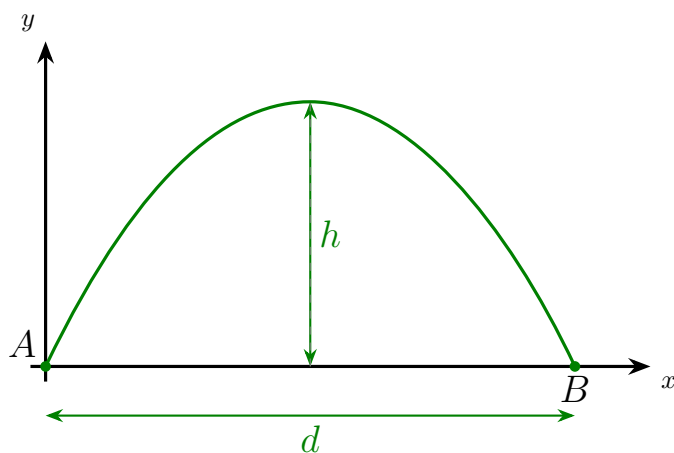


Chapitre 3

Second degré

3.1 Introduction

La trajectoire du projectile de la catapulte ressemble à au dessin que nous pourrions faire si nous devons dessiner un arc en ciel. Schématiquement, nous avons obtenu



Avec A indiquant l'emplacement de la catapulte et B l'endroit où le projectile atterri. Plusieurs questions se posent alors :

- Quelle type de fonctions permet d'obtenir des courbes ayant cette allure ?
- Est-il possible de connaître d la distance séparant la catapulte A du point d'impact B ?
- Quelle est la hauteur maximale atteinte pour notre projectile ?

Débutons par notre première interrogation. Au regard des courbes rencontrées en classe de seconde, cette courbe ne peut-être associée à une fonction affine puisque celles-ci sont représentées par des droites. Il faut employer des fonctions plus élaborées.

Définition 3.1.1. Une fonction polynomiale de degré deux¹ est une fonction de la forme

$$f : x \mapsto ax^2 + bx + c$$

avec $a \neq 0$ et $b, c \in \mathbb{R}$ des coefficients réels.

Remarque. Le domaine de définition de f est l'ensemble des réels $\mathbb{R}$.

Les formules que nous allons étudier cette année vont essentiellement reposer sur les valeurs des coefficients a, b et c . Il est donc essentiel de savoir les identifier.

- Exemple 3.1.1.**
1. Si $f(x) = -3x^2 + 12x - 4$ alors $a = -3$, $b = 12$ et $c = -4$.
 2. Si $g(x) = 10 - x^2 + 3x$ alors $a = -1$, $b = 3$ et $c = 9$. Il faut d'abord ordonner les termes pour ensuite déterminer celui associé à x^2 , celui de x et le terme constant.
 3. Si $h(x) = x^2 + \sqrt{2}$ alors $a = 1$, $b = 0$ et $c = \sqrt{2}$.
 4. $u(x) = 2x - 7$ n'est pas un polynôme de degré 2 car il n'y a pas de termes en x^2 .

Exercices à traiter : 7 page 96.

3.2 Forme canonique

Cherchons à présent à répondre à notre deuxième question, à savoir : comment faire pour déterminer la hauteur maximale atteinte par notre projectile ?

Pour cela, il va être nécessaire transformer l'écriture de notre polynôme de degré 2 : nous allons déterminer sa forme canonique.

Définition 3.2.1. La forme canonique d'un polynôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ de degré 2 consiste à exprimer f sous la forme suivante :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Il s'agit d'un simple jeu d'écriture reposant sur l'utilisation d'identités remarquables.

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Voyons cela sur des exemples.

- Exemple 3.2.1.**
1. Soit $f(x) = x^2 - 2x + 1$. Nous reconnaissons une identité remarquable, ainsi en choisissant $a = x$ et $b = -1$, nous obtenons

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 + 0.$$

Il s'agit bien d'une forme canonique avec $a = 1$, $\alpha = 1$ et $\beta = 0$.

1. Appelée aussi trinôme du second degré

2. Soit $f(x) = x^2 - 2x - 15$. Cette fois-ci, nous ne pouvons pas utiliser directement une identité remarquable² : il faut être malin. Observons que le début de notre polynôme $x^2 - 2x$ ressemble fortement au début d'une identité remarquable avec $a = x$ et $b = -1$. Nous aimerions utiliser

$$(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1 \quad (3.2.1)$$

mais nous avons -15 dans notre formule initiale plutôt que $+1$. Cependant, nous pouvons tout de même utiliser (3.2.1) pour isoler $x^2 - 2x$. Cela donne,

$$x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1.$$

Ceci est pratique car nous pouvons substituer tout cela dans notre formule initiale :

$$f(x) = (x^2 - 2x) - 15 = (x - 1)^2 - 1 - 15 = (x - 1)^2 - 16$$

et aboutir à une forme canonique où $a = 1$, $\alpha = 1$ et $\beta = -16$.

3. Si $f(x) = x^2 + 4x + 5$, nous avons alors

$$f(x) = x^2 + 4x + 1 = (x + 2)^2 - 4 + 1 = (x + 2)^2 + 1.$$

Ici $a = 1$, $\alpha = -2$ et $\beta = 1$.

Remarque. Le lecteur aura constaté qu'il suffit de diviser b par 2 pour trouver la valeur du nombre ? apparaissant dans le début de l'identité remarquable $(x + ?)^2 = \dots$

Exercices à traiter : 9 page 96 (Qa et Qc) ; 11 page 96 à faire (cf. méthode 3 page 83).

Il se trouve qu'il est toujours possible de mettre un polynôme du second degré sous forme canonique. Comme nous allons le voir par la suite, cette écriture particulière permettra de déterminer les extremums d'une fonction polynomiale de degré deux mais aussi de résoudre facilement les équations du second degré (ce que nous ferons dans un chapitre ultérieur).

Proposition 8 (Forme canonique). *Tout polynôme du second degré peut s'écrire sous la forme canonique*

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta \quad x \in \mathbb{R}$$

où $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

Démonstration. Soit f un polynôme du second degré : nous avons $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. Puisque a est non nul, il est alors possible d'écrire

$$f(x) = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right)$$

En imaginant que les termes $x^2 + \frac{b}{a}x$ sont le début d'une identité remarquable

2. Il y a un problème avec la valeur de b^2 .

$$(x + \dots)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \dots$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} f(x) &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left[\left(x^2 + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] \\ &= a \left[\left(x^2 + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \right) \right] \\ &= a \left(x^2 + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à vérifier que $f(\alpha) = -\frac{b^2-4ac}{4a}$ pour conclure. $\square$

Pour l'instant, il n'est pas clair du tout pourquoi cette nouvelle écriture (la forme canonique) est utile. Nous avons juste l'impression d'avoir procédé à un jeu d'écriture impliquant du calcul algébrique. Voyons à quoi cela peut servir.

3.3 Représentation graphique d'un polynôme du second degré

Reprenons notre exemple initial avec la catapulte.

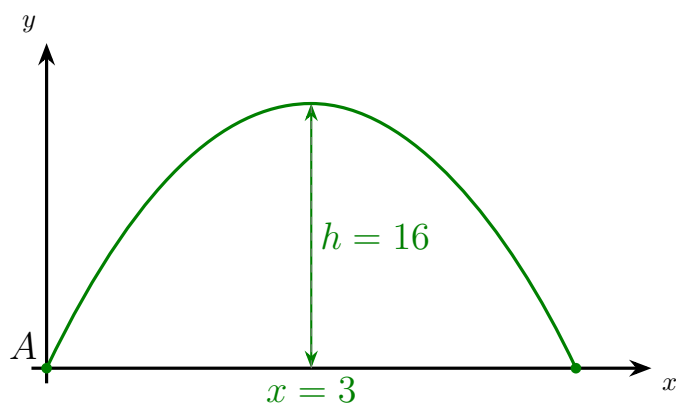
Exemple 3.3.1. Supposons que la fonction représentant notre trajectoire s'écrive $f(x) = -2x^2 + 6x$. Déterminons sa forme canonique :

$$f(x) = -2x^2 + 6x = -2[x^2 - 6x] = -2[(x-3)^2 - 9] = -2(x-3)^2 + 18.$$

Observons maintenant la chose suivante : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (x-3)^2 \geq 0 &\iff -2(x-3)^2 \leq 0 \quad (\text{le sens de l'inégalité doit changer car } -2 < 0) \\ &\iff -2(x-3)^2 + 16 \leq 16 \\ &\iff f(x) \leq 16. \end{aligned}$$

Nous venons de montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq 16$ et un rapide calcul montre que $f(3) = 16$. En d'autres termes nous avons montré que 16 est un maximum pour la fonction atteint lorsque $x = 3$. Graphiquement,



Autrement dit, la projectile atteint une hauteur maximale de 16m à 3m de distance de la catapulte.

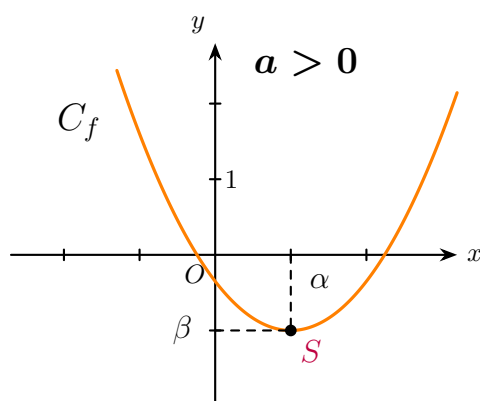
Ce que nous venons d'observer est complètement général : la forme canonique d'un polynôme du second degré permet d'en déduire ses variations et ses extremums.

Proposition 9 (Variations et extremum d'un polynôme de degré 2). *La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f est une **parabole** dont l'axe de symétrie est la droite d'équation $x = \alpha$ et dont le sommet **S** a pour coordonnées **S**(α ; β) où $\beta = f(\alpha)$. Plus précisément,*

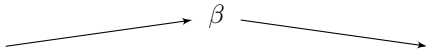
1. De plus, si $a > 0$, f atteint son **minimum** β au point α :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$			

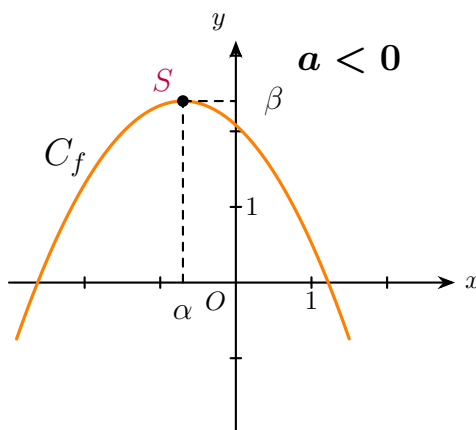
Graphiquement, nous avons



2. Si $a < 0$, f atteint alors son **maximum** β en $x = \alpha$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$			

Graphiquement, cela donne



Démonstration. A partir de la forme canonique, nous remarquons que f est une parabole dont les paramètres sont donnés par les réels (a, α, β) . Nous distinguons alors deux cas de figure :

- Si $a > 0$, la fonction $g(x) = a(x - \alpha)^2$ est décroissante pour $x \leq \alpha$ et croissante pour $x \geq \alpha$. De plus, elle admet un minimum en $x = \alpha$. Par conséquent, la fonction f étant une translation de g , f admet les mêmes variations. Le point minimal de sa courbe représentative est donné par $S(\alpha, f(\alpha))$.
- Si $a < 0$, la fonction g a des variations opposées au cas précédent. La fonction f admet alors un maximum en $x = \alpha$.

□

Remarque. Lorsque $a > 0$ (resp. $a < 0$), il est coutume de dire que la parabole est orientée vers le bas (resp. vers le haut).

Il convient à présent d'être en mesure d'associer représentation graphique, tableaux de variations et formes canoniques.

Exercices à traiter : 18p67, 12p96, 16p96 et 14 p96 (cf. exemple 1 page 85) ; 13 et 15 page 96 à faire à la maison.