonction étagée positive, nous avons

$$0 \leq \int_C f d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i \cap C) \leq \sum_{i=1}^n a_i \mu(C) = 0.$$

Puisque nous avons vu que n'importe quelle fonction mesurable pouvait être approchée par des fonctions étagées (cf. proposition 10.3), la définition précédente va nous permettre de définir l'intégrale de n'importe quelle fonction **mesurables positive**.

7. Ceci était déjà suggéré dans l'intégrale de Riemann-Stieltjes

8. Cette propriété étant un pré-requis naturel de la notion d'intégrale

9. i.e. si f s'écrit $f(x) = \sum_{k=1}^m 1_{A'_k}(x)$ avec $m \in \mathbb{N}$ et A'_k des ensembles mesurables, la valeur de $\int_B f d\mu$ reste inchangée.

Définition 10.1.4. Soit f une **fonction mesurable positive** définie sur $(X, \mathcal{T}, \mu)$. Pour tout $B \in \mathcal{T}$, son intégrale est définie de la manière suivante :

$$\int_B f d\mu = \sup \left\{ \int_B g d\mu \quad ; \quad g \text{ étagée positive, } g \leq f \right\}$$

Remarque. L'utilisation du supremum fait resurgir une idée employée¹⁰ dans la construction de l'intégrale de Riemann. Notons toutefois une différence notoire : ici, l'intégrale peut valoir $+\infty$.

Cette définition et l'utilisation du supremum a des conséquences directes sur les propriétés satisfaites par l'intégrale.

Proposition 10.4. Soient f, g des fonctions mesurables et positives sur $(X, \mathcal{T}, \mu)$ ainsi que $B \in \mathcal{T}$.

1. (monotonie) Si $0 \leq f \leq g$ alors $0 \leq \int_B f d\mu \leq \int_B g d\mu$.
2. Si $A \subset B$ alors $\int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu$.
3. Si $c \geq 0$ alors $\int_B c f d\mu = c \int_B f d\mu$.
4. $\int_B (f + g) d\mu = \int_B f d\mu + \int_B g d\mu$.
5. Si $f = 0$ alors $\int_B f d\mu = 0$.
6. Si $f \geq 0$ et $\int_B f d\mu = 0$ alors $1_B f = 0 \mu - p.p.$.

Remarque. Cette proposition reste vraie si les hypothèses portant sur f et g ont lieu seulement μ presque partout.

Démonstration. La plupart des démonstrations sont évidentes¹¹ en établissant, dans un premier temps, les assertions pour des fonctions étagées et positives puis, dans un second temps, en passant au supremum.

Traisons certaines d'entre elles. Si $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$ avec $a_i > 0$ et $A_i \in \mathcal{T}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Nous avons

$$\int_B c f d\mu = \sum_{i=1}^n c a_i \mu(A_i \cap B) = c \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i \cap B) = c \int_B f d\mu$$

Il suffit ensuite de prendre le supremum sur les fonctions étagées positives pour conclure. En effet, soit g une fonction étagée positive telle que $g \leq f \iff cg \leq cf$. Dans ce cas nous avons

$$\int_B c f d\mu = \sup \int_C c g d\mu = c \sup \int_B g d\mu = c \int_B f d\mu \quad ;$$

le supremum étant pris sur les fonctions étagées positives $g \leq f$.

Traisons à présent la dernière assertion : quitte à remplacer f par $1_B f$, il suffit de traiter le cas $B = X$. L'idée est de considérer la **suite croissante** d'ensembles

$$A_n = \left\{ x \in X \quad ; \quad f(x) > \frac{1}{n} \right\} \quad \text{avec } n \geq 1.$$

10. Celle impliquant les sommes de Darboux.

11. La linéarité de l'intégrale est plus délicate est sa démonstration est repoussée à plus tard car elle fait intervenir le théorème de convergence monotone.

Il convient ensuite d'observer que, pour tout $n \geq 1$, $1_{A_n} \leq nf$. D'où, via la monotonie de l'intégrale

$$\mu(A_n) \leq n \int f d\mu = 0$$

par hypothèse. Ensuite, en sommant sur n , nous en déduisons que $\mu(\cup_{n \geq 1} A_n) = 0$ car

$$\mu(\cup_{n \geq 1} A_n) = \sum_{n \geq 1} \mu(A_n) = 0$$

où la première égalité est obtenue par convergence monotone¹². En outre, observons que $\{f > 0\} = \cup_{n \geq 1} A_n$: nous venons donc d'établir que l'ensemble $\{x \in X \ ; \ f(x) > 0\}$ est de μ -mesure nulle. Puisque $f \geq 0$ nous en déduisons que $f = 0 \mu - p.p.$. $\square$

La démonstration de la dernière assertion met en évidence **l'intérêt du théorème de convergence monotone** (cf. proposition 9.1). Il semble alors intéressant de voir comment exprimer ce résultat, cette fois-ci en terme de fonctions plutôt que pour des ensembles. Ceci nous permettra ensuite de démontrer la linéarité de l'intégrale (pour des fonctions mesurables et positives) dont la démonstration n'était pas évidente a priori.

Théorème 10.5 (Convergence monotone de Beppo-Levi). *Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite croissante (i.e. $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ pour μ presque tout $x \in X$) de fonctions mesurables et positives. Nous supposons que la suite converge ponctuellement, μ -presque partout, vers une limite f : pour μ presque tout $x \in X$,*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$$

alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$.

Remarque. Ce théorème énonce **des conditions simples permettant d'échanger une limite avec le symbole intégral**. D'une certaine manière, ce théorème peut s'apparenter à celui bien connu des suites (cf. théorème 2.3) : une suite croissante (positive)¹³ converge dans $[0; +\infty]$.

Démonstration. Au préalable, il convient d'établir le résultat suivant.

Lemme 10.6. *Soit u une fonction étagée positive, dans ce cas la fonction d'ensemble définie sur la tribu $\mathcal{T}$ par*

$$\nu : A \mapsto \int_A u d\mu$$

est aussi une mesure.

Démonstration. Puisque u est une fonction étagée positive, nous avons la décomposition suivante $u = \sum_{i=1}^N a_i 1_{A_i}$ avec, pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, $a_i > 0$ et $A_i \in \mathcal{T}$ des ensembles mesurables deux à deux disjoints. Dans ce cas, pour tout $A \in \mathcal{T}$, nous avons

$$\nu(A) = \sum_{i=1}^N a_i \mu(A_i \cap A).$$

12. Rappelons que $(A_n)_{n \geq 1}$ est une suite croissante d'ensembles ainsi que la proposition 9.1

13. Ici, il s'agit de la suite (u_n) définie par $u_n = \int_X f_n d\mu$.

Autrement dit, ν est une combinaison linéaire (avec des coefficients positifs) de mesures : il s'agit donc également d'une mesure ¹⁴. $\square$

Remarque. En particulier, puisque μ est une mesure, d'après le théorème de convergence monotone 9.1, nous avons $\lim_{n \rightarrow +\infty} (E_n) = \mu(\cup_{n \geq 1} E_n)$ pour toute suite croissante d'ensembles $(E_n)_{n \geq 1}$.

Procédons à présent à la démonstration du théorème de Beppo-Levi. Puisque $(f_n)_{n \geq 1}$ est une suite croissante, par monotonie de l'intégrale nous avons $\int f_n d\mu \leq \int f d\mu$, d'où

$$a = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n d\mu \leq \int f d\mu.$$

Nous devons donc établir l'inégalité inverse. A cet effet, soit u une fonction étagée positive telle que $0 \leq u \leq f$. Pour conclure la démonstration, il suffit de montrer que

$$\int u d\mu \leq a$$

pour ensuite prendre le supremum sur les fonctions étagées positives, ce qui donnera le résultat. Soit $0 < c < 1$ et introduisons les ensembles

$$E_n = \{x \in X \ ; \ f_n(x) > cu(x)\} \quad \text{avec } n \geq 1.$$

dans l'optique d'utiliser le résultat de convergence monotone pour les ensembles (cf. proposition 9.1). Observons ensuite qu'il s'agit d'ensembles mesurables (puisque les fonctions impliquées le sont) et $E_n \subset E_{n+1}$ puisque la suite (f_n) est croissante. De plus $\cup_{n \geq 1} E_n = X$, ainsi

$$\int_X f_n d\mu \geq \int_{E_n} f_n d\mu \geq c \int_{E_n} u d\mu$$

par définition de E_n . Ceci mène alors à

$$a = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu \geq c \times \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{E_n} u d\mu.$$

Or, le Lemme 10.1.2 nous assure que $A \mapsto \int_A u d\mu$ est une mesure. Ainsi, le membre de droite de l'inégalité précédente peut s'écrire $c \times \lim_{n \rightarrow +\infty} \nu(E_n)$ et nous pouvons utiliser la proposition 9.1 qui nous assure que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \nu(E_n) = \nu(\cup_{n \geq 1} E_n) = \nu(X) = \int_X u d\mu.$$

Nous avons alors établi que $a \geq c \int_X u d\mu$, il suffit ensuite de faire $c \rightarrow 1$ pour achever la démonstration et de prendre ensuite le supremum sur les fonctions étagées positives $u \leq f$ afin de conclure. $\square$

Remarque. Pour être parfaitement rigoureux, il aurait peut-être été préférable de travailler avec les limites supérieures et inférieures

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int f_n d\mu \quad \text{et} \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int f_n d\mu,$$

nous laissons au lecteur vérifier que cela n'a pas d'incidence dans la démonstration.

14. Nous laissons le lecteur vérifier cela en exercice.

Le théorème précédent a des conséquences intéressantes vis-à-vis de **l'interversion entre somme et intégrale**.

Proposition 10.7. *Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables **positives**. Si $f = \sum_{n \geq 1} f_n$ alors*

$$\sum_{n \geq 1} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Remarque. Il sera intéressant, lorsque cela sera traité dans le cours, d'observer ce résultat dans le contexte des intégrales sur des espaces produits.

Démonstration. Soit $g_n = \sum_{k=1}^n f_k$ est une suite croissante de fonctions mesurables et positives. De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n = \sum_{n \geq 1} f_n$. Le théorème de convergence monotone 10.5 nous assure le résultat désiré. $\square$

Comm annoncé auparavant, une autre **conséquence du théorème de convergence monotone 10.5** est qu'il permet de **démontrer la linéarité de l'intégrale** : si f et g sont des fonctions mesurables et positives alors

$$\int_X f + g d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.$$

Pour cela, il suffit d'observer que f et g peuvent être approchées par des suites croissantes de fonctions étagées $(f_n)_n$ et $(g_n)_n$. Puisque les fonctions sont étagées, la linéarité de l'intégrale est satisfaite¹⁵ :

$$\int_X f_n + g_n d\mu = \int_X f_n d\mu + \int_X g_n d\mu$$

il suffit ensuite de passer à la limite sous l'intégrale grâce au théorème de Beppo-Levi 10.5.

Une question intéressante est de savoir ce qu'il est possible d'obtenir, en terme d'interversion de limites et d'intégrales, sur une suite de fonctions mesurables et positives $(f_n)_{n \geq 1}$ sans supposer que cette suite soit croissante et converge ponctuellement. L'exemple suivant montre qu'il ne sera pas possible, en général, de procéder à l'interversion.

Exemple 10.1.3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et considérons $f_n(x) = 1_{[n; n+1[}$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ et $\int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Il est toutefois possible d'obtenir une inégalité, c'est l'objet du Lemme suivant.

Lemme 10.8 (de Fatou). *Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions mesurables **positives**. Alors,*

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Remarque. Autrement dit, il n'est pas possible que l'intégrale de la limite soit supérieure à la limite des intégrales.

15. Ce point n'est pas très compliqué mais peu agréable à écrire puisque les fonctions f et g mettent en jeu deux familles d'ensembles mesurables et disjoints $(A_i)_{i=1, \dots, N}$ et $(E_j)_{j=1, \dots, M}$ (avec $M, N \in \mathbb{N}$) lesquelles doivent être simultanément employées pour exprimer f et g ; le lecteur trouvera une démonstration de ceci dans $\square$.

Démonstration. Posons $g_n = \inf_{k \geq n} f_k$. Il s'agit d'une suite croissante de fonctions mesurables et positives dont la limite est $\liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n$. De plus, $g_n \leq f_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'où

$$\int_X g_n d\mu \leq \int_X f_n d\mu$$

il suffit ensuite d'utiliser le théorème de Beppo-Levi 10.5 pour conclure. $\square$

Exemple 10.1.4. Il se trouve que l'inégalité donnée par le Lemme de Fatou 10.8 peut être stricte. Pour visualiser ceci, considérons la suite de fonction (f_n) définie par $f_n(x) = 1_{x>0} n e^{-nx}$. Dans ce cas, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ et $\int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = 1$ d'où l'affirmation.

Voyons un autre exemple dans lequel le Lemme de Fatou 10.8 donne des informations sur l'intégrale d'une limite de fonction alors que le théorème de convergence monotone ne s'applique pas.

Exemple 10.1.5. Considérons la suite de fonctions mesurables et positives (f_n) définies sur $[0, 1]$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} < x \leq 1. \end{cases}$$

Observons que cette suite converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, 1]$ et qu'il ne s'agit pas d'une suite monotone (i.e. le théorème de convergence monotone ne s'applique pas). Que dire de $\int_{[0,1]} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx$? Le Lemme de Fatou 10.8 nous assure que :

$$\int_{[0,1]} \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n dx = 0 \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0,1]} f_n dx = 1.$$

10.1.3 Intégrale de fonctions quelconques et théorème de convergence dominée

Maintenant que nous avons construit l'intégrale des fonctions mesurables et positives, il semble naturel d'étendre ceci à des fonctions mesurables f de signe quelconque. Pour cela, étant donnée une fonction mesurable $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, nous allons devoir utiliser la notion de partie positive f^+ et de partie négative f^- défini par

$$f^+ = \max(f, 0) \quad \text{et} \quad f^- = -\min(f, 0).$$

Ainsi, nous obtenons les décompositions

$$f = f^+ - f^- \quad \text{et} \quad |f| = f^+ + f^-.$$

Tout ceci mène à la définition suivante.

Définition 10.1.5. Soient $f = f^+ - f^-$ une fonction mesurable et $B \in \mathcal{T}$. Nous dirons que f est μ -intégrable sur B si $\int_B |f| d\mu < +\infty$. Dans ce cas, l'intégrale de f sera donnée par

$$\int_B f d\mu = \int_B f^+ d\mu - \int_B f^- d\mu$$

L'ensemble des fonctions intégrables sur B par rapport à la mesure μ sera noté $\mathcal{L}_\mu^1(B)$.

Remarque. L'inégalité suivante est toujours satisfaite

$$\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu.$$

Celle-ci s'obtient aisément puisque $f = f^+ - f^- \leq f^+ + f^- = |f|$.

Fort heureusement les propriétés de l'intégrale (linéarité, monotonie ...), établies (cf. proposition 10.4) pour des fonctions mesurables et positives se transmettent sans peine aux fonctions de signe quelconque. Voyons cela sur des exemples.

Exemple 10.1.6. Soient f et g des fonctions intégrables par rapport à μ .

1. Montrons que si $f \leq g$ alors $\int f d\mu \leq \int g d\mu$. Décomposons ces deux fonctions à l'aide de leurs parties positives et négatives :

$$f = f^+ - f^- \quad \text{et} \quad g = g^+ - g^-.$$

Nous avons alors $f \leq g \iff f^+ + g^- \leq g^+ + f^-$. D'où, puisqu'il s'agit de sommes de fonctions mesurables positives, nous en déduisons que

$$\begin{aligned} & \int f^+ + g^- d\mu \leq \int g^+ + f^- d\mu \\ \iff & \int f^+ d\mu + \int g^- d\mu \leq \int g^+ d\mu + \int f^- d\mu \\ \iff & \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \leq \int g^+ d\mu - \int g^- d\mu \\ \iff & \int f d\mu \leq \int g d\mu \end{aligned}$$

par définition de l'intégrale d'une fonction intégrable.

2. Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, si nous voulons établir que

$$\int (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int f d\mu + \beta \int g d\mu.$$

il convient à nouveau de séparer partie positive et partie négative (qui sont des fonctions positives) et distinguer les cas selon le signe de α et β afin de reprendre ce qui a été fait dans le cas des fonctions mesurables et positives.

Remarque. Comme le montre ces deux exemples, l'essentiel est d'avoir établi au préalable le résultat pour les fonctions mesurables positives (en le faisant pour les fonctions étagées positives, puis en utilisant le théorème de convergence monotone 10.5 de Beppo-Levi). Par la suite, de nombreuses démonstrations utiliseront ce raisonnement.

Il est temps de présenter un des théorèmes essentiels du calcul intégral. Celui-ci propose des conditions très commodes permettant d'échanger limite et intégrale. Ce résultat sera à comparer avec le théorème 7.16 qui nécessitait une convergence uniforme sur l'intervalle associé.

Théorème 10.9 (Convergence dominée de Lebesgue). *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables. Nous supposons que*

- f_n converge simplement vers f , μ -presque partout.
- il existe une fonction h μ -intégrable telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|f_n| \leq h \quad \text{pour } \mu \text{ presque tout } x \in X.$$

alors f est intégrable et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$. En particulier,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Démonstration. L'idée pour aboutir à cette conclusion est d'utiliser le Lemme de Fatou 10.8. A cet effet, posons

$$h_n = 2h - |f_n - f|.$$

Cette quantité est positive d'après l'hypothèse de domination par h et notons que la suite (h_n) converge simplement, μ -presque partout, vers $2h$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Le Lemme de Fatou 10.8 nous assure alors que

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow +\infty} h_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X h_n d\mu.$$

Autrement dit, ceci signifie que

$$2 \int_X h d\mu \leq 2 \int_X h d\mu - \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_X |f_n - f| d\mu.$$

D'où, $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_X |f_n - f| d\mu \leq 0$. En conséquence, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$. En outre, nous avons aussi, via l'inégalité triangulaire,

$$\left| \int_X f_n d\mu - \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f_n - f| d\mu$$

ce qui fournit la convergence des intégrales en passant à la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$. $\square$

Remarque. Si jamais nous souhaitions seulement obtenir le fait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$. Il suffit d'utiliser les observations suivantes. D'une part, $f_n + h \geq 0$, d'où, d'après le Lemme de Fatou 10.8, nous avons

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n + h d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n + h d\mu \iff \int_X f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu.$$

D'autre part, $h - f_n \geq 0$ alors, toujours grâce au Lemme de Fatou, nous avons

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow +\infty} h - f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X h - f_n d\mu \iff \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu$$

d'où le résultat.

D'une certaine manière, le théorème de convergence dominée peut s'apparenter au fait qu'une suite (numérique) monotone et bornée (ici via l'hypothèse de domination) converge.

Voyons ce qu'il est possible d'obtenir via le théorème de convergence dominée.

10.1.4 Régularité des intégrales à paramètres

Nous avons observé, via le théorème Fondamental de l'analyse 7.11, que la notion d'intégrale permettait de construire une nouvelle fonction continue à partir d'une fonction continue f donnée en posant

$$F(t) = \int_0^t f(x)dx \quad \text{pour tout } t \in I$$

avec $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Ayant maintenant à disposition la théorie de la mesure voyons ce qu'il est possible de faire dans cette direction. Dans ce qui suit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ désignera un espace mesuré et $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, nous considérerons ensuite une fonction $f : X \times T \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$(x, t) \mapsto f(x, t).$$

Le paramètre en question étant la variable t , nous considérons la fonction f comme une famille de fonctions $(f_t)_{t \in I}$, où, pour tout $t \in I$, $f_t(x) = f(x, t)$ pour tout $x \in X$. L'objet qui va alors focaliser notre attention est la fonction

$$F(t) = \int_X f(x, t) d\mu(x) \quad \text{avec } t \in I.$$

En particulier, nous voulons savoir comment se comporte la dépendance en t vis-à-vis de l'intégrale. Par exemple, si $t \mapsto f(x, t)$ est continue sur I pour presque tout $x \in X$, est-ce encore le cas pour la fonction $t \mapsto F(t)$?

Nous allons mettre en évidence que, sous des hypothèses de domination, la régularité de f (en la variable t) se transmet à la fonction F ; l'outil clé sera le théorème convergence dominée 10.9.

Théorème 10.10 (Continuité d'une intégrale à paramètre). *Supposons que :*

1. Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est mesurable ;
2. μ -presque tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue ;
3. pour tout compact $K \subset I$, il existe une fonction h_K positive et μ -intégrable telle que, pour tout $t \in K$,

$$|f(x, t)| \leq h_K(x) \quad \text{pour } \mu - \text{presque tout } x \in X.$$

Alors $t \mapsto \int_X f_t d\mu$ est continue sur I .

Démonstration. La démonstration repose sur la caractérisation séquentielle de la continuité : i.e. si $t \in I$ est fixé et $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = t$, nous devons montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} F(t_n) = F(t)$. Pour cela, nous utiliserons le théorème de convergence dominée.

Tout d'abord, puisque $t \mapsto f(x, t)$ est continue sur I , nous avons $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x, t_n) = f(x, t)$ pour μ presque tout $x \in X$. Soit K un voisinage compact de t , il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$ alors $t_n \in K$ et dans ce cas nous avons

$$|f(x, t_n)| \leq h_K \quad \mu \text{ presque tout } x \in X.$$

Le théorème de convergence dominée 10.9, nous assure donc que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F(t_n) = \int_X f(x, t) d\mu(x) = F(t)$$

d'où le résultat. □

Exemple 10.1.7. Soit g une fonction intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue. Dans ce cas, la fonction

$$F : t \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{itx} g(x) dx$$

est continue sur $\mathbb{R}$. Pour démontrer cela, il suffit de poser $f(x, t) = e^{itx} g(x)$ et d'observer que $|f(x, t)| \leq g(x)$ pour tout $t, x \in \mathbb{R}$.

Remarque. La fonction F correspond à la transformée de Fourier de la fonction g . Il est usuel de noter F par $\hat{g}$. Nous verrons ultérieurement diverses applications, en probabilité ou dans la résolution d'équations différentielles, de la transformée de Fourier.

Un résultat similaire existe lorsque la fonction $t \mapsto f_t$ est dérivable μ -presque tout $x \in X$; cette dérivée sera notée $\partial_t f_t$.

Théorème 10.11 (Dérivabilité d'une intégrale à paramètre). *Supposons que :*

1. Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est mesurable ;
2. μ -presque tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est dérivable ;
3. Pour tout compact $K \subset I$, il existe une fonction h_K positive μ -intégrable telle que, pour tout $t \in K$,

$$|\partial_t f_t(x)| \leq h(x) \quad \text{pour } \mu - \text{presque tout } x \in X.$$

Alors $t \mapsto \int_X f_t d\mu$ est dérivable sur I et $F'(t) = \int_X \partial_t f_t(x) d\mu(x)$.

Démonstration. Fixons $t \in I$ et considérons (t_n) une suite telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = t$. Il convient alors d'étudier la limite, lorsque $n \rightarrow +\infty$, du quotient

$$\frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = \int_X \phi_n(x) d\mu(x) \quad (10.1.1)$$

où $\phi_n(x) = \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t}$ pour μ -presque tout $x \in \Omega$. Observons alors que, pour μ -presque tout $x \in X$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n(x) = \partial_t f(x)$ ¹⁶ Ainsi, si nous sommes en mesure d'appliquer le théorème de convergence dominée, nous constatons que dans (10.1.1) le membre de droite converge vers $\int_X \partial_t f_t(x) d\mu(x)$ tandis que le membre de gauche tend vers $F'(t)$; nous aurons ainsi établi le résultat voulu.

Il ne nous reste plus qu'à démontrer que la fonction $\phi_n(x)$ est bien dominée, indépendamment de t , pour tout $n \in \mathbb{N}$, par une fonction μ -intégrable. Soit $0 < \delta < 1$ et posons $K = [t - \delta, t + \delta]$, il existe un entier N tel que si $n \geq N$ alors $t_n \in K$. En conséquence, si $n \geq N$, le théorème des accroissements finis 5.3 nous assure que pour μ -presque tout x ,

$$\left| \frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} \right| \leq \sup_{t \in K} |\partial_t f_t(x)| \leq h_K(x).$$

D'où la conclusion. □

Remarque. En comparaison du théorème 10.10, il est à noter que la condition de domination porte sur $\partial_t f_t$ plutôt que sur la fonction f_t .

16. En particulier, l'application $x \mapsto \partial_t f_t(x)$ est mesurable.

Dans le prochain exemple, nous allons voir l'intérêt d'avoir une hypothèse de domination locale (le compact K inclus dans l'intervalle I) plutôt qu'une domination globale sur tout I .

Exemple 10.1.8. Soit $t > 0$, la fonction Gamma d'Euler est définie par

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx.$$

Nous allons montrer que cette fonction est dérivable sur $]0; +\infty[$. Posons $f(x, t) = x^{t-1} e^{-x}$ pour tout $x, t > 0$. L'application $x \mapsto f(x, t)$ est mesurable (pour tout $t > 0$) et $t \mapsto f(x, t)$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ (pour presque tout $x > 0$) et $\partial_t f(x, t) = \ln(x) x^{t-1} e^{-x}$. La fonction satisfaisant l'hypothèse de domination s'obtient en distinguant suivant les valeurs de t . Dans tout les cas, nous choisissons $K = [a, b]$ un compact contenant t .

- si $t \in [a, b] \subset [0; 1]$, nous avons $|\partial_t f(x, t)| \leq |\ln x| x^{a-1}$ et $h_k : x \mapsto |\ln x| x^{a-1}$ est bien intégrable¹⁷ sur $]0; 1]$.
- si $t \in [a, b] \subset [1; +\infty[$, nous avons $|\partial_t f(x, t)| \leq |\ln x| x^{b-1} e^{-x}$ et $h_k : x \mapsto |\ln x| x^{b-1} e^{-x}$ est bien intégrable sur $[1; +\infty[$.

Le théorème de dérivation sous l'intégrale 10.11 nous assure alors que $t \mapsto \Gamma(t)$ est dérivable sur $]0; +\infty[$.

Remarque. En fait, il est possible de montrer (en répétant l'argument précédent) que $\Gamma \in C^\infty(]0; +\infty[)$. La fonction Γ permet de « généraliser » la notion de factorielle aux réels positifs. Ceci s'observe via la relation

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad \text{pour tout } x > 0.$$

et $\Gamma(1) = 1$. En particulier, si $n \in \mathbb{N}_*$, $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = (n-1)!$.

10.1.5 Intégrales et convexité

Voici un dernier résultat (ne reposant pas sur le théorème de convergence dominée) dont les applications peuvent-être très utile en pratique. Les mesures concernées sont celles de probabilités (i.e. $\mu(X) = 1$).

Théorème 10.12 (Inégalité de Jensen). *Soit μ une mesure de probabilité¹⁸ et $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Si f est une fonction borélienne telle que f et $\phi(f)$ soient intégrables par rapport à μ alors*

$$\phi\left(\int_X f d\mu\right) \leq \int_X \phi(f) d\mu. \quad (10.1.2)$$

Remarque. Les fonctions $\phi(x) = t^p$ avec $p > 1$, $\phi(x) = |x|$ ou $\phi(x) = e^x$ sont souvent utilisées.

Démonstration. Puisque la fonction ϕ est convexe, son graphe se situe toujours au dessus de ses tangentes. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, il existe β ¹⁹ tel que

$$\phi(x) \geq \phi(t) + \beta(x - t) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

17. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier ceci.

18. i.e. $\mu(X) = 1$

19. Choisir par exemple la dérivée à gauche ou à droite de ϕ en t .

Le choix de $x = f(z)$ et $t = \int_X f d\mu$ entraîne donc

$$\phi(f) \geq \phi\left(\int_X f d\mu\right) + \beta\left(f(z) - \int_X f d\mu\right).$$

Il ne reste plus qu'à intégrer cette inégalité par rapport à μ (le fait que μ soit une mesure de probabilité est alors essentiel ici) pour conclure. $\square$

Voici un exemple d'application de Jensen dans un contexte probabiliste.

Exemple 10.1.9. 1. Si $\phi(t) = |t|$, cela permet de retrouver l'inégalité triangulaire :

$$\left| \int_X d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu.$$

2. Soit Y une variable aléatoire. Notons μ la loi de Y et rappelons que, pour toute fonction borélienne positive, nous avons

$$\mathbb{E}[f(Y)] = \int_{\Omega} f(\omega) d\mu(\omega).$$

Si Y est de carré intégrable alors Y est aussi intégrable. En effet, en choisissant $\phi(t) = t^2$, nous obtenons

$$\mathbb{E}[Y]^2 \leq \mathbb{E}[Y^2] < +\infty.$$

Remarque. Nous explorerons plus en détails les liens entre la théorie de la mesure et la théorie des probabilités dans un chapitre ultérieur.

Il est temps de traiter le calcul intégral sur des espaces produits.

10.2 Intégration sur des espaces produits

Nous avons vu comment construire l'intégrale par rapport à une mesure, pour autant il peut-être intéressant de voir ce qui se produit si la mesure en question est une mesure produit. Autrement dit, si $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$ (où μ_1 et μ_2 sont des mesures σ -finies²⁰) définie sur la tribu produit $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ associée à l'espace produit $X = X_1 \times X_2$. Si $f : X_1 \times X_2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ est mesurable, la construction de l'intégrale décrite dans les sections précédentes donne sens²¹ à

$$\int_{X_1 \times X_2} f(x, y) d\mu_1 \otimes \mu_2(x, y).$$

Voyons à présent quels sont les liens existant entre $\int_{X_1 \times X_2} f(x, y) d\mu_1 \otimes \mu_2(x, y)$ et $\int_{X_1} f d\mu_1(x)$ et $\int_{X_2} f d\mu_2(y)$.

20. Sans cette hypothèse, le théorème de Fubini-Tonelli sera faux.

21. Une démonstration précise de ceci implique l'utilisation d'un théorème de prolongement (celui de Carathéodory par exemple) ; nous renvoyons le lecteur vers [?, ?].

10.2.1 Théorème de Fubini

Nous allons chercher à établir des conditions à partir desquelles il sera possible d'intervertir les intégrales (afin de ramener un calcul d'intégrale sur un espace produit à des calculs en dimension 1). Autrement dit, étant donnée une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable, à quel moment

$$\int_{X_1} \int_{X_2} f(x, y) d\mu_1(x) d\mu_2(y) = \int_{X_1} \int_{X_2} f(x, y) d\mu_2(y) d\mu_1(x) \quad ?$$

Est-ce que l'ordre d'intégration est important ? Nous voyons en passant qu'une question se pose : si $(x, y) \mapsto f(x, y)$ est mesurable pour la tribu produit que dire de la fonction $f_x : y \mapsto f(x, y)$ lorsque $x \in X_1$ est fixé²². Fort heureusement, la fonction f_x sera mesurable par rapport à $\mathcal{A}_2$ et la fonction f_y sera mesurable par rapport à $\mathcal{A}_1$ (cf. []). Ceci étant dit, nous pouvons donner l'énoncé du théorème expliquant à quelles conditions il est possible d'intervertir les intégrales.

Théorème 10.13 (Fubini-Tonelli). *Soit $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable positive alors*

$$\int_X f d\mu = \int_{X_1} \int_{X_2} f(x, y) d\mu_2(y) d\mu_1(x) = \int_{X_2} \int_{X_1} f(x, y) d\mu_1(x) d\mu_2(y).$$

Remarque. 1. Comme la plupart des théorèmes impliquant les intégrales, la démonstration s'effectue en débutant par les fonctions indicatrices de pavés : $f = 1_A$ avec $A = A_1 \times A_2$ où $A \in \mathcal{A}_i$ pour $i = 1, 2$. Il est à noter que des questions de mesurabilité seront à traiter afin de s'assurer que les intégrations partielles aient du sens : si A est mesurable alors, pour tout $x \in A_1$, l'ensemble $A_x = \{(x, y) \mid y \in A_2\}$ est aussi mesurable, de même pour l'ensemble $A_y = \{(x, y) \mid x \in A_1\}$ pour tout $y \in A_2$. La démonstration peut se trouver dans [].

Le théorème de Fubini-Tonelli 10.13 permet d'apporter un éclairage intéressant sur certains résultats déjà connus.

Exemple 10.2.1. 1. Il est instructif de voir ce qui se produit lorsque $X = \mathbb{N}^2$ muni de la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$ ainsi que de la mesure de comptage sur $\mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$. Dans ce cas la conclusion du théorème de Fubini consiste à intervertir deux sommes :

$$\sum_{p=0}^{\infty} \left(\sum_{q=0}^{\infty} u_{pq} \right) = \sum_{q=0}^{\infty} \left(\sum_{p=0}^{\infty} u_{pq} \right).$$

2. En choisissant μ_2 comme la mesure de comptage sur $\mathcal{N}$, le théorème de Fubini permet de retrouver le théorème d'inversion entre somme et intégrale :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_X f_n(x) d\mu_1(x) = \int_X \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) d\mu_1(x).$$

3. Voyons ce qui se produit lorsque les variables sont séparées : soit $f(x, y) = f(x)f(y)$ avec f une fonction intégrable par rapport à la mesure μ . Dans ce cas,

$$\int_{X \times X} f(x, y) d\mu(x) \otimes d\mu(y) = \left(\int_X f(x) d\mu(x) \right) \left(\int_X f(y) d\mu(y) \right).$$

22. même chose pour la fonction $f_y : x \mapsto f(x, y)$ lorsque $y \in X_2$ est fixé.

Il est maintenant naturel de chercher à traiter le cas des fonctions de signes quelconques. Historiquement, le théorème suivant a été obtenu avant le théorème 10.13.

Théorème 10.14 (Fubini). *Soit $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction intégrable par rapport à μ (i.e. $\int_X |f| d\mu < \infty$) alors*

$$\int_X f d\mu = \int_{X_1} \int_{X_2} f(x, y) d\mu_2(y) d\mu_1(x) = \int_{X_2} \int_{X_1} f(x, y) d\mu_1(x) d\mu_2(y).$$

Remarque. 1. En pratique, le théorème de Fubini s'utilise conjointement avec le théorème de Fubini-Tonelli 10.13 : ce dernier permet de vérifier que $\int_{X_1 \times X_2} |f| d\mu < \infty$ en intégrant par rapport à x puis par rapport à y (ce qui est possible puisque tout est positif) et justifie qu'il est possible d'en faire de même, cette fois-ci sans les valeurs absolues.

2. Il est essentiel que la fonction soit intégrable. En guise de contre-exemple, le lecteur pourra considérer la fonction $f : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Dans ce cas, il est possible de montrer que

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx \right] dy = -\frac{\pi}{4} \quad \text{tandis que} \quad \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \right] dx = \frac{\pi}{4}.$$

Le fait que ces intégrales ne coïncident pas provient du fait que $\int_{[0,1]^2} |f(x, y)| d(x, y) = +\infty$, la fonction n'est pas intégrable.

3. Il n'est pas possible de passer outre la condition portant sur les mesures (elles doivent être σ -finies sur l'espace sous-jacent). Pour observer ceci, considérons par exemple l'ensemble produit $[0, 1]^2$ muni de la mesure de Lebesgue λ et de la mesure de comptage m (ainsi que leurs tribus idoines). Si $\Delta = \{(x, x) \in [0, 1]^2\}$ alors, d'une part,

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 1_{\Delta}(x, y) dm(y) \right] d\lambda(x) = \int_0^1 \left[\int_0^1 1_{\{x\}} dm(y) \right] d\lambda(x) = \int_0^1 m(\{x\}) d\lambda(x) = \lambda([0, 1]) = 1$$

et, d'autre part,

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 1_{\Delta}(x, y) d\lambda(x) \right] dm(y) = \int_0^1 \left[\int_0^1 1_{\{y\}} d\lambda(x) \right] dm(y) = \int_0^1 \lambda(\{y\}) dm(y) = \int_0^1 0 dm(y) = 0.$$

Cette fois-ci, le soucis provient du fait que la mesure de comptage n'est pas σ -finie sur $[0, 1]$.

Le lecteur pourra trouver un autre contre-exemple dans [?].

Le théorème de Fubini peut-être utile dans de nombreux contextes.

Exemple 10.2.2. Dans un cadre probabiliste, si X est une variable aléatoire réelle de loi μ et Y une copie indépendante de X alors, pour toute fonction f de carré intégrable par rapport à μ .

$$\text{Var}(f(X)) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (f(x) - f(y))^2 d\mu(x) d\mu(y).$$

En effet,

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (f(x) - f(y))^2 d\mu(x) d\mu(y) = \frac{1}{2} \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f^2(x) d\mu(x) d\mu(y) + \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f^2(y) d\mu(x) d\mu(y) - 2 \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x) f(y) d\mu(x) d\mu(y) \right).$$

Les deux premières intégrales sont identiques et la dernière intégrale peut s'exprimer différemment grâce au théorème de Fubini 10.14 :

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x) f(y) d\mu(x) d\mu(y) = \left(\int_{\mathbb{R}} f(x) d\mu(x) \right) \left(\int_{\mathbb{R}} f(y) d\mu(y) \right) = \left(\int_{\mathbb{R}} f(x) d\mu(x) \right)^2,$$

$$\text{d'où } \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (f(x) - f(y))^2 d\mu(x) d\mu(y) = \int_{\mathbb{R}} f^2 d\mu - \left(\int_{\mathbb{R}} f d\mu \right)^2 = \text{Var}(f(X)).$$

Remarque. 1. Cette manière de dupliquer la mesure μ pour exprimer la variance est particulièrement utile lorsque f est une fonction convexe ou Lipschitzienne car il devient aisé de contrôler le membre de droite afin d'obtenir une inégalité intéressante (cf. []). Par exemple, lorsque f est k -lipschitzienne nous avons, pour tout $x, y \in X$,

$$(f(x) - f(y))^2 \leq k^2 |x - y|^2.$$

Une majoration similaire, cette fois-ci impliquant la dérivée, s'obtient si la fonction est supposée convexe et dérivable.

2. Dans le même esprit, toujours dans un contexte probabiliste, le théorème de Fubini permet d'obtenir (cf. []) l'identité suivante : soit X une variable aléatoire positive admettant un moment d'ordre p (i.e. $\mathbb{E}[X^p] < +\infty$ avec $p \in \mathbb{N}$)

$$\mathbb{E}[X^p] = \int_0^\infty p t^{p-1} \mathbb{P}(X \geq t) dt.$$

En effet, $\mathbb{P}(X \geq t) = \mathbb{E}[1_{X \geq t}]$ d'où $\int_0^\infty p t^{p-1} \mathbb{E}[1_{X \geq t}] dt = \mathbb{E}[\int_0^X p t^{p-1}] = \mathbb{E}[X^p]$ où, dans l'avant dernière égalité, nous avons employé le théorème de Fubini 10.14.

10.2.2 Changement de variables

Il peut être fructueux d'utiliser le théorème de Fubini 10.14 en combinaison d'un changement de variable approprié. A cet effet, nous énonçons ci-dessous le théorème de changement de variable avant de donner une application. Ci-dessous, λ désignera la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^d$

Théorème 10.15 (Changement de variable dans $\mathbb{R}^d$). *Soit $f : U \rightarrow V$ une application bijective entre deux ouverts U et V de $\mathbb{R}^d$, de classe $C^1(U, V)$, telle que $\det((J_f(x))) \neq 0$ en tout point x de U où $J_f(x)$ est la matrice jacobienne de f en x ²³; alors, si $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction borélienne positive ou intégrable par rapport à λ nous avons*

$$\int_V \phi d\lambda = \int_U \phi \circ f |\det(J_f)| d\lambda.$$

23. Une telle fonction f est souvent désignée sous le terme de C^1 -difféomorphisme.

Remarque. Ce théorème peut aussi se rapprocher du théorème de transport (cf. [1]) qui, étant donnée une fonction, permet d'intégrer par rapport à une mesure image. Nous reviendrons sur ce sujet lorsque nous aborderons la théorie des probabilités.

Voyons à présent un exemple d'application du théorème de Fubini 10.13 combiné à un changement de variable.

Exemple 10.2.3. Cherchons à démontrer que $I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. Considérons alors

$$I^2 = \left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx \right) \times \left(\int_0^\infty e^{-y^2} dy \right)$$

et utilisons le théorème de Fubini 10.14. Celui-ci nous assure que

$$I^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

Effectuons alors un changement de variables pour passer en coordonnées polaires²⁴. Nous obtenons alors

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} 2r e^{-r^2} dr d\theta = \pi.$$

En conséquence, $I = \sqrt{\pi}$.

Il temps de procéder à une comparaison de l'intégrale de Lebesgue avec celle de Riemann. Notamment concernant le lien existant entre les fonctions intégrables au sens de Riemann et celles au sens de Lebesgue. Cette comparaison sera poursuivie dans le chapitre suivant portant sur les espaces L^p .

10.3 Comparaison avec l'intégrale de Riemann

Maintenant que nous avons donné un sens à l'intégration par rapport à une mesure abstraite μ , il semble important de comparer ceci avec l'intégrale de Riemann. Aussi, dans ce qui suit, μ sera la mesure de Lebesgue λ (qui sera notée dx pour alléger les notations impliquant des intégrales) sur la tribu des boréliens $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

A cet effet, rappelons quelques éléments liés à l'intégrale de Riemann. Celle-ci se construit, dans un premier temps, avant d'être légèrement généralisée, sur un intervalle fermé et borné $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Si s est une subdivision de $[a, b]$ donnée par

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, \quad n \geq 1$$

nous construisons deux fonctions en escalier sur cette subdivision :

$$I(f, s) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) \quad \text{et} \quad S(f, s) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})$$

24. i.e. $x = r \cos(\theta)$ et $y = r \sin(\theta)$, nous laissons au lecteur le soin de vérifier que cela induit un C^1 -difféomorphisme et que le déterminant de la matrice jacobienne vaut $r \neq 0$.

où, pour tout $i = 1, \dots, n$, $m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ et $M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$. Grâce à ces fonctions en escaliers, nous pouvons ensuite considérer les intégrales supérieures et inférieures :

$$\int_a^b f(x) dx = \sup_{\mathbf{s}} I(f, \mathbf{s}) \quad \text{et} \quad \overline{\int_a^b f(x) dx} = \inf_{\mathbf{s}} S(f, \mathbf{s}).$$

Lorsque $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (une fonction bornée) nous avons (cf. théorème 7.2) un critère commode permettant de caractériser les fonctions Riemann-intégrable : f est intégrable au sens de Riemann si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision $\mathbf{s}$ telle que

$$S(f, \mathbf{s}) - I(f, \mathbf{s}) < \varepsilon$$

et dans ce cas $\int_a^b f(x) dx = \overline{\int_a^b f(x) dx} = \int_a^b f(x) dx$. Nous allons chercher à comparer cette approche avec l'intégrale de Lebesgue sur $[a, b]$ (que nous noterons $\int_{[a,b]} f(x) dx$ temporairement pour la distinguer de l'intégrale de Riemann $\int_a^b f(x) dx$). Plus précisément, nous allons établir le résultat suivant.

Proposition 10.16 (Comparaison Riemann-Lebesgue). *Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée et Riemann intégrable alors f est intégrable au sens de Lebesgue sur $[a, b]$ et*

$$\int_{[a,b]} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Remarque. Il se trouve (cf. [?]) qu'il est possible de caractériser précisément l'ensemble des fonctions intégrables au sens de Riemann en utilisant le vocabulaire de la théorie de la mesure : f est Riemann intégrable sur $[a, b]$ si et seulement si les conditions suivantes sont réalisées

- f est bornée et nulle en dehors d'un intervalle borné,
- l'ensemble des points de discontinuités de f est de mesure nulle.

Démonstration. Soit f une fonction bornée et intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$. Il suffit de se restreindre aux fonctions positives. En effet, si f est à valeurs réelles et ce résultat est établi pour les fonctions positives, alors

$$\int_a^b |f(x)| dx = \int_{[a,b]} |f(x)| dx < +\infty.$$

Il suffit ensuite d'utiliser le fait que $f = f^+ - f^-$ et d'utiliser à nouveau le résultat sur les fonctions positives f^+ et f^- pour conclure. Nous supposons donc que $f \geq 0$. Puisque f est Riemann intégrable, d'après la discussion qui précède la proposition, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision $\mathbf{s}$ telle que

$$\int_a^b f(x) dx - \varepsilon \leq I(f, \mathbf{s}) \leq \int_a^b f(x) dx \leq S(f, \mathbf{s}) \leq \int_a^b f(x) dx + \varepsilon.$$

Considérons alors les fonctions **étagées** :

$$f_\varepsilon^- = \sum_{i=1}^n m_i 1_{[x_{i-1}, x_i]} \quad \text{et} \quad f_\varepsilon^+ = \sum_{i=1}^n M_i 1_{[x_{i-1}, x_i]}$$

lesquelles vérifient $f_\varepsilon^- \leq f \leq f_\varepsilon^+$. Ces deux fonctions étant des fonctions étagées nous avons, par définition de l'intégrale de Lebesgue,

$$\int_{[a,b]} f_\varepsilon^-(x) dx = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) = I(f, \mathbf{s}) \quad \text{et} \quad \int_{[a,b]} f_\varepsilon^+(x) dx = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) = S(f, \mathbf{s}).$$

En conséquence, nous avons

$$\int_a^b f(x) dx - \varepsilon \leq \int_{[a,b]} f_\varepsilon^-(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx + \varepsilon.$$

D'où, en prenant le supremum sur les fonctions étagées, nous obtenons que

$$\int_a^b f(x) dx - \varepsilon \leq \int_{[a,b]} f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx + \varepsilon.$$

et, avec $\varepsilon \rightarrow 0$, ceci mène à

$$\int_{[a,b]} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

□

Ainsi, si f est intégrable au sens de Riemann, les deux notions coïncident. En revanche, il est possible d'exhiber des fonctions intégrable au sens de Lebesgue qui ne sont pas intégrable au sens de Riemann. Par exemple, sur $[0, 1]$ avec $f = 1_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$ nous avons une fonction qui n'est pas intégrable au sens de Riemann (cf. chapitre 7). Néanmoins, il est possible de calculer son intégrale par rapport à la mesure de Lebesgue : l'ensemble $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ est dénombrable et donc de mesure nulle. Par suite

$$\int_{\mathbb{Q} \cap [0,1]} f(x) dx = 0$$

pour la mesure de Lebesgue.

Remarque. Lorsque l'intégration se fait sur un intervalle bornée, l'intégrale de Lebesgue généralise bien celle de Riemann. Lorsque nous abordons la notion d'intégrales généralisées (sur $[a, +\infty[$ par exemple), les choses sont plus délicates :

1. Dire que f est intégrable sur $[a, +\infty[$ au sens de Lebesgue signifie que $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$. Lorsque c'est le cas, les intégrales généralisées s'intègrent dans la théorie de Lebesgue et les intégrales coïncident.
2. En revanche, il existe des intégrales semi-convergentes :

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx < +\infty \quad \text{et} \quad \int_a^{+\infty} |f(x)| dx = +\infty.$$

Ces intégrales ne peuvent être considérées dans la théorie de Lebesgue (qui impose une convergence absolue). Par exemple, La fonction $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ est Riemann-intégrable sur $[0; +\infty[$ (intégrale généralisée) mais elle n'est pas intégrable pour la mesure de Lebesgue : la présence de la valeur absolue (dans l'intégrale de Lebesgue pour les fonctions mesurables de signe quelconque) empêche les phénomènes de compensations liés aux oscillations du sinus.

Tout ceci conclut ce chapitre sur l'intégrale de Lebesgue dont la polyvalence et l'efficacité a été illustrée tout au long du chapitre. Certains aspects ont été temporairement omis : par exemple, le théorème de Radon-Nikodym n'est pas présenté ici car son utilisation relève surtout de la théorie des probabilités. Nous reviendrons là-dessus ultérieurement. D'autres aspects, mettant en évidence de quelle manière l'intégrale de Lebesgue complète, vis-à-vis de la stabilité par passage à la limite, celle de Riemann, vont être traités dans le chapitre suivant.

10.4 Références historiques

10.5 Exercices

Exercice 10.1. Soient $\alpha > -1$ et $\beta \geq 0$

1. Montrer que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^m x^\alpha (\ln x)^\beta \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m dx = \int_0^\infty x^\alpha (\ln x)^\beta e^{-x} dx.$$

2. En déduire que

$$\int_0^\infty e^{-x} \ln x dx = -\gamma$$

où γ est la constante d'Euler définie par $\gamma = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^m \frac{1}{k} - \ln m \right)$.

Exercice 10.2 (Intégrale de Gauss). Nous souhaitons montrer, via les intégrales de Wallis, que $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx \sqrt{\pi}$.

1. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx = \int_0^\infty e^{-x^2} dx.$$

2. Vérifier que, pour tout $n \geq 1$,

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(\theta) d\theta.$$

3. L'intégrale de Wallis, I_m est définie par

$$I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m(\theta) d\theta, \quad m \geq 0.$$

- (a) Montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$I_{2n} = \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \dots \times (2n)} \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_{2n+1} = \frac{2 \times 4 \times \dots \times (2n)}{3 \times 5 \times \dots \times (2n+1)}.$$

- (b) Montrer ensuite que, pour tout $n \geq 1$,

$$1 \leq \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \leq \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = 1 + \frac{1}{2n} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1.$$

- (c) En déduire que $I_m \sim \sqrt{\frac{\pi}{m}}$ lorsque $m \rightarrow +\infty$.
 (d) Conclure que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Exercice 10.3. Soient $\alpha, \beta > 0$.

1. Montrer que

$$\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x^\beta} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha + \beta n}.$$

Indication : utiliser l'identité $\frac{1}{1-t} = 1 + t + \dots + t^n + \frac{t^{n+1}}{1-t}$.

2. En déduire que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2 \quad ; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

3. Montrer que, si $0 < \alpha < 1$ alors

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2}.$$

Exercice 10.4. 1. En calculant l'intégrale de la fonction $f(x, y) = e^{-xy}$ sur un domaine convexe de $\mathbb{R}^2$, montrer que pour tout $\alpha, \beta > 0$,

$$\int_0^{\infty} (e^{\alpha x} - e^{\beta x}) \frac{dx}{x} = \ln \left(\frac{\beta}{\alpha} \right).$$

2. De même, en considérant la fonction $f(x, y) = \sin(xy)$ montrer que

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A (\cos(\alpha x) - \cos(\beta x)) \frac{dx}{x} = \ln \left(\frac{\beta}{\alpha} \right).$$

Exercice 10.5. Soit $D = \{(x, y) ; x > 0, y > 0\}$. Calculer l'intégrale

$$\int_D \frac{dx dy}{(1+y)(1+x^2 y)}.$$

En déduire que

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2 - 1} dx = \frac{\pi^2}{8}.$$

Exercice 10.6 (Théorème de Lusin). Soit $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$ et soit E un ensemble borélien de mesure finie pour la mesure de Lebesgue (i.e. $\lambda(E) < +\infty$).

1. Soit f une fonction mesurable étagée à valeurs réelles définie sur E . Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un compact $K \subset E$ tel que $\lambda(E \setminus K) \leq \epsilon$ et que f soit continue sur K .
Indication : utiliser le fait suivant ; soit A un borélien de mesure finie. Pour tout $\epsilon > 0$ il existe un compact $K \subset A$ tel que $\lambda(A \setminus K) \leq \epsilon$.
2. Soit f une fonction mesurable définie sur E à valeurs réelles. Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un borélien A tel que $\lambda(A) \leq \epsilon$ et que f soit continue sur $E \setminus A$. *Indication : considérer une suite (f_n) de fonctions mesurables étagées telles que $|f_n| \leq |f_{n+1}|$ qui converge vers f en tout point de E et appliquera le théorème d'Egoroff (cf. ??).*

Exercice 10.7. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(\lambda) = \int_0^\infty \frac{\sin(\lambda x)}{x(x^2 + 1)} dx, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que F est dérivable et que

$$F'(\lambda) = \frac{\pi}{2} e^{-|\lambda|}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. Montrer que $F(\lambda) = \operatorname{sgn}(\lambda) \frac{\pi}{2} (1 - e^{-|\lambda|})$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 10.8 (Continuité de l'intégrale au voisinage de la partie vide). Soit f une fonction intégrable sur un espace mesuré $(X; \mathcal{T}; \mu)$. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $\mu(A) \leq \eta$ alors $\int_A |f| d\mu \leq \epsilon$.

Exercice 10.9. Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré fini, et soit $f : (X; \mathcal{T}) \rightarrow (\mathbb{R}; \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable ; démontrer que les quatre assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est intégrable par rapport à μ ;
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\{|f| \geq n\}} |f| d\mu = 0$;
3. $\sum_{n \geq 0} \mu(n \geq |f| < n+1) < +\infty$;
4. $\sum_{n \geq 0} \mu(|f| \geq n) < +\infty$.

Exercice 10.10 (Lemme de Scheffé). Soient f_n , $n \in \mathbb{N}$ et f des fonctions positives et intégrables sur $(X; \mathcal{T}; \mu)$ telles que $f_n \rightarrow f$ μ -presque partout et $\int_X f_n d\mu \rightarrow \int_X f d\mu$. Démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0.$$

Indication : pour commencer, il pourra être établi que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X (f - f_n)_+ d\mu = 0$.

Exercice 10.11. Démontrer à l'aide du théorème de convergence dominée que, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z.$$

Indications : utiliser la mesure de comptage sur $\mathbb{N} \cup \{0\}$; développer $(1 + \frac{z}{n})^n$ avec la formule du binôme et identifier une suite de fonctions f_n (sur $\mathbb{N} \cup \{0\}$) et sa limite f .

Exercice 10.12. Soient μ et ν deux mesures finies sur la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ des boréliens de $\mathbb{R}$; démontrer que si

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu = \int_{\mathbb{R}} f d\nu$$

pour toute fonction continue et bornée $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ alors $\mu = \nu$.

Indication : approcher l'indicatrice $1_{[a,b]}$ par une fonction continue bornée.

Exercice 10.13. Le théorème de Fubini s'applique-t-il à la fonction

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{avec } (x, y) \in [0, 1]^2$$

par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 10.14. Les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ suivantes sont-elles intégrables sur $[0, 1]^2$ par rapport à la mesure de Lebesgue?

$$f(x, y) = \frac{x - y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad ; \quad f(x, y) = \frac{1}{(1 - xy)^p} \quad \text{avec } p > 0.$$

Discuter suivant les valeurs de p .

Exercice 10.15 (Intégrale de Dirichlet). Nous allons chercher à déterminer la valeur (si elle existe) de l'intégrale

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx.$$

1. Donner un sens à cette intégrale. La fonction $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ est-elle intégrable au sens de Lebesgue?
2. Soit $a > 0$; démontrer que la fonction $f : (x, y) \mapsto e^{xy} \sin(x)$ est intégrable sur $]0; a[\times]0; 1[$ par rapport à la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}^2$.
3. Poser $I_a = \int_{]0, a[\times]0, +\infty[} f d\lambda$. Exprimer I_a de deux façons différentes, et calculer la limite $\lim_{a \rightarrow +\infty} I_a$. En déduire la valeur de l'intégrale I .

Exercice 10.16. Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions boréliennes croissantes telles que

$$\int_{\mathbb{R}} f^2 d\mu < \infty \quad ; \quad \int_{\mathbb{R}} g^2 d\mu,$$

pour μ une mesure finie sur $(\mathbb{R}; \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Démontrer que

$$\int_{\mathbb{R}} f g d\mu \geq \int_{\mathbb{R}} f d\mu \int_{\mathbb{R}} g d\mu.$$

Exercice 10.17 (Inégalité de Prékopa-Leindler). Soient f, g, h trois fonctions continues strictement positives sur $\mathbb{R}$ telles que f et g soient intégrables et, pour un $\theta \in [0; 1]$,

$$h(\theta x + (1 - \theta)y) \geq f(x)^\theta g(y)^{1-\theta}.$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

1. Définir $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\int_{\mathbb{R}} f d\lambda \int_{]-\infty, T(x)[} g d\lambda = \int_{\mathbb{R}} g d\lambda \int_{]-\infty, x[} f d\lambda \quad \text{avec } x \in \mathbb{R}.$$

2. Vérifier que T est croissante et dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. En utilisant le changement de variable $x \mapsto z(x) = \theta x + (1 - \theta)T(x)$ démontrer que

$$\int_{\mathbb{R}} h d\lambda \geq \left(\int_{\mathbb{R}} f d\lambda \right)^\theta \left(\int_{\mathbb{R}} g d\lambda \right)^{1-\theta}$$

4. Démontrer par récurrence sur la dimension que le résultat s'étend aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Proposer une extension à toutes les fonctions mesurables positives sur $\mathbb{R}^d$.

Exercice 10.18. Soit

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

et considérons la suite (f_n) définie par

$$f_{2k}(x) = g(x) \quad ; \quad f_{2k+1}(x) = g(1 - x) \quad \text{avec } x \in [0, 1].$$

Montrer que $\liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ pour tout $x \in [0, 1]$ et $\int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{2}$. Que pouvez-vous en déduire (par comparaison avec le Lemme de Fatou).

Exercice 10.19. Soit

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } |x| \leq n \\ 0 & \text{si } |x| > n. \end{cases}$$

1. Montrer que (f_n) converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $\int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = 2$.
3. Comparer le théorème de convergence dominée et de convergence uniforme.

Check Candelbergher : 1,2,4,5,6p198/199

