

Chapitre 4

Nombre dérivé, fonction dérivée

4.1 Introduction

La notion de « dérivée » a mis du temps à être parfaitement saisie par les mathématiciens. Il est possible de trouver des traces de celle-ci dans certains travaux de Fermat en 1636 mais aussi dans ceux de Descartes ou Cavalieri à la même époque. Cependant, les véritables pères fondateurs du calcul infinitésimal (menant à l'obtention de « dérivées ») sont Leibniz et Newton au 17ème siècle. A cette époque, Newton parlait de « fluxion » qu'il définit comme « le quotient ultime de deux accroissements évanescents ».

Comme nous allons le voir, une manière d'aborder le « nombre dérivée » se fait par le biais de tangentes à une courbe. L'étude de tels objets fut initié par Pascal dans la première moitié du 17ème siècle.

Ces nouveaux objets mathématiques mettent en jeu des idées « d'infiniment petit » et de « limite » qui sont pas encore bien maîtrisées à l'époque et engendrent certains problèmes. Il fallut l'intervention de d'Alembert au 18ème siècle pour définir la « dérivée » comme limite de taux d'accroissement d'une fonction et patienter jusqu'au milieu du 19ème siècle pour que Weierstrass formalise la notion de « dérivée ». Ce nouveau terme, ainsi que sa notation, furent inventé par Lagrange à la fin du 18ème siècle.

Après ces quelques mots historiques, voyons, sur des exemples ce que nous allons chercher à faire.

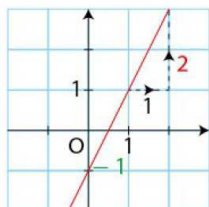
En classe de seconde, vous avez appris à dresser des tableaux de variations à l'aide d'une représentation graphique. Cela prenait la forme suivante

x	-10	-3	2	5
$f(x)$	-1	4	1	3

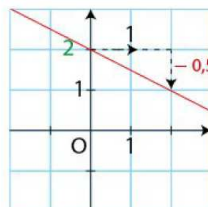
Ensuite, le cas particulier des fonctions affines $f(x) = ax + b$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$) a été étudié.

Par exemple, pour $f(x) = 2x - 1$ ou $g(x) = -0.5x + 2$ nous avons les représentations graphiques suivantes

Représentation graphique de la fonction affine
 $x \mapsto 2x - 1$ dans un repère.



Représentation graphique de la fonction affine
 $x \mapsto -0.5x + 2$ dans un repère.



et nous en déduisons les tableaux de variations suivants :

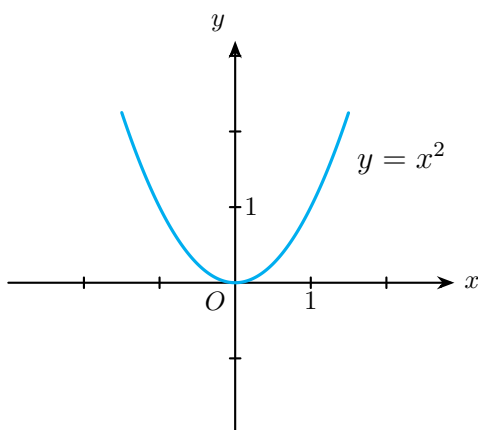
x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	↗	

x	$-\infty$	$+\infty$
$g(x)$	↘	

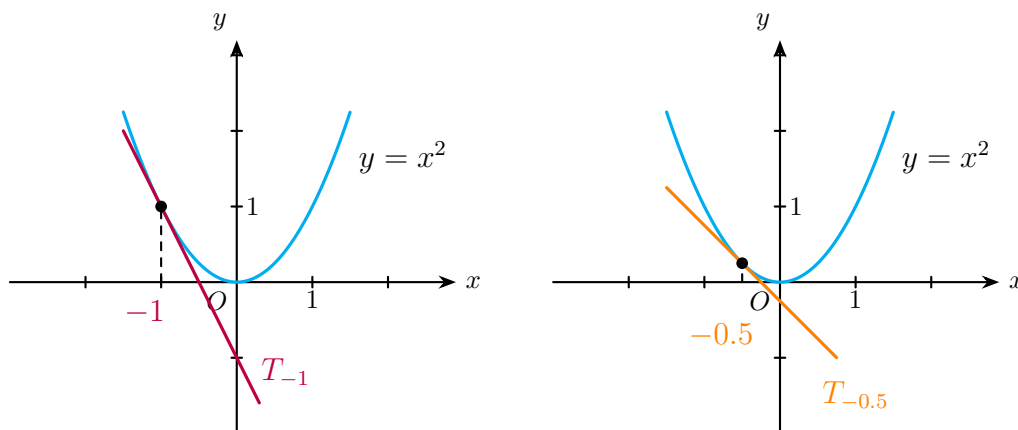
Le point essentiel étant que les variations d'une fonction affine sont déterminées par **le signe du coefficient directeur a** :

- Si $a > 0$, la fonction affine est **croissante** sur $\mathbb{R}$.
- Si $a < 0$, la fonction affine est **décroissante** sur $\mathbb{R}$.

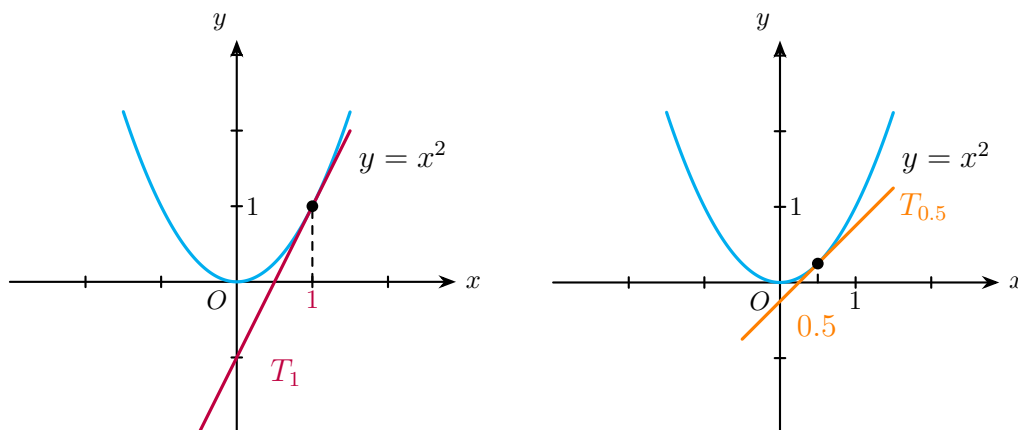
Nous aimerions à présent obtenir une règle aussi simple pour déterminer les variations d'une fonction quelconque. Il paraît naturel de chercher à tester ceci sur des polynômes de degré 2. Le plus simple d'entre eux étant $f(x) = x^2$.



Nous constatons immédiatement que que nous faisons ne marchera pas immédiatement car la fonction est d'abord décroissante puis croissante. Il va falloir trouver autre chose. Nous allons alors ajouter des droites particulières à notre figure, nous allons dessiner des droites qui vont être « collées » à notre courbe : de sorte à ce que ces droites ne rencontrent notre parabole qu'en un seul point.



Ci-dessus, nous avons dessiné la tangente T_{-1} au point -1 ainsi que la tangente $T_{-0.5}$ au point -0.5 . Nous observons d'ailleurs que, sans connaître de formule exacte, **les coefficients directeurs de ces deux tangentes sont forcément négatifs** (puisque les droites « pointent » vers le bas) ; au même endroit la fonction $f(x) = x^2$ est **décroissante**. Traçons d'autres tangentes, pour voir ce qui se produit ailleurs.



Cette fois-ci, nous observons que **les coefficients directeurs de ces deux tangentes sont forcément positifs** (puisque les droites « pointent » vers le haut) ; au même endroit la fonction $f(x) = x^2$ est **croissante**.

En résumé, nous venons d'observer le fait suivant :

Le signe du coefficient directeur d'une tangente est lié aux variations d'une fonction.

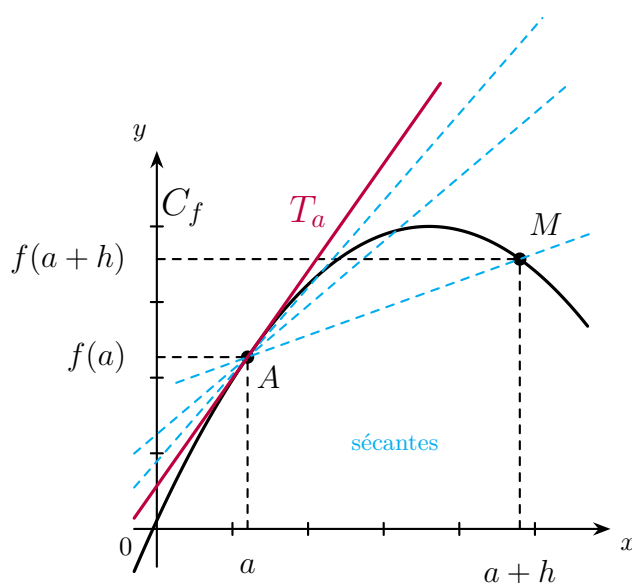
Dès à présent, notre objectif est le suivant : étant donnée une fonction f comment obtenir une nouvelle fonction dont les valeurs correspondront aux coefficients directeurs des tangentes. Une fois cette nouvelle fonction déterminée, il nous restera plus qu'à étudier son signe pour déterminer les variations de la fonction de départ. Il ne nous reste plus qu'à développer les outils nécessaires permettant d'atteindre cet objectif.

4.2 Nombre dérivée et fonctions dérivées

Notre premier objectif est d'être capable de déterminer la valeur du coefficient directeur d'une tangente. Pour cela, le plus simple consiste à faire la construction suivante : étant donnée une fonction f ,

1. nous traçons sa courbe représentative ;
2. nous traçons ensuite une droite sécante passant par les points $A(a; f(a))$ et M se trouvant sur la courbe ;
3. ensuite, nous allons faire en sorte que l'abscisse du point B se rapproche de plus en plus de celle du point A . Au fur et à mesure de cette opération, la sécante passant par A et M change de position pour finalement (lorsque A et M sont confondus) coïncider avec la tangente à la courbe au point A .

Graphiquement, cela se représente comme suit.



Voyons à présent ce que cela donne formellement. Dans ce qui suit, I désignera un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ (il s'agira souvent d'un intervalle) sur lequel nos fonctions seront définies.

Définition 4.2.1. Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$ ¹. Lorsque la limite suivante existe

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = l < \infty$$

Nous dirons que la fonction est dérivable au point a et nous noterons cette limite par $f'(a)$. Il s'agit du nombre dérivée de f au point a qui correspond au coefficient directeur de la tangente T_a à la courbe C_f au point d'abscisse a .

Remarque. Observons que le taux d'accroissement

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{a+h-a}$$

correspond au coefficient directeur de la sécante passant par les points $A(a; f(a))$ et $M(a+h; f(a+h))$ appartenant à la courbe C_f .

La notation $\lim_{h \rightarrow 0}$ signifie que la valeur de h devient aussi proche de 0 que nous le voulons. C'est précisément ce procédé qui permet de rapprocher M du point A .

Commençons par l'aspect graphique du nombre dérivée.

Exercices à traiter : 17 et 20 page 127 ; 19p127 Q1 à faire à la maison.

Voyons comment appliquer la définition formelle sur deux exemples.

Exemple 4.2.1. 1. Soit $f(x) = 3x - 1$, cherchons à déterminer le nombre dérivée au point $a = 2$.

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{3(2+h) - 1 - 5}{h} = \frac{3h}{h} = 3.$$

Ce qui est rassurant car nous savions que le coefficient directeur de cette droite valait 3

2. Faisons de même, cette fois-ci avec la fonction $f(x) = x^2$ au point $a = 1$.

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \frac{h^2 + 2h + 1 - 1}{h} = \frac{h^2 + 2h}{h} = h + 2.$$

D'où

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 2.$$

Autrement dit le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point 1 vaut $f'(1) = 2$.

Exercices à traiter : 9p126.

Comme vous venez de le constater, cette définition n'est pas très manipulable en pratique. Il sera plus commode d'utiliser un formulaire² dans lequel les dérivées des fonctions usuelles ont déjà été calculées.

1. Nous supposons implicitement que a se trouve à l'intérieur de I de sorte que nous ayons aussi $a+h \in I$ lorsque h est suffisamment petit.

2. Qu'il faudra connaître sur le bout des doigts.

Proposition 10. *Le tableau suivant fournit le domaine de définition ainsi que la dérivée de fonctions usuelles.*

Fonction	Domaine de définition	Expression	Domaine dérivation	Dérivée
constante	$\mathbb{R}$	$f(x) = p$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
identité	$\mathbb{R}$	$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$
carré	$\mathbb{R}$	$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
cube	$\mathbb{R}$	$f(x) = x^3$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 3x^2$
inverse	$\mathbb{R}_*$	$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
racine	$\mathbb{R}_+$	$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
exponentielle	$\mathbb{R}$	$f(x) = e^{ax}$ avec $a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = ae^x$

Remarque. 1. La dernière fonction est peu nouvelle et sera étudiée plus en détail dans un chapitre ultérieur.

- Plus généralement, il est possible de dériver toutes les fonctions puissances. En effet, si $n \in \mathbb{N}^*$ et $f(x) = x^n$ alors $D_f = \mathbb{R}$ et $f'(x) = nx^{n-1}$.
- Ceci est également valable pour les fonctions du type :

$$g(x) = \frac{1}{x^n} \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}_* \quad \text{et } x \neq 0.$$

En effet, si $x \neq 0$ alors $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ et ainsi $g'(x) = -nx^{-n-1} = -\frac{n}{x^{n+1}}$. Le cas $n = 1$ permet de retrouver la formule de dérivée de la fonction inverse :

$$h(x) = \frac{1}{x^1} = x^{-1} \quad \text{et } h'(x) = -1x^{-1-1} = -\frac{1}{x^2}$$

- Ceci fonctionne aussi pour la fonction racine : il suffit s'observer que $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ pour $x \geq 0$ et donc, par mimétisme,

$$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Démonstration. Démontrons certains de ces résultats.

- Si f est une fonction constante, i.e. $f(x) = p$ avec $p \in \mathbb{R}$. Nous obtenons alors

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{p - p}{h} = 0 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

- Si f est la fonction carré, i.e. $f(x) = x^2$. Alors

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = 2x + h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 2x$$

3. Si, nous considérons la fonction inverse, i.e. $f(x) = \frac{1}{x}$. Nous obtenons

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{\frac{x-(x+h)}{(x+h)x}}{h} = \frac{-h}{(x+h)x} \times \frac{1}{h} = -\frac{1}{(x+h)x} \xrightarrow{h \rightarrow 0} -\frac{1}{x^2}$$

4. La démonstration pour les fonctions puissances et racine sont admises. Le cas de la fonction cube est laissé à titre d'exercice.

□

Mettons ce formulaire en pratique sur un exemple impliquant cette nouvelle fonction.

Exemple 4.2.2.

$$(e^{-3x})' = -3 \times e^{-3x} \quad (e^x)' = e^x \quad (e^{0.12x})' = 0.12 \times e^{0.12x}.$$

Il est important d'observer que toutes les fonctions ne sont pas dérivables. Voyons ceci au travers de deux exemples.

Exemple 4.2.3. 1. La fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ définie par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{sinon} \end{cases}$$

n'est pas dérivable en $a = 0$. En effet, si $h > 0$, nous avons

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = 1$$

tandis que si $h < 0$, nous avons

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = -1$$

Les limites à gauche et à droite (en zéro) étant différentes, nous ne pouvons avoir l'existence d'un nombre l tel que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} = l,$$

la fonction n'est donc pas dérivable en 0 (mais elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$).

2. Nous allons montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0. Cette fonction étant définie sur $\mathbb{R}_+$, il suffit de montrer que la limite

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h}$$

n'est pas finie. Ceci découle du fait que $\frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$ (h étant positif); il ne reste plus qu'à observer que $\frac{1}{\sqrt{h}}$ devient de plus en plus grand lorsque h se rapproche de 0. Autrement dit,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} = +\infty$$

d'où le résultat. Pour être véritablement rigoureux, il faudrait procéder par l'absurde afin d'utiliser l'observation précédente. Plus précisément, il faudrait supposer qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} = l$$

pour ensuite montrer qu'il est possible de choisir h suffisamment proche de zéro tel que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} > l$$

En effet, si h est choisi tel que $0 < h < \frac{1}{(1+l)^2}$ alors (d'après les propriétés de monotonie des fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+$ nous en déduisons que

$$\frac{1}{\sqrt{h}} > l + 1 > l$$

Le formulaire que nous venons de découvrir est très utile mais est, pour l'instant, insuffisant pour traiter les fonctions que nous allons rencontrer. Pour cela, nous avons besoin d'ajouter quelques règles supplémentaires.

4.2.1 Dérivation des opérations élémentaires

A tout ceci s'ajoute plusieurs règles de dérivations permettant de traiter des fonctions plus complexes : si je connais la dérivée de u et la dérivée de v , puis-je en déduire la dérivée de $u+v$? de uv ? de $\frac{u}{v}$ (lorsque v ne s'annule pas) ? Ces règles de dérivations sont essentielles et sont résumées dans la proposition qui suit.

Proposition 11 (Dérivée d'une somme). *Soient u, v deux fonctions dérivables sur I et $k \in \mathbb{R}$.*

1. $(k \times u)' = k \times u'$.
2. $(u + v)' = u' + v'$.

Démonstration. Démontrons le cas de la dérivée d'une somme :

$$\begin{aligned} \frac{(u+v)(x+h) - (u+v)(x)}{h} &= \frac{u(x+h) + v(x+h) - u(x) - v(x)}{h} \\ &= \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} u'(x) + v'(x) \end{aligned}$$

puisque les fonctions u et v sont supposées dérivables. □

Voyons sur un exemple.

Exemple 4.2.4. Soit $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x + 12$. Tout d'abord nous voulons calculer $f'(x)$. Les règles présentées ci-dessus combinées au formulaire de dérivation des fonctions usuelles montrent que

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^3)' + (-4x^2)' + (4x)' + (12)' \\ &= 3x^2 - 4 \times (x^2)' + 4 \times (x)' + 0 \\ &= 3x^2 - 4 \times 2x + 4 \times 1 \\ &= 3x^2 - 8x + 4. \end{aligned}$$

Exercices à traiter : feuille associée sur la dérivation de sommes de fonctions ; 21,23p127.

Voyons maintenant ce qui se passe dans le cas d'un produit de fonctions dérivables.

Proposition 12 (Dérivée d'un produit). *Soient u, v deux fonctions dérivables sur I . Alors*

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Remarque. En particulier, lorsque $v = u$, nous avons $(u^2)' = u'u + uu' = 2uu'$. Il est primordial de retenir les faits suivants :

la dérivée d'un produit n'est pas le produit des dérivées !

Voyons cela sur deux exemples.

Exemple 4.2.5. 1. Soit $f(x) = (3x^2 + 4x)(5x - 1)$ est le produit de deux fonctions dérivables $u(x) = 3x^2 + 4x$ et $v(x) = 5x - 1$. Ainsi, nous avons $u'(x) = 6x + 4$ et $v'(x) = 5$ d'où

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = (6x + 4)(5x - 1) + (3x^2 + 4x) \times 5 = 45x^2 + 34x - 4.$$

2. Soit $g(x) = (-4x^3 + 7x - 1)e^{-x}$ est le produit de deux fonctions dérivables $u(x) = -4x^3 + 7x - 1$ et $v(x) = e^{-x}$. Ainsi, nous avons $u'(x) = -12x^2 + 7$ et $v'(x) = -e^{-x}$ d'où

$$\begin{aligned} f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) &= (-12x^2 + 7)(e^{-x}) + (-4x^3 + 7x - 1) \times (-e^{-x}) \\ &= (-12x^2 + 7 + 4x^3 - 7x + 1)e^{-x} \\ &= (4x^3 - 12x^2 - 7x + 8)e^{-x}. \end{aligned}$$

Exercices à traiter : Fiche associée.

Passons enfin à la dérivation de quotients de fonctions dérivables.

Proposition 13 (Dérivée d'un quotient). *Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I . Si v ne s'annule pas sur I alors $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et*

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Remarque. 1. Si $u(x) = 1$ pour tout $x \in I$, la formule précédente nous assure que

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}.$$

2. Il est essentiel de retenir que

la dérivée d'un quotient n'est pas le quotient des dérivées !

Traitons un exemple d'application.

Exemple 4.2.6. Soit $h(x) = \frac{-12x+3}{2x+4}$. Déterminons h' sur l'intervalle $] -2, +\infty[$, pour cela nous allons utiliser la formule de dérivation d'un quotient avec

$$u(x) = -12x + 3 \quad \text{et} \quad v(x) = 2x + 4.$$

Par suite, $u'(x) = -12$ et $v'(x) = 2$ c'est pourquoi nous obtenons

$$h'(x) = \frac{-12 \times (2x+4) - (-12x+3) \times 2}{(2x+4)^2} = \frac{-54}{(2x+4)^2}.$$

Exercices à traiter : Fiche associée.

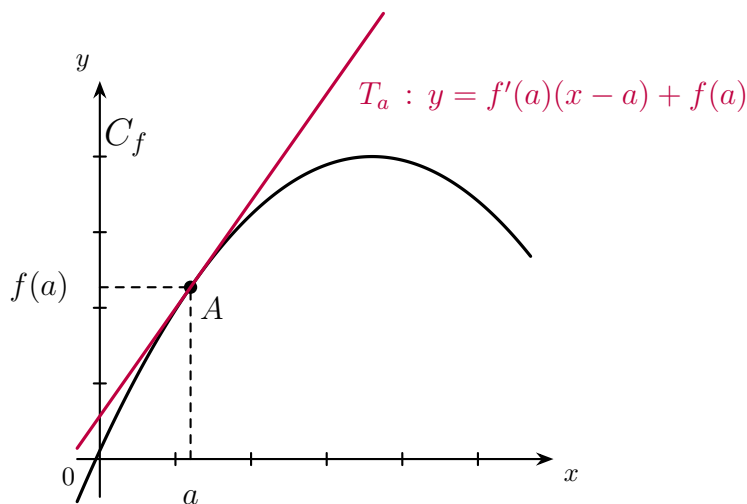
A partir de ces règles, il sera possible de dériver toutes les fonctions que nous rencontrerons durant le cours. L'étude du signe de ces dérivées permettront ensuite de déterminer les variations de la fonction initiale. Nous y reviendrons dans un chapitre ultérieur. Le lien entre dérivation et tangentes a été fait durant l'introduction, il est temps de revenir sur ce point maintenant que nous sommes en mesure de calculer des fonctions dérivées.

4.3 Tangente et nombre dérivée

Pour conclure ce chapitre, nous énonçons ci-dessous la formule permettant de déterminer (lorsque cela existe) l'équation de la tangente à une courbe. Fournissant une formule rigoureuse du phénomène que nous avons observé au début de ce chapitre.

Proposition 14. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $I \subset \mathbb{R}$. L'équation de la tangente T_a à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $a \in I$ est alors donnée par

$$T_a : y = f'(a)(x - a) + f(a).$$



Remarque. 1. En pratique, l'énoncé de l'exercice fournit la valeur de a et il ne reste plus qu'à déterminer $f'(a)$ et $f(a)$ pour appliquer la formule. A priori (sauf si $f'(a) = 0$) l'équation obtenue doit encore dépendre de x et de y à la fin.

2. Soulignons à nouveau que le nombre dérivée $f'(a)$ correspond au coefficient directeur de la tangente T_a .
3. Il se trouve que la quantité $f'(a)(x - a) + f(a)$ est une approximation satisfaisante de $f(x)$ lorsque x est proche de a . Par exemple, si $f(x) = x^2$ nous avons $f'(x) = 2x$. Choisissons alors $a = 2$ et $x = 2,1$, nous obtenons

$$f(2,01) = 2.1^2 = 4,41 \quad \text{tandis que} \quad f'(2)(x - a) + f(a) = 4 \times 0,1 + 4 = 4,4.$$

L'erreur commise par cette approximation est seulement de 0.01.³

Voyons ceci sur un exemple.

Exemple 4.3.1. Soit $f(x) = 3x^3 - 6x^2 + 5x - 1$.

1. Déterminons l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse $a = 2$. Pour cela nous devons déterminer la fonction dérivée. Ici, $f'(x) = 9x^2 - 12x + 5$. Ainsi, $f'(2) = 9 \times 4 - 12 \times 2 + 5 = -7$ et $f(2) = 2 \times 8 - 6 \times 4 + 10 - 1 = 1$. L'équation de la tangente est donc

$$T_2 : \quad y = f'(2)(x - 2) + f(2) \quad \Longleftrightarrow \quad y = -7(x - 2) + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad y = -7x + 15$$

2. Est-il possible que C_f admette des tangentes parallèles à la droite d'équation $d : y = 5x - 1$. Pour que cela soit le cas, il faut que les coefficients directeurs coïncident. Nous cherchons donc $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$f'(a) = 5 \quad \Longleftrightarrow \quad 9a^2 - 12a = 0 \quad (3a - 4)a = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0 \quad \text{ou} \quad a = \frac{4}{3}$$

Ainsi les tangentes T_0 et $T_{\frac{4}{3}}$ sont les seules tangentes parallèles à la droite d .

Exercices à traiter : 28, 33 page 128 et 4p133.

4.4 Bilan du chapitre

Voici les savoirs faire à acquérir dans ce chapitre :

- Savoir utiliser les formules de dérivations des fonctions usuelles.
- Savoir dériver des produits, sommes, quotients, composées de fonctions usuelles.
- Savoir calculer l'équation de la tangente à une courbe.
- Interpréter le nombre dérivé en fonction du contexte.
- Déterminer le nombre dérivé graphiquement, construire la tangente à la courbe connaissant le nombre dérivé.

3. Finalement, cela signifie qu'un voisinage d'un point une fonction dérivable peut être approchée par un polynôme de degré 1 et que l'erreur commise est raisonnable.

4.5 Pour aller plus loin

4.5.1 Modèle dynamique

En classe de terminale, il est possible de rencontrer des équations différentes de celles étudiées jusqu'à présent. Dans celles-ci vous n'aurez pas à déterminer un ensemble de nombre réels vérifiant une relation donnée. Par exemple, déterminer tous les nombres réels x tels que

$$3x - 1 = 0$$

En terminale, on vous demandera de trouver toutes les fonctions f vérifiant certaines conditions. Par exemple, quelles sont les fonctions dont la dérivée est le double de la fonction de départ? Autrement dit, quelles sont les fonctions dérivables f vérifiant l'identité suivante :

$$f'(x) = 2f(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Il s'agit d'équations dites « différentielles ». Ce genre d'objet permet de modéliser des situations réelles assez intéressantes.

Nous avons vu que la dérivée correspondait à un taux d'accroissement. Si jamais f désigne la population d'une espèce, il ne paraît donc pas absurde d'imaginer que f' permet de quantifier de quelle manière cette population augmente ou diminue.

En 1926, les mathématiciens A. J. Lotka et V. Volterra ont proposé un modèle mathématiques permettant de représenter la dynamique de population d'un couple de proies et de prédateurs (a priori, il s'agissait de lynx et de lièvre des neiges). Dans ce qui suit nous adopterons les notations suivantes :

- la fonction f désigne la population des proies,
- la fonction g désigne la population des prédateurs,
- $a \in \mathbb{R}$ désigne le taux de reproduction des proies,
- $b \in \mathbb{R}$ désigne le taux de mortalité des proies (lui même est lié à la fréquence des rencontres des proies avec leurs prédateurs),
- $c \in \mathbb{R}$ désigne le taux de reproduction des prédateurs (il dépend du nombre de proies mangées),
- $d \in \mathbb{R}$ désigne le taux de mortalité des prédateurs.

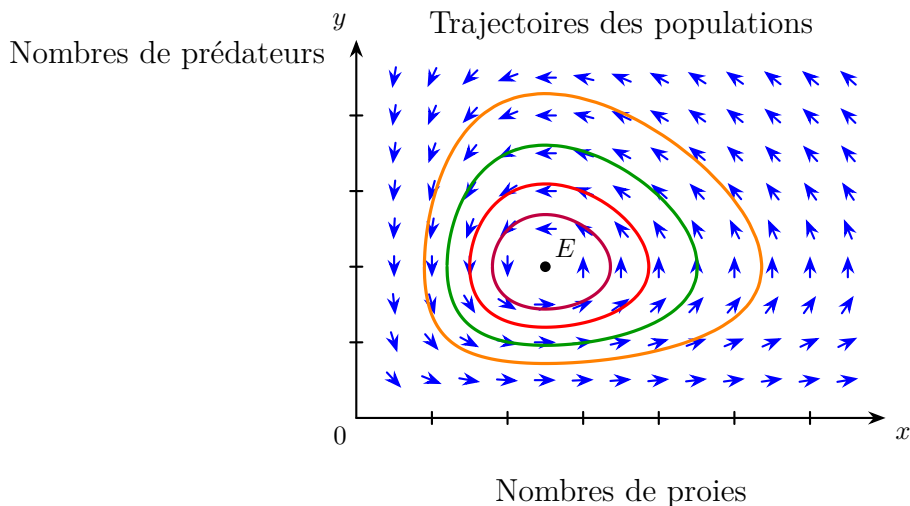
Les équations différentielles permettant de modéliser l'évolution de ces deux populations sont données par système suivant :

$$\begin{cases} f'(x) = f(x) \times (a - bg(x)) \\ g'(x) = g(x) \times (cf(x) - d) \end{cases}$$

Il se trouve qu'il n'est pas possible de résoudre explicitement ce système⁴ En revanche, étant données des conditions initiales (population de départ,...), le théorème de Cauchy-Lipschitz nous

4. i.e. trouver une formule explicite pour les fonctions f et g .

assure qu'il existe une unique solution à ce problème et il est possible de décrire ces solutions de manière qualitative (périodicité, ...) et de produire des figures graphiques.



4.5.2 Dérivées partielles

Voici quelques mots sur une généralisation de la notion de dérivation. Dans de nombreux domaines, il est souvent nécessaire de considérer des fonctions de plusieurs variables (le temps et l'espace par exemple). Mathématiquement, cela revient à considérer des fonctions de la forme

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) \end{aligned}$$

Il est alors tentant de chercher à déterminer les variations de cette fonction par rapport à la variable x ou la variable y . Pour cela, il suffit de choisir l'un d'entre elles (x par exemple) et de considérer que la seconde variable (y ici) comme étant constante. Il est alors possible d'écrire le taux d'accroissement selon la variable x pour obtenir la notion de dérivée partielle. Lorsque la limite suivante existe nous la désignerons par $\partial_x f(x, y)$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} = \partial_x f(x, y) \quad \text{pour tout } y \in \mathbb{R}.$$

Voyons plutôt sur un exemple.

Exemple 4.5.1. Posons : $f(x, y) = x + y$, alors

$$\frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} = \frac{x+h+y - (x+y)}{h} = 1 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1.$$

Autrement dit $\partial_x f(x, y) = 1$ et, de manière similaire, nous obtiendrons $\partial_y f(x, y) = 1$

De nombreuses propriétés que nous avons vu dans ce chapitre sont encore vérifiées lorsque la fonction considérée met en jeu plusieurs variables. A vrai dire, les calculs sont identiques mais

simplement plus longs à effectuer.

Cette notion de dérivée partielles est prépondérante en physique et apparait naturellement dans des équations particulières (appelées équations aux dérivées partielles) permettant de modéliser des phénomènes physiques important. Pour attiser votre curiosité, nous indiquons ci-dessous la forme de telles équations :

- pour modéliser de quelle manière la chaleur se diffuse dans un barre de fer qui serait chauffée à ses deux extrémités, nous utilisons l'équation de la chaleur :

$$\partial_t u = \frac{1}{2} \Delta.$$

- Pour modéliser le déplacement d'une onde dans un milieu donné (par exemple la vibration d'une corde de guitare), nous utilisons l'équation des ondes :

$$\partial_{tt}^2 u = c^2 \partial_{xx}^2 u \quad \text{avec } c > 0.$$

- Enfin, pour décrire les déplacements d'une particule en physique quantique, nous utilisons l'équation de Schrödinger :

$$i\partial_t u + \Delta u = 0.$$

Certaines de ces équations sont bien entendues, présentées dans une forme simplifiée et certains objets y apparaissant ne sont pas définis. Nous laissons le lecteur satisfaire sa curiosité en allant lire à ce sujet sur internet.