

Chapitre 5

Equations, inéquations du second degré

5.1 Introduction

En classe de seconde, vous avez appris à résoudre des équations de la forme

$$3x - 5 = 0 \quad \text{ou} \quad (3 - 4x)(9x - 5) = 0.$$

Par exemple, la résolution de la deuxième équation s'effectue à l'aide de la règle du produit nul :

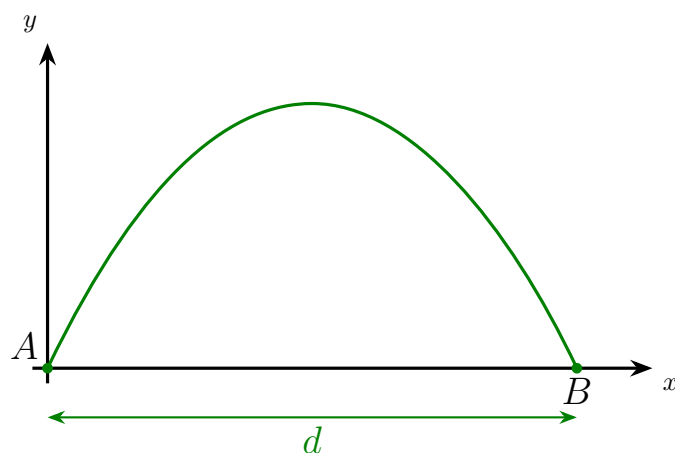
$$(3 - 4x)(9x - 5) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 3 - 4x = 0 \quad \text{ou} \quad 9x - 5 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{4}{3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{5}{9}.$$

L'ensemble des solutions de cette équation est alors noté $\mathcal{S} = \{\frac{4}{3}; \frac{5}{9}\}$. Il apparaissait clairement que l'utilisation de la *règle du produit nul* nécessitait d'avoir une **forme factorisée à disposition**. La question qui se pose à présent est la suivante : comment faire pour des équations impliquant un polynôme de degré 2 ?

Par exemple, sommes nous en mesure de résoudre les équations suivantes ?

$$x^2 + x + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 + 2x - 3 = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 - 2x + 1 = 0.$$

En particulier, si nous sommes capables de résoudre de tels problèmes, nous serons en mesure de résoudre notre problème balistique concernant la catapulte. Rappelons que sur la figure ci-dessous, A indique l'emplacement de la catapulte et B l'endroit où le projectile atterri.



Comment pouvons nous déterminer la distance d séparant la catapulte A du point d'impact B ? Pour cela, nous devons poursuivre l'étude des polynômes second degré entamée plus tôt dans l'année.

5.2 Résolution d'équations du second degré

Etant donné un polynôme de degré 2 $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$, $b, c \in \mathbb{R}$), désignons par (E) l'équation du second degré associée :

$$(E) : \quad ax^2 + bx + c = 0.$$

Faisons un point de vocabulaire.

Définition 5.2.1. Les solutions de l'équations (E) sont appelées **racines** de f .

Remarque. Graphiquement, lorsqu'elles existent, les racines correspondent à l'abscisse des points d'intersections entre la courbe C_f (associée au polynôme f) et l'axe de abscisses.

Voyons cela sur un exemple.

Exemple 5.2.1. Soit $f(x) = x^2 + 2x - 3$. Puisque $f(1) = 0$ alors 1 est une racine de f . En revanche, puisque $f(2) = 5 \neq 0$ n'est pas une racine de f .

Nous allons chercher une méthode permettant de déterminer (si elles existent) les racines d'un polynôme de degré 2. Pour cela, nous allons recycler la forme canonique rencontrée plus tôt dans l'année. Voyons cela sur un exemple.

Exemple 5.2.2. 1. Débutons par le plus simple : une identité remarquable est directement disponible. Soit $f(x) = x^2 - 2x + 1$, dans ce cas

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x - 1)^2 + 0 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 1.$$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{1\}$.

2. Soit $g(x) = x^2 + 2x - 3$, dans ce cas

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 3 = 0 &\iff (x+1)^2 - 4 = 0 &\iff (x+1)^2 - 2^2 = 0 \\ &&\iff (x+1-2)(x+1+2) = 0 \\ &\iff x = 1 \quad \text{ou} \quad x = -3. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{1; -3\}$. Ici, après avoir obtenu la forme canonique, nous avons utilisé l'identité remarquable¹ $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ afin d'obtenir une **forme factorisée** pour enfin utiliser **la règle du produit nul**.

3. Soit $h(x) = x^2 + x + 1$.

$$x^2 + x + 1 = 0 \iff \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0.$$

Cette fois-ci la présence du $+$ ne permet pas d'utiliser une identité remarquable pour factoriser. En fait, puisqu'un carré est toujours positif, nous avons, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0.$$

Le minimum de h sur $\mathbb{R}$ vaut donc $\frac{3}{4}$, la fonction h ne s'annule jamais et n'admet donc aucune racines réelles : il n'est pas possible de résoudre cette équation dans $\mathbb{R}$ et l'ensemble des solutions est vide $\mathcal{S} = \emptyset$.

L'exemple précédent nous suggère qu'une équation de degré 2 peut avoir 0 solution, 1 solution ou bien 2 solutions et que tout cela dépendait de la forme canonique (la présence ou non d'un moins après le carré). Nous allons introduire un outil et un critère simple qui va nous permettre connaître le nombre de racine et leur expression.

Définition 5.2.2. Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$, $b, c \in \mathbb{R}$) un polynôme de degré 2. Le **discriminant** du polynôme est noté Δ (lire « delta ») et est défini par

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Voyons ce que cela donne sur un exemple.

Exemple 5.2.3.

1. Si $f(x) = x^2 - 2x + 1$ alors $a = 1, b = -2$ et $c = 1$ donc $\Delta = 0$.
2. Si $g(x) = x^2 + 2x - 3$ alors $a = 1, b = 2$ et $c = -3$ donc $\Delta = 4 - 4 \times (-3) = 16 > 0$
3. Si $h(x) = x^2 + x + 1$ alors $a = 1, b = 1$ et $c = 1$ donc $\Delta = -3 < 0$.

Exercices à traiter : 7, 21p96 et 33 p98.

1. La présence du $-$ entre les deux carrés était essentiel.

Au regard des observations qui précèdent, il semblerait que le signe de Δ nous renseigne sur le nombre de solutions à une équation de degré 2. Nous allons préciser ceci dans le théorème suivant.

Théorème 15 (Résolution d'équation polynomiale d'ordre deux). *Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme de degré 2 et Δ le discriminant associé. Trois cas de figure se présentent à nous :*

1. Si $\Delta > 0$, f admet deux racines, réelles, distinctes

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

2. Si $\Delta = 0$, f admet une racine réelle (dite double)

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

3. Enfin, si $\Delta < 0$, f n'admet aucune racine réelle.

Remarque. Lorsque $\Delta = 0$, cela signifie qu'il était possible d'utiliser une identité remarquable pour résoudre l'équation (E) et qu'il n'était pas utile de calculer le discriminant. En classe de Terminale S, vous verrez qu'il est possible de trouver, avec un peu d'imagination, des solutions (dans un contexte plus large) à l'équation (E) lorsque $\Delta < 0$.

Démonstration. Soit f un polynôme du second degré, rappelons qu'il est possible d'exprimer f sous sa forme canonique :

$$f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] \quad \text{avec} \quad \Delta = b^2 - 4ac.$$

Ainsi, la résolution de l'équation (E) est équivalente à la résolution de

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$$

1. Supposons, dans un premier temps, que $\Delta > 0$. Alors, $\sqrt{\Delta}$ existe et l'équation précédente peut s'écrire comme suit :

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2 = 0$$

Il est alors possible d'utiliser l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ qui nous fournit

$$\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) = 0$$

Ainsi, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) s'exprime de la manière suivante :

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}; f(x) = 0\} = \left\{ \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad ; \quad \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$$

2. Supposons à présent que $\Delta = 0$. En reprenant les calculs précédents, la résolution de l'équation (E) est équivalente à

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

Il est alors aisé de déterminer l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}; f(x) = 0\} = \left\{\frac{-b}{2a}\right\}$$

3. Enfin, si $\Delta < 0$, l'équation (E) est équivalente à

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

Pour conclure, il suffit d'observer que le **membre de droite est strictement négatif** (par hypothèse $\Delta < 0$) tandis que le **membre de gauche est positif ou nul** (il s'agit d'un carré). En conséquence, il ne peut pas exister de solutions réelles (si elles existaient, nous aurions une contradiction) d'où $\mathcal{S} = \emptyset$.

□

Exemple 5.2.4. Résolvons les équations suivantes à l'aide, si nécessaire, du théorème précédent.

1. $x^2 - 2x - 15 = 0$. Ici $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-15) = 64 > 0$. Il existe donc deux solutions :

$$x_1 = \frac{2+8}{2} = 5 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2-8}{2} = -3.$$

2. $x^2 + 5x + 8 = 0$. Ici $\Delta = 5^2 - 32 = -7 < 0$ il n'y a aucune solution réelle.

3. $3x^2 + 6x + 3 = 0$. Ici $\Delta = 6^2 - 4 \times 3 \times 3 = 0$, il y a donc une seule solution

$$x_0 = -\frac{6}{6} = -1.$$

Exercices à traiter : 23,24p97; 46, 47p99; 56,63,65 page 100-102; 76 page 104.

5.3 Factorisation des polynômes de second degré

Il se trouve que Δ nous permet également de savoir si le polynôme considéré peut s'écrire sous forme factorisée. Dans ce chapitre, nous utilisons ceci pour avoir une interprétation géométrique des racines mais cette factorisation (lorsqu'elle existe) nous servira dans un prochain chapitre dans lequel nous reviendrons sur le signe d'un polynôme de degré 2.

Proposition 16 (Factorisation d'un polynôme du second degré). Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme de degré 2 et Δ le discriminant associé.

1. Si $\Delta > 0$ alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

avec x_1 et x_2 les racines de f .

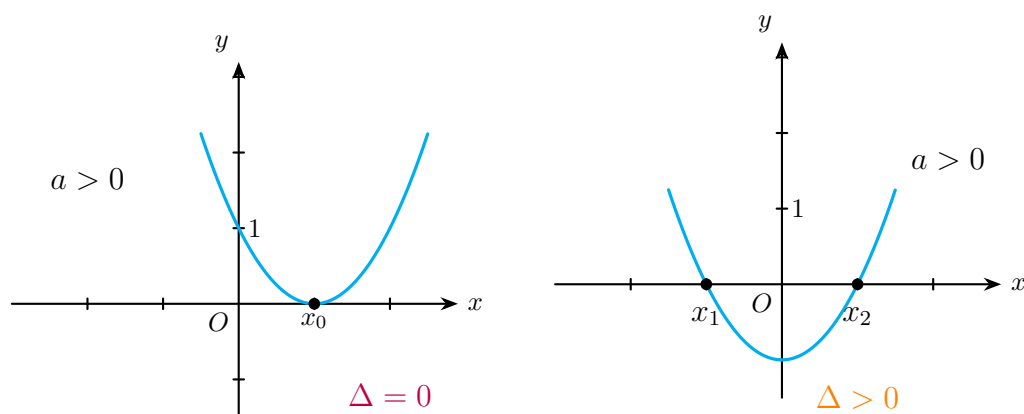
2. Si $\Delta = 0$ alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = a(x - x_0)^2$$

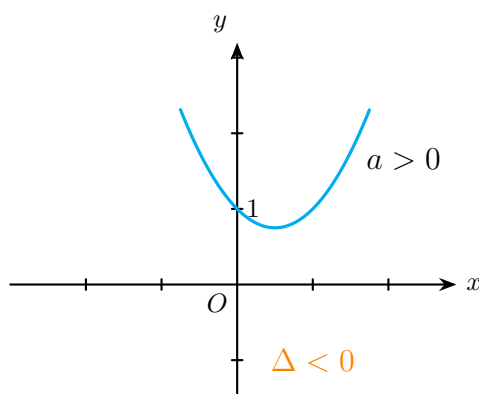
avec x_0 la racine double de f .

3. Lorsque $\Delta < 0$, il n'est pas possible de factoriser (dans $\mathbb{R}$) le polynôme f .

Remarque. Voyons ce que cela signifie graphiquement.



L'abscisses des points d'intersections entre la courbe et l'axe des abscisses correspond à l'emplacement des racines du polynôme. Si $\Delta = 0$ il n'y a qu'un seul point d'intersection, tandis qu'il y en a 2 lorsque $\Delta > 0$. Pour le dernier cas, lorsque $\Delta < 0$, la courbe ne rencontre jamais l'axe des abscisses.



Lorsque $a < 0$, les courbes sont tournées dans l'autre sens.

Exercices à traiter : 39, 40p 99 (déterminer a et Δ seulement).

Maintenant que nous avons à disposition des méthodes permettant de factoriser des polynômes, nous allons voir qu'il existe des relations entre les racines d'un polynôme et ses coefficients.

5.4 Relation entre coefficients et racines

Regardons un exemple pour voir de quoi il retourne.

Exemple 5.4.1. Soit $P(x) = 2x^2 - 3x + 1$ et remarquons que $a = 2$, $b = -3$ et $c = 1$. Maintenant, déterminons les racines de P . Ici, $\Delta = 1 > 0$: il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = 1.$$

Observons le fait suivant : $x_1 + x_2 = \frac{3}{2} = -\frac{b}{a}$ et $x_1 \times x_2 = \frac{1}{2} = \frac{c}{a}$.

Il se trouve que ce résultat est complètement général.

Proposition 17 (Relation coefficients/racines). Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- x_1 et x_2 sont des racines distinctes de P
- x_1 et x_2 sont solutions du système suivant

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Remarque. Nous venons d'exprimer les coefficients d'un polynôme unitaire P en fonction de polynômes symétriques en les racines. Ce phénomène est complètement général et n'est pas limité au second degré.

Démonstration. D'une part, sous sa forme **développée**, nous avons

$$P(x) = ax^2 + bx + c.$$

D'autre part, sous sa forme **factorisée**, nous avons

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Nécessairement, puisque ces deux expressions désignent la même quantité, nous avons

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Nous allons donc développer l'expression factorisée pour ensuite **identifier** les coefficients entre eux (ceux des x^2 ensemble, ceux des x ensemble, puis les constantes ensembles). Nous avons donc

$$a(x - x_1)(x - x_2) = a[x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2] = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$$

En identifiant les coefficients, nous trouvons donc

$$\begin{cases} a &= a && \text{coefficients des } x^2 \\ b &= -a(x_1 + x_2) && \text{coefficients des } x \\ c &= ax_1x_2 && \text{constantes} \end{cases}$$

Autrement dit, après simplifications par $-a$, nous avons

$$\begin{cases} -\frac{b}{a} &= (x_1 + x_2) \\ \frac{c}{a} &= x_1x_2 \end{cases}$$

ce qui termine la démonstration. $\square$

Voyons à quoi cela peut servir sur des exemples.

Exemple 5.4.2. Imaginons que nous souhaitions résoudre le système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -4 \\ x_1 \times x_2 = 3 \end{cases}$$

Autrement dit, nous souhaitons trouver la valeur de x_1 et x_2 . Pour cela, il suffit d'utiliser la proposition précédente. Celle-ci nous assure que x_1 et x_2 sont les racines d'un polynôme dont les coefficients sont déterminés par les nombres -4 et 3 apparaissant dans le système ci-dessus. Forcément, devons choisir

$$a = 1 \quad ; \quad b = 4 \quad ; \quad c = 3$$

Ainsi, x_1 et x_2 sont solutions de l'équation $x^2 + 3x + 4 = 0$. Il ne reste plus qu'à utiliser Δ pour trouver leur valeur.

Exercice à traiter : 49 page 99.

L'exemple précédent semble un peu artificiel. Voici une autre application. Celle repose sur le concept de racine *évidente* : lorsque que nous constatons que valeur simple² est solution d'une équation de degré 2, nous dirons qu'il s'agit d'une racine *évidente*.

Exemple 5.4.3. Considérons le polynôme $P(x) = 2x^2 - 3x + 1$. Il n'est pas difficile d'observer que $x = 1$ est une **racine évidente** de P . En effet,

$$P(1) = 2 \times 1^2 - 3 \times 1 + 1 = 0.$$

A présent, nous pouvons facilement obtenir la valeur de la deuxième racine et cela sans utiliser Δ , simplement grâce aux relations entre coefficients et racines. En effet, d'après la proposition 17, nous savons que le produit des racines $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$. Dans notre exemple, cela signifie que

$$1 \times x_2 = \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

Nous avons donc calculé très facilement la valeur de x_2 à partir de celle de x_1 grâce à la proposition 17 sans employer Δ . Le gain de temps est considérable.

2. $x = \pm 1$, $x \pm 2$ ou $x = 0$ par exemple

Exercice à traiter : 27 p97 et 43 page 99 (cf. méthode3 p87).

Enfin, pour conclure, voyons de quelle manière les idées présentées plus haut permettent de factoriser des polynômes de degré 3.

5.5 Factorisation d'un polynôme de degré 3

Nous allons voir que le concept de racine évidente et d'identification permet de résoudre des équations de degrés supérieurs en factorisant le polynôme. Voyons plutôt à travers un exemple.

Exemple 5.5.1. Imaginons que nous souhaitions résoudre

$$x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = 0.$$

Observons que $x = -1$ est une racine évidente du polynôme $P(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$. En effet,

$$P(-1) = (-1)^3 - 5(-1)^2 + 2 \times (-1) + 8 = -1 - 5 - 2 + 8 = 0.$$

Ainsi, nous savons P peut se factoriser sous la forme $P(x) = (x + 1)(ax^2 + bx + c)$ avec des constantes réelles a, b et c à déterminer. Nous pouvons à présent développer cette nouvelle expression pour ensuite identifier les coefficients.

$$P(x) = (x + 1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx + ax^2 + bx + c = ax^3 + (a + b)x^2 + (c + b)x + c$$

Forcément, nous devons avoir

$$1x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = ax^3 + (a + b)x^2 + (c + b)x + c.$$

Il ne reste plus qu'à **identifier** les coefficients.

$$\begin{cases} 1 = a \\ -5 = a + b \\ 2 = c + b \\ 8 = c \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -6 \\ c = 8 \end{cases}$$

Ainsi, $P(x) = (x + 1)(x^2 - 6x + 8)$. Nous pouvons à présent utiliser Δ pour trouver les racines éventuelles de $x^2 - 6x + 8$. Ici, $\Delta = 4 > 0$ et

$$x_1 = 4 \quad \text{et} \quad x_2 = 2.$$

Finalement, $P(x)$ se factorise sous la forme

$$P(x) = (x + 1)(x - 2)(x - 4)$$

et l'équation $P(x) = 0$ admet 3 solutions : $x = -1$ ou $x = 2$ ou $x = 4$.

5.6 Bilan du chapitre

Voici les savoirs faire à acquérir dans ce chapitre :

- Recherche des racines d'un polynôme du second degré f (solutions de l'équation $f(x) = 0$).
- Forme canonique, développée et factorisée d'un polynôme de degré 2 f .
- Interprétation graphique du signe de Δ .
- Relation racines/coefficients et utilisation de racines évidentes pour factoriser un polynôme.

5.7 Pour aller plus loin

Pour les plus curieux, voici deux problèmes facultatifs (bien évidemment hors programme) donnant des pistes de résolutions d'équations de degré supérieur.

5.7.1 Méthode de Cardan (publiée dans l'Ars Magna en 1545)

Longtemps après les travaux d'Al-Khwarizmi, des mathématiciens italiens se sont penchés sur la résolution d'équation de degré trois. L'un des premiers fut Scipione del Ferro en 1515, suivit de son élève Tartaglia en 1535 et enfin le mathématicien Cardan (1545). Ce genre de recherche pouvait être motivé, entre autres, pour être appliqué à des problèmes de ballistiques. Il est à noter qu'à l'époque ce genre d'exercices n'en était qu'à ses balbutiements et qu'il était prestigieux de découvrir des méthodes de résolutions. La recherche de ce prestige entraîna bien sûr des rancœurs et des querelles quant à la paternité d'une découverte, ce fut notamment le cas entre Tartaglia et Cardan.

Voyons à présent une équation de degré trois :

$$(\tilde{E}) : \quad z^3 - 15z - 4 = 0$$

Voici quelques indications pour déterminer les trois racines réelles de ce polynôme :

- Connaissant les racines x_1 et x_2 du polynôme $f(x) = x^2 + bx + c$, est-il possible d'exprimer les coefficients b et c en fonction de ces racines ?
- Il pourra être utile de chercher les racines de $(\tilde{E})$ sous la forme $z = u + v$ en imposant la condition $u^3v^3 = \frac{15^3}{27}$. *Indication : il faut obtenir un système d'équations, l'une d'elles impliquant la somme $u + v$, l'autre le produit uv , afin d'utiliser les résultats du premier point.*
- En essayant de résoudre l'équation du second degré obtenu au point précédent, tout comme la mathématicien Bombelli (1526-1572), il faudra faire preuve d'un peu d'imagination pour résoudre ce problème quitte à écrire des choses qui semblent fausses (voir même absurdes) dans un premier temps.

Le lecteur curieux (ou impatient) pourra trouver une résolution complète dans mon cours de maths expertes (dans l'introduction du chapitre 1) :

<https://perso.math.univ-toulouse.fr/ktanguy/lycee-beaupre/mathsexpertes/>

Allons plus loin encore et attaquons le degré 4 !

5.7.2 Méthode de Ferrari (1522-1565)

Elève de Cardan, ce mathématicien s'est penché sur les équations de degré quatre. Essayons de résoudre l'équation suivante :

$$(\hat{E}) : x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 8x - 10 = 0$$

Voici quelques indications pour déterminer les deux racines réelles de ce polynôme :

- Procéder à un changement de variable en posant $x = z - 1$ afin d'obtenir une nouvelle équation ($\hat{E}_1$).
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ un paramètre à choisir ultérieurement. En utilisant le fait que

$$z^4 = (z^2 + \lambda)^2 - 2\lambda z - \lambda^2,$$

obtenir une nouvelle équation de la forme

$$(z^2 + \lambda)^2 = P(z)$$

avec $P(z)$ un polynôme de degré 2 dont les coefficients dépendent de λ .

- Chercher un moyen de factoriser ce nouveau polynôme P sous la forme de carré en utilisant le discriminant. Il pourra être utile d'observer que la condition permettant cette factorisation s'écrit sous la forme d'une équation de degré trois (d'inconnue λ) dont il est possible d'obtenir une racine évidente.

Remarque. Les indications précédentes sont laissées volontairement floues, l'idée derrière cela est d'essayer de vous faire découvrir de quelle manière les mathématiciens (de l'époque mais aussi de nous jours) procèdent lorsqu'ils essaient de résoudre un problème. La solution survient souvent après de longs tâtonnements et de nombreux essais infructueux.

Comme souvent, obtenir une réponse à une question donnée soulève de nouvelles problématiques. A titre d'exemples, voici quelques questions qui pourraient survenir après ces deux challenges :

1. Comment traiter les cas généraux ? De quelle manière serait-il possible de généraliser les méthodes précédentes pour traiter, de manière formelle, les équations de degré trois et quatre comme nous l'avons fait de ce cours pour le degré deux ?
2. Dans le cours, nous avons vu que lorsque $\Delta < 0$ il n'existait pas de racines réelles. Existe-t-il des critères analogues pour les degrés supérieurs.
3. A votre avis, est-il toujours possible de résoudre une équation polynomiale de manière algorithmique (comme nous l'avons fait pour le degré deux en calculant Δ) et ceci peut importe le degré du polynôme considéré ?