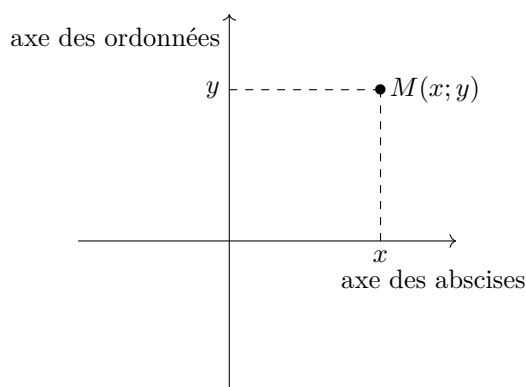


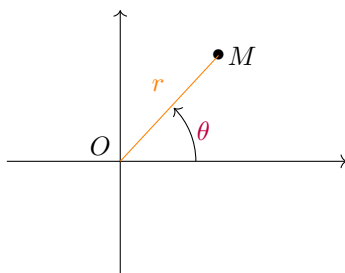
Chapitre 2

Trigonométrie et angles orientés

En classe de seconde, vous avez appris à repérer un point M du plan en lisant ses coordonnées cartésiennes x et y dans un repère orthonormé :



En y réfléchissant, nous constatons qu'il est possible de repérer le point M à partir d'un **rayon** r et d'un **angle** θ .

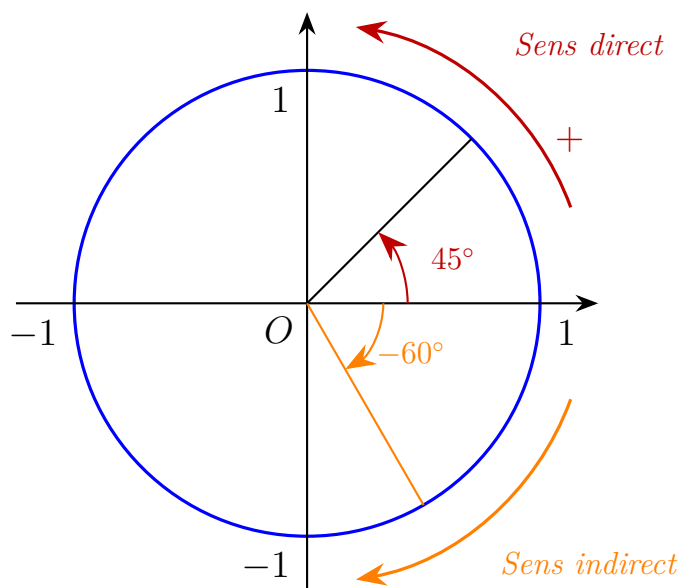


L'apparition d'angle fait écho aux notions de trigonométrie étudiées au collège. Nous allons revenir sur tout ceci petit à petit.

2.1 Cercle trigonométrique et mesure d'angle

Définition 2.1.1. Un *cercle trigonométrique* $\mathcal{C}$ est un cercle de rayon 1 centré en O sur lequel nous distinguerons deux sens de parcours :

- le *sens direct* lorsque le cercle est parcouru dans le *sens inverse des aiguilles d'une montre* ;
- le *sens indirect* lorsque le cercle est parcouru dans le *sens des aiguilles d'une montre*.



Habituellement, les angles sont mesurés en *degré*. Il se trouve que cette unité n'est pas intrinsèquement liée au cercle, nous allons donc introduire une nouvelle unité **le radian** qui représente mieux quelle proportion du cercle représente un angle donné. Pour cela, il convient de rappeler que le périmètre d'un cercle de rayon 1 vaut 2π . C'est pourquoi nous avons le tableau de proportionnalité suivant

Degrés	360°	180°	90°	45°	60°	30°	0°
Radian	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	0

Remarque. De manière générale, nous avons le tableau de proportionnalité suivant :

Degrés	360	d
Radian	2π	r

nous fournissant la relation

$$360 \times r = d \times 2\pi$$

qui permet de convertir des degrés d en radian r et vice-versa.

Mettons ceci en application sur un exemple.

Exemple 2.1.1. 1. Donner la mesure en radians de l'angle de mesure 33° .

2. Donner la mesure en degrés de l'angle de mesure $\frac{3\pi}{8}$ radians.

Pour la première question $d = 33$, nous avons donc

$$360 \times r = 33 \times 2\pi \iff r = 33 \times \frac{2\pi}{360} = \frac{11\pi}{60}.$$

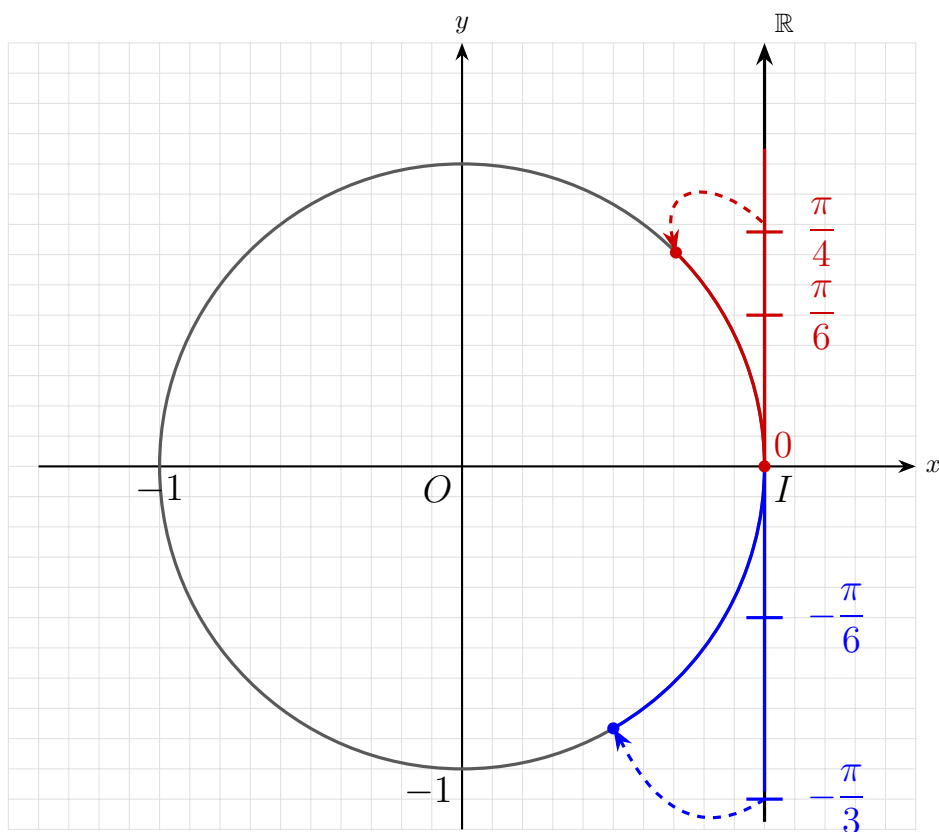
Pour la deuxième question $r = \frac{3\pi}{8}$, nous avons donc

$$360 \times \frac{3\pi}{8} = d \times 2\pi \iff d = \frac{360}{2\pi} \times \frac{3\pi}{8} = 67,5^\circ.$$

Exercices à traiter : 8 et 10 page 218 (cf. exemple 1 page 205).

2.2 Mesure principale d'un angle orienté

En plaçant la droite réelle $\mathbb{R}$ tangente au cercle trigonométrique, il est possible de « l'enrouler » autour du cercle trigonométrique permettant ainsi de repérer n'importe quel nombre réel sur le cercle.



Exemple 2.2.1. Placer sur le cercle trigonométrique les points suivants :

1. Le point A associé au nombre $\frac{3\pi}{4}$.
2. Le point B associé au nombre $\frac{9\pi}{4}$.
3. Le point C associé au nombre $\frac{8\pi}{3}$.
4. Le point D associé au nombre $\frac{-9\pi}{2}$.
5. Où se trouve le point associé au nombre $-\frac{\pi}{2}$? Qu'observez-vous ? Reprendre cette question avec le nombre $\frac{\pi}{4}$.

Nous venons de constater que certains nombre arrivent au même endroit sur le cercle trigonométrique. La différence résidant dans le fait qu'il fallait ajouter un certain nombre de tour dans le sens direct ou indirect. Par exemple

$$\frac{9\pi}{4} = \frac{\pi + 8\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi,$$

il y a un tour cercle (dans le sens direct) entre $\frac{9\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$. De même,

$$\frac{-9\pi}{2} = \frac{-\pi - 8\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} - 2 \times 2\pi,$$

cette fois-ci il y a deux tours de cercle (dans le sens indirect) entre $\frac{-9\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$. Puisque les points obtenus sur le cercle trigonométrique, nous allons les identifier. Pour cela, il convient de définir la notion de **mesure principale d'un angle**.

Définition 2.2.1. La mesure principale d'un angle orienté correspond à la mesure de l'angle orienté $\theta \in]-\pi, \pi]$ obtenu après avoir « enlever les tours superflus (dans le sens direct ou indirect) de cercle trigonométrique ».

Remarque. Il est usuel de dire que nous travaillons avec des mesures d'angles définis modulo 2π .

Voyons cela sur des exemples.

Exemple 2.2.2. 1. Puisque $\frac{9\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 1 \times 2\pi$ alors la mesure principale de $\frac{9\pi}{4}$ vaut $\theta = \frac{\pi}{4}$.
2. Puisque $\frac{-9\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} - 2 \times 2\pi$ alors la mesure principale de $\frac{-9\pi}{2}$ vaut $\theta = -\frac{\pi}{2}$.

A vous de jouer sur deux autres exemples.

Exemple 2.2.3. 1. Supposons que $\theta = \frac{37}{6}\pi$ et déterminons la mesure principale de cet angle orienté. Pour cela, il suffit d'observer que

$$\frac{37\pi}{6} = \frac{(6 \times 6 + 1)\pi}{6} = 6\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 3 \times 2\pi;$$

la mesure principale est donc $\frac{\pi}{6}$.

2. De manière similaire, si $\theta = \frac{202\pi}{3}$ nous avons

$$\frac{202\pi}{3} = \frac{(67 \times 3 + 1)\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 67\pi;$$

Nous ne pouvons pas nous arrêter ici, car 67π ne correspond pas à un nombre de tour complets du cercle trigonométrique. Pour résoudre ceci, il suffit d'observer que

$$67\pi = 68\pi - \pi,$$

ainsi $\frac{\pi}{3} + 67\pi = \frac{\pi}{3} + 68\pi - \pi = -\frac{2\pi}{3} + 34 \times 2\pi$. La mesure principale vaut donc

$$\theta = -\frac{2\pi}{3}$$

et l'angle géométrique associé a pour mesure $\left| -\frac{2\pi}{3} \right| = \frac{2\pi}{3}$.

Exercices à traiter : 13,14 page 218 (mesure principale, cf. exemple 2 page 205) et 15,16 page 218 (lecture graphique).

2.3 Fonctions trigonométriques et valeurs remarquables

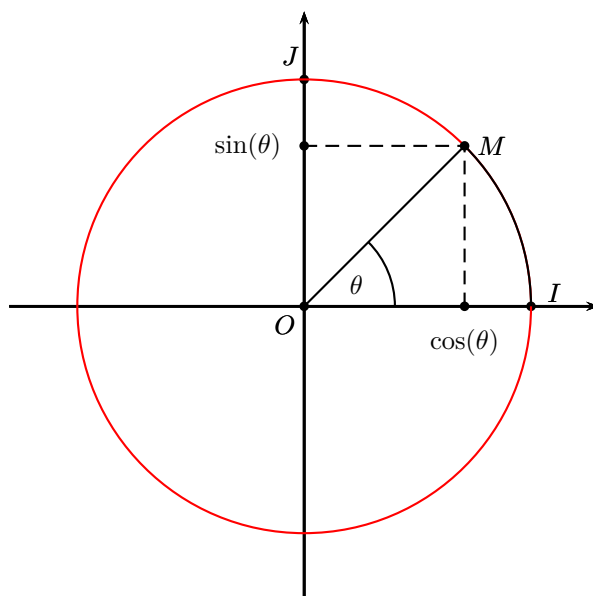
Lorsque les coordonnées cartésiennes et les coordonnées polaires sont associées, cela fait apparaître des triangles rectangles et permet ainsi d'utiliser la trigonométrie vue au collège.

Définition 2.3.1. Soit $(O; I; J)$ un repère orthonormé direct¹. A tout point M appartenant au cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ nous associons

- θ une mesure de l'angle orienté entre l'axe des abscisses et la demi-droite $[O, M)$;
- le cosinus de θ , noté $\cos(\theta)$, correspondant à l'abscisse du point M ;
- le sinus de θ , noté $\sin(\theta)$, correspondant à l'ordonnée du point M .

1. si $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ nous avons alors $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ et $IOJ = \frac{\pi}{2}$.

Graphiquement :



Remarque. Si M a pour coordonnées $(x; y)$, les formules trigonométriques dans un triangle rectangle nous assure que

$$\cos(\theta) = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypothénuse}} = \frac{x}{1} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypothénuse}} = \frac{y}{1}.$$

Les notations adoptées sont donc cohérentes avec ce que vous avez étudié au collège.

Par la suite, il est important de connaître certaines valeurs remarquables de ces fonctions des fonctions sinus et cosinus. Il est alors essentiel de retenir, par cœur, le tableau suivant.

Proposition 3 (Valeurs trigonométriques remarquables).

θ (en radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Démonstration. A titre d'exemple, nous proposons deux démonstrations permettant d'obtenir l'une de ces valeurs remarquables.

1. Voyons comment montrer que $\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Pour cela, plaçons nous dans un triangle rectangle isocèle (ainsi, les angles à la base sont égaux et valent $\frac{\pi}{4}$) de côté 1. En utilisant le théorème de Pythagore dans ce triangle (ou en observant que l'hypoténuse de ce dernier correspond à la diagonale d'un carré de côté 1), nous obtenons que l'hypoténuse vaut $\sqrt{2}$. Par suite, les formules de trigonométrie vues au collège nous assure que

$$\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2. Pour déterminer la valeur de $\sin(\frac{\pi}{3})$ et $\cos(\frac{\pi}{3})$, il suffit de considérer un triangle équilatéral de côté 1. Dans celui-ci, il faut ensuite tracer une hauteur et se souvenir que, dans un triangle équilatéral, celle-ci coïncide avec une médiatrice. Par suite, cette hauteur coupe le côté opposé en son milieu. Si b désigne la longueur de cette hauteur, le théorème de Pythagore nous assure que b vérifie l'identité suivante

$$1^2 = (\frac{1}{2})^2 + b^2$$

Donc $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Pour conclure, il ne reste plus qu'à employer les formules classiques de trigonométrie. A cet effet, rappelons que

$$\cos(\theta) = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}.$$

□

Il se trouve que connaître ce tableau permet facilement de déduire, de manière pragmatique, d'autres valeurs remarquables. Pour cela, il suffit de faire un dessin (placer l'angle voulu dans un cercle trigonométrique) et de retenir ces différentes observations :

- le sinus ou le cosinus d'un angle en « $\frac{\pi}{4}$ » est toujours associé à $\pm \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7$;
- le sinus ou le cosinus d'un angle en « $\frac{\pi}{3}$ ou $\frac{\pi}{6}$ » est toujours associé un couple de $\pm \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.8$ et $\pm \frac{1}{2}$;
- le sinus ou le cosinus d'un angle en « $\frac{\pi}{2}$ ou 0 ou π » est toujours associé à un couple de ± 1 et 0.

Voyons cela sur deux exemples.

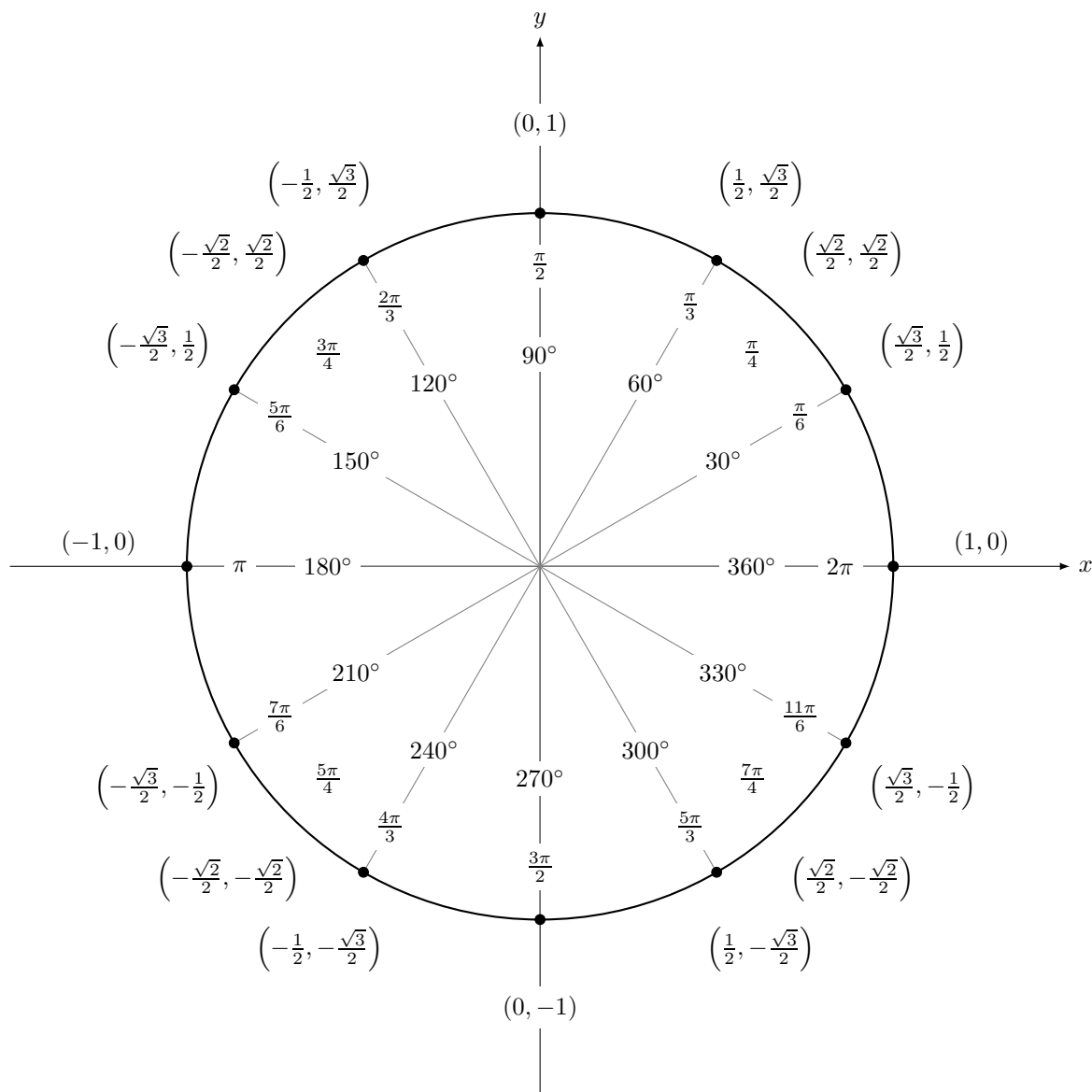
Exemple 2.3.1. 1. Déterminons $\cos(\frac{3\pi}{4})$ et $\sin(\frac{3\pi}{4})$. Puisqu'il s'agit d'un angle en « $\frac{\pi}{4}$ » la réponse correspond forcément à $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. Sur notre figure, nous constatons que le sinus est positif tandis que le cosinus est négatif donc

$$\cos(\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\frac{3\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2. Déterminons $\cos(-\frac{2\pi}{3})$ et $\sin(-\frac{2\pi}{3})$. Puisqu'il s'agit d'un angle en « $\frac{\pi}{3}$ » la réponse correspond forcément à un couple formé de $\pm \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.8$ et $\pm \frac{1}{2}$. Sur notre figure, en plaçant notre angle, nous constatons que le sinus est négatif (proche de -0.8) et que le cosinus est aussi négatif (proche de -0.5) donc

$$\cos(-\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin(-\frac{2\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Si certains préfèrent, nous proposons ci-dessous une figure donnant l'ensemble des valeurs²



Sur la figure précédente, l'abscisse de chaque point fournit la valeur du cosinus de l'angle correspondant et l'ordonnée la valeur du sinus. Par exemple, le point $M(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ permet de savoir que

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2. Attention, les mesures des angles sont toutes données dans le sens direct.

2.4 Pour aller plus loin

Pour les élèves curieux, nous donnons ci-dessous d'autres propriétés des fonctions trigonométriques (que nous n'aurons pas le temps d'aborder dans le cours).

2.4.1 Propriétés des fonctions trigonométriques

Voici quelques propriétés satisfaites par les fonctions trigonométriques.

Proposition 4. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$ les identités suivantes sont satisfaites :*

- $\cos(x) \in [-1; 1]$ et $\sin(x) \in [-1; 1]$,
- $\cos(x + k2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + k2\pi) = \sin(x)$, ces fonctions sont dites 2π -périodiques,
- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

Remarque. Graphiquement, le fait que les fonctions trigonométriques soient 2π -périodique signifie qu'il est possible de reconstruire la courbe de la fonction associée en connaissant seulement son tracé sur un intervalle de longueur 2π .

Voici à présent d'autres propriétés, plus géométriques cette fois-ci. Il en existe encore d'autres mais nous ne les aborderons pas dans ce cours.

Proposition 5. *Pour tout réel x , nous avons*

- (Autour du cosinus) $\cos(x) = \cos(-x)$ et $-\cos(x) = \cos(x - \pi) = \cos(x + \pi)$.
- (Autour du sinus) $\sin(x) = \sin(\pi - x)$ et $-\sin(x) = \sin(-x) = \sin(\pi + x)$.
- (Relation entre les deux) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$.

Remarque. Certaines de ces propriétés se traduisent de manière graphique :

- le fait que $\cos(-x) = \cos(x)$ signifie que la fonction $x \mapsto \cos(x)$ est paire. Son graphe admet donc une symétrie axiale par rapport à l'axe des ordonnées.
- le fait que $\sin(-x) = -\cos(x)$ signifie que la fonction $x \mapsto \sin(x)$ est impaire. Son graphe admet donc une symétrie centrale centrée en l'origine.

Il est d'ailleurs essentiel, pour chacun des propriétés listées ci-dessous, d'être en mesure de faire un dessin l'illustrant.

A toute fin utile³ mentionnons également les formules d'additions suivantes :

3. Leur utilisation est plus fréquente dans l'enseignement supérieur qu'au lycée.

Proposition 6 (Formule d'additions). *Soient a, b deux réels alors*

$$\cos(a \pm b) = \cos(a) \cos(b) \mp \sin(a) \sin(b) \quad \text{et} \quad \sin(a \pm b) = \sin(a) \cos(b) \pm \cos(a) \sin(b)$$

Remarque. Le lecteur pourra retenir que le **cos**inus ne **co**habite pas ainsi que les abréviations « co co/si si » et « si co/co si » permettant d'avoir un moyen mnémotechnique pour se souvenir des formules d'additions.

Exercice à traiter : 99 page 228.

Enfin, passons à la résolution d'équations impliquant cosinus et sinus.

2.4.2 Equations trigonométriques

Enfin, pour conclure ce chapitre, il faudra résoudre des équations de la forme

$$\cos(x) = u \quad \text{ou} \quad \sin(x) = u \quad \text{avec} \quad u \in [-1; 1]$$

Autrement dit, lorsque u est une valeur donnée, il faut trouver l'ensemble des réels x satisfaisant les équations précédentes. Pour résoudre, ceci nous avons le résultat suivant

Proposition 7. *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, nous avons les relations suivantes :*

- $\cos(x) = \cos(a) \iff \{x = \pm a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
- $\sin(x) = \sin(a) \iff \{x = a + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi - a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Remarque. En pratique pour résoudre $\cos(x) = u$ il faudra d'abord trouver $a \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(a) = u$ pour ensuite appliquer le résultat précédent (il est donc essentiel de connaître les valeurs remarquables de trigonométrie pour faire ceci). Ce genre d'équations sera très important l'année prochaine lorsque vous étudierez les nombres complexes.

Exercices à traiter : 2p216 (résolu) et 40,45,50p221.

2.4.3 Pour aller encore plus loin

Les fonctions trigonométriques sont très importantes en mathématiques et elles jouent un rôle essentiel dans la théorie inventée par J. Fourier (1768 – 1830). Dans cette théorie, ce mathématicien français s'est demandé s'il était possible de décomposer une fonction f (vérifiant certaines hypothèses) afin de l'exprimer comme somme (infinie) de fonctions trigonométriques. De manière formelle, Fourier s'est demandé à quelles conditions est-il possible d'écrire l'identité suivante

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}?$$

Ce type de questionnement a permis de résoudre de manière élégante de nombreux problèmes. Citons-en deux pour l'exemple :

1. Plaçons dans le plan et supposons que nous ayons à disposition une corde (fermée) de longueur fixée $l \in \mathbb{R}$. Lorsque cette corde est déposée dans le plan, elle entoure une région de celui-ci auquel il devient possible d'associer une aire. Une question très ancienne est alors la suivante : quelle est l'objet géométrique (définie par la corde) admettant l'aire maximale ? Il s'agit du problème isopérimétrique euclidien ; ce dernier admet de nombreuses généralisations très intéressantes.
2. Ces fonctions trigonométriques interviennent également dans la résolution de l'équation de la chaleur. Cette dernière modélise de quelle manière la chaleur se diffuse dans une barre métallique (dont les extrémités seraient chauffées). Contrairement aux équations que vous avez l'habitude de rencontrer, une solution de l'équation de la chaleur n'est pas un nombre mais une fonction (laquelle décrit de quelle manière la chaleur se propage dans la barre de fer) et il est possible d'exprimer celle-ci à l'aide des fonctions trigonométriques.

Les idées de Fourier furent fécondes et donnèrent lieu à de nombreuses extensions (la transformée de Fourier par exemple) et permirent de résoudre de nombreux problèmes d'équations aux dérivées partielles dont l'équation de la chaleur est un exemple.

2.5 Bilan du chapitre

Voici les éléments à savoir maîtriser dans ce chapitre :

- Conversion radian-degrés ;
- Déterminer la mesure principale d'un angle orienté ;
- Connaître les valeurs trigonométriques remarquables ainsi que les aspects graphiques associés (placer un point sur le cercle trigonométrique, lire la valeur de son cosinus et sinus).