

Chapitre 1

Rappels sur le calcul algébrique

Durant toute l'année nous allons être amené à manipuler des expressions algébriques, à résoudre des équations ou des inéquations. Il est donc essentiel d'être à l'aise et de maîtriser certaines notions qui ont été développées en classe de seconde. Procédons à de brefs rappels pour avoir tout cela en tête.

1.1 Développer et réduire

Il est important de savoir manier la double distributivité afin d'obtenir la forme développée et simplifiée d'une expression algébrique.

Exemple 1.1.1.

$$\begin{aligned}(2x + 1)(-x + 3) - 2(5x + 7) &= 2x \times (-x) + 2x \times 3 + 1 \times (-x) + 1 \times 3 + (-2) \times 5x + (-2) \times 7 \\ &= -2x^2 + 6x - x + 3 - 10x - 14 \\ &= -2x^2 - 5x - 11\end{aligned}$$

Au début des calculs précédents, nous avons donc

1. **distribué** le terme $2x$ dans la **deuxième parenthèse**. Ceci nous a donné les termes

$$2x \times (-x) + 2x \times 3.$$

2. Puis nous avons procédé de manière similaire en **distribuant** 1 et obtenu

$$1 \times (-x) + 1 \times 3.$$

3. Enfin, nous avons effectué des **calculs semblables pour développer** $-2(5x + 7)$.
4. Ensuite nous avons rassemblé les objets de même nature ensemble : les x^2 ensembles, les x ensembles et les constantes ensembles. Autrement dit, nous avons **simplifier notre expression algébrique**.

Exercices à traiter : exercice 1.

Il est aussi possible de développer certaines expressions algébriques en utilisant des **identités remarquables**¹ que nous rappelons ci-dessous.

Proposition 1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, les identités suivantes sont satisfaites.

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \quad \text{et} \quad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Remarque. Plus tard dans l'année, la troisième identité remarquable sera beaucoup utilisée pour factoriser certaines expressions algébriques.

A titre d'illustration, voici un exemple d'application de telles formules.

Exemple 1.1.2. 1. Si $A(x) = (2x + 3)^2$, ici nous utilisons l'identité remarquable

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

avec $a = 2x$ et $b = 3$ pour obtenir $A(x) = 4x^2 + 12x + 9$.

2. Si $B(x) = (2x - 1)(2x + 1)$, ici nous utilisons l'identité remarquable

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

avec $a = 2x$ et $b = 1$ pour obtenir $B(x) = 4x^2 - 1$.

Exercices à traiter : 3.

1.2 Factorisation

Il faut aussi être capable de faire l'opération inverse : étant donnée une forme développée, déterminer sa forme factorisée. Pour cela, deux méthodes ont été vues en classe de seconde : via un facteur commun ou en utilisant une identité remarquable.

Exemple 1.2.1. (Chercher un facteur commun)

1.

$$2x^2 - 4x = 2x \times x - 2x \times 2 = 2x(x - 2)$$

Une fois le facteur commun ($2x$) identifié, il ne reste plus qu'à recopier les termes restant (x et -2) à l'intérieur de parenthèses.

2. Factorisons l'expression suivante

$$x^2(x - 2) + (x - 2) = x^2(x - 2) + 1(x - 2) = (x - 2)(x^2 + 1).$$

Cette fois-ci le facteur commun est $(x - 2)$. Notons également que, pour factoriser, il est nécessaire de faire apparaître le facteur 1 qui était sous-entendu².

1. Leur utilisation donne un résultat plus rapidement que si nous développons en utilisant de la double distributivité.

2. multiplier par 1 ne change rien, ce facteur est omis la plupart du temps

3. Traitons un dernier exemple, plus élaboré cette fois-ci :

$$\begin{aligned}
 (-x+2)(3x+1)-2(-x+2)(x+4) &= (-x+2)[(2x+1)-2(x+4)] \\
 &= (-x+2)(3x+1-2x-8) \\
 &= (-x+2)(x-7).
 \end{aligned}$$

Voici quelques exemples utilisant les identités remarquables pour factoriser.

Exemple 1.2.2. (*identité remarquable*)

1. En utilisant l'identité $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, nous pouvons factoriser l'expression suivante :

$$9x^2 - 16 = (3x)^2 - 4^2 = (3x+4)(3x-4)$$

Pour cela, il suffit de choisir $a = 3x$ et $b = 4$.

2. En utilisant l'identité $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$, nous pouvons factoriser l'expression suivante :

$$4x^2 + 16x + 16 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 2 + 4^2 = (2x+2)^2$$

Pour cela, il suffit de choisir $a = 2x$ et $b = 4$.

Exercices à traiter : exercice 2 et exercice 15.

1.3 Résolution d'équations et d'inéquations

L'objectif de la factorisation est de pouvoir résoudre ensuite des équations/inéquations produits ou quotients. Débutons par le cas des produits et rappelons comment dresser un tableau de signes. Pour réussir cette tâche, il est essentiel de connaître et savoir utiliser le résultat suivant :

Proposition 2 (Signe d'une fonction affine). *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et supposons que $a \neq 0$ alors*

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
<i>signe de</i> $ax + b$	$-\text{sgn}(a)$	0	$\text{sgn}(a)$

Remarque. Le coefficient directeur a joue un rôle essentiel pour déterminer le signe (mais aussi les variations) d'une fonction affine $f(x) = ax + b$.

Voyons comment mettre ceci en œuvre sur un exemple. .

Exemple 1.3.1. Résolvons l'inéquation $(x+1)(-2x+6) < 0$. Pour cela, il suffit de résoudre séparément $x+1 = 0$ et $-2x+6 = 0$ afin de déterminer les valeurs (ordonnées) apparaissant dans la première ligne du tableau. Il est ensuite possible de compléter les signes des deux premières lignes pour ensuite, grâce à la règle des signes, déterminer le signe du produit.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
signe de $x + 1$	$-$	0	$+$	$+$
signe de $-2x + 6$	$+$	$+$	0	$+$
$(x + 1)(-2x + 6)$	$-$	0	0	$-$

Nous lisons ensuite dans le tableau que $(x + 1)(-2x + 6) < 0 \iff x \in]-\infty; -1[\cup]3; +\infty[$.

Exercices à traiter : 11 (Q1 et Q2), 12 (Q1), 8 et 10.

Passons maintenant au cas des quotients. C'est essentiellement la même chose mais il faut au préalable être mesure de mettre deux quotients au même dénominateur.

Exemple 1.3.2. Mettons ces deux quotients au même dénominateur.

$$\frac{2}{x} + \frac{5}{x-4} = \frac{2(x-4)}{x(x-4)} + \frac{5x}{x(x-4)} = \frac{2(x-4) + 5x}{x(x-4)} = \frac{7x-8}{x(x-4)}.$$

Remarque. Rappelons que les valeurs qui annulent le dénominateur sont appelées **valeurs interdites**. Ici, il s'agit des nombres $x = 0$ et $x = 4$.

Cela permet de résoudre ensuite des équations quotients.

Exemple 1.3.3. Résolvons $\frac{4x-1}{2x+1} = 3$. Tout d'abord, il convient de transformer cette expression algébrique sous la forme d'un quotient nul.

$$\frac{4x-1}{2x+1} = 3 \iff \frac{4x-1}{2x+1} - 3 = 0 \iff \frac{4x-1}{2x+1} - \frac{3}{1} = 0.$$

Il s'agit ensuite de mettre ces deux fractions au même dénominateur pour ensuite utiliser la règle du quotient nul.

$$\frac{4x-1}{2x+1} - \frac{3}{1} = 0 \iff \frac{4x-1}{2x+1} - \frac{3 \times (2x+1)}{1 \times (2x+1)} = 0 \iff \frac{4x-1}{2x+1} - \frac{6x+3}{2x+1} = 0$$

Ce qui mène à

$$\frac{4x-1-6x-3}{2x+1} = 0 \iff \frac{-2x-4}{2x+1} = 0 \iff -2x-4 = 0 \text{ et } 2x+1 \neq 0.$$

En résumé, l'ensemble des solutions est $S = \{-2\}$ et $-\frac{1}{2}$ est une valeur interdite.

Exercices à traiter : 5, 6 et 7.

Et, enfin, il faut traiter le cas des inéquations quotients.

Exemple 1.3.4. Pour résoudre,

$$\frac{x+4}{x-2} \geq 0$$

nous devons dresser un tableau de signe. Dans celui-ci nous devons **indiquer la présence d'une valeur interdite** (annulant le dénominateur $x - 2$) et la valeur qui annule le numérateur. Cela donne deux équations à résoudre et à placer, dans l'ordre, dans la première ligne, ensuite nous pouvons compléter les signes.

x	$-\infty$	-4	2	$+\infty$
signe de $x + 4$	$-$	0	$+$	$+$
signe de $x - 2$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{x+4}{x-2}$	$+$	0	$-$	$+$

La présence de la **double barre** dans la dernière ligne est là pour indiquer que **2 est une valeur interdite**. Finalement, l'ensemble des solutions S de l'inégalité $\frac{x+4}{x-2} \geq 0$ est l'intervalle $S =]-\infty; -4] \cup]2; +\infty[$. Autrement dit,

$$\frac{x+4}{x-2} \geq 0 \iff x \in]-\infty; -4] \cup]2; +\infty[.$$

Exercices à traiter : 11 (Q3 et Q5), 12 (Q2), 13, 14.