

Chapitre 6

Suites numériques (1ère partie)

6.1 Introduction

Nous allons voir qu'il est possible de modéliser des événements de la vie de tous les jours à l'aide des suites. L'exemple suivant permettra de mieux comprendre les nouvelles notions du chapitre.

Exemple 6.1.1. En 2018, un musée a comptabilisé 250 000 visiteurs. Le conservateur envisage une augmentation de 4% à partir de l'année suivante. Il a demandé à l'un de ses employés de modéliser l'évolution du nombre de visiteurs en débutant pour la première fois l'année suivante.

Notations :

- $v_0 = 250\,000$ désigne le nombre de visiteurs en 2018.
- v_1 désigne alors le nombre de visiteurs en 2019.

Plusieurs questions se posent alors naturellement

1. Comment sera désigné le nombre de visiteurs en 2023 ?
2. Comment déterminer la valeur de v_1 ?
3. Celle de v_2
4. v_8 correspond au nombre de visiteurs en quelle année ?
5. Si n est un entier ($n = 20$ par exemple), quelle notation désigne le nombre de visiteurs en $2018 + n$?

Finalement, nous venons de *lister* (ou *numéroter*), d'années en années le nombre de visiteurs d'un musée.

Définition 6.1.1. *L'ensemble des valeurs*

$$v_0 \ ; \ v_1 \ ; \ v_2 \ ; \ ; \ \dots \ ; \ v_n \ ; \ \dots$$

est une suite numérique. v_0 est le **premier terme** de la suite (il s'agit du premier élément de la liste) et v_n (avec n un entier quelconque) est le **terme général** de la suite.

Remarque. Finalement, v_n joue le même rôle que $f(x)$. A la différence que x est remplacé par n un entier. En particulier, $v_{0,75}$ ou $v_{-5/2}, \dots$ n'existent pas : **les indices sont toujours des nombres entiers.**

Voyons un deuxième exemple.

Exemple 6.1.2. La liste 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 se numérote de la manière suivante :

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad u_2 = 1, \quad u_3 = 2, \quad u_4 = 3, \quad u_5 = 5, \quad u_6 = 8, \quad u_7 = 13.$$

u_0 correspond au premier terme de la suite, u_1 au deuxième terme de la suite et ainsi de suite.

Les suites numériques (souvent notées (u_n)) sont des objets mathématiques qui apparaissent naturellement au cours de l'Histoire. Par exemple, en considérant le fait de consigner les résultats d'une expérience (la hauteur d'une plante, le nombre d'insectes dans une fourmilière, ...). : la valeur de u_0 correspondrait alors aux données initiales, la valeur de u_1 celles du jour suivant et ainsi de suite.

Cette façon d'indexer des données est présente dans l'Histoire depuis très longtemps. Il est possible de trouver des traces de ceci chez Archimède (entre -287 et -212 avant notre ère) ou encore au 1er siècle avec la méthode d'Héron d'Alexandrie (servant à extraire une racine carrée). L'étude des suites numériques préoccupa, beaucoup plus tard, à nouveau les mathématiciens au 17ème siècle avec la méthode des « indivisibles » de Cavalieri laquelle permet de calculer simplement des aires ou des volumes. Cette branche des mathématiques est présentée dans l'Encyclopédie de Diderot et d'Alembert en 1751 et son étude est poursuivie par d'éminents mathématiciens (Newton, Lagrange, Bernoulli, ...) de l'époque. Elle intervient également de nos jours en analyse numérique et apparaît dans certains procédés de modélisation par ordinateurs.

Exercices à traiter : 17 page 64

6.2 Formule explicite

Dans ce chapitre nous allons voir deux manières différentes permettant de calculer les différents termes d'une suite. La première consiste à donner une formule explicite. Si f est une fonction connue, nous pouvons définir la suite (u_n) par

$$u_n = f(n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Cette façon de faire permet de calculer facilement la valeur de n'importe quel terme souhaité comme vous savez déjà le faire depuis le seconde pour calculer des images à l'aide d'une fonction.

Exemple 6.2.1. 1. Si $f(x) = \sqrt{x-7}$ et $u_n = f(n)$ pour tout $n \geq 7$. Les premiers termes de cette suite sont alors

$$u_7 = \sqrt{7-7} = 0, \quad u_8 = \sqrt{8-7} = 1, \quad u_9 = \sqrt{2}, \dots$$

2. Si $f(x) = \frac{4}{x+1}$ et $w_n = \frac{4}{n+1}$ pour tout $n \geq 0$ alors

$$w_0 = \frac{4}{0+1} = 4, \quad w_1 = \frac{4}{1+1} = 2, \quad w_2 = \frac{4}{3}, \dots$$

$$v_0 = 1, \quad v_2 = 1, \quad v_{2011} = -1, \dots$$

Exercices à traiter : 9,10, 14(Qa) page 64

6.2.1 Représentation graphique

$$u_n = f(n) \quad \text{pour tout } n \geq 0,$$
$$A_0(0 ; u_0), \quad A_1(1 ; u_1), \quad A_2(2 ; u_2), \dots$$

Exemple 6.2.2. Soit u_n une suite définie pour tout entier n par

$$u_n = -n^2 + 5n + 6.$$

FIGURE 6.1 – Représentation graphique de la suite (u_n)

A vous de jouer.

Exemple 6.2.3. Placer sur un graphique les quatre premiers termes de la suite $u_n = \frac{6}{n+2}$ définie pour tout $n \geq 0$.

Exercices à traiter : 16 page 64

Voyons une autre manière de calculer les termes d'une suite.

6.3 Formulation par récurrence

Une des particularités des suites et le fait que certaines d'entre elles peuvent se **définir de proche en proche** (ce qui ne peut être le cas pour des fonctions). Plus précisément, cela signifie qu'**à partir d'un terme de la suite et d'une règle de calcul, il est possible d'obtenir la valeur du terme suivant**. Voyons cela sur un exemple.

Exemple 6.3.1. Supposons que M. Mourareau souhaite déposer de l'argent sur son livret A . En janvier 2017 il dépose 3 000 euros sur livret A et il sait que les taux d'intérêts sont de 1%. Nous allons voir comment modéliser l'évolution de l'argent disponible sur son livret A .

La somme déposée initialement sera notée u_0 en 2017, ici $u_0 = 3\,000$. Voyons comment calculer l'argent disponible l'année suivante (que nous noterons u_1). Nous devons prendre en compte deux quantités :

- l'argent disponible sur le livret A l'année précédente (dans notre cas u_0)
- l'augmentation de 1% et le coefficient multiplicateur associé 1,01.

Nous trouvons donc comment calculer l'argent disponible en 2018 :

$$u_1 = 1,01 \times u_0 = 1,01 \times 3\,000 = 3\,030 \text{ euros.}$$

Pour obtenir l'argent disponible en 2019, il convient de calculer u_2 via le même procédé :

$$u_2 = 1,01 \times u_1 = 1,01 \times 3\,030 = 3\,060,3 \text{ euros.}$$

En résumé, grâce à cette règle de calcul (l'augmentation de 1%), nous avons déterminé u_1 à partir de u_0 , puis u_2 à partir de u_1 . Evidemment, nous pourrions obtenir de la même manière u_3 à partir de u_2 .

En généralisant ce procédé, nous observons qu'à partir de u_n (pour n un entier donné), nous pourrions obtenir le terme suivant u_{n+1} . Autrement dit, nous aurions

$$u_{n+1} = 1,01 \times u_n \text{ pour } n \geq 0$$

Notons au passage que si u_0 désigne l'argent disponible en 2017, u_1 l'argent disponible en 2017+1, u_2 l'argent disponible en 2017+2 alors u_n représente l'argent disponible en 2017+n.

Dans l'exemple précédent nous avons obtenu une formule permettant de relier u_n au terme suivant u_{n+1} . Ceci porte le nom de **relation de récurrence**.

Définition 6.3.1 (Relation de récurrence (d'ordre 1)). *Une suite (u_n) est **définie par récurrence**, lorsque u_{n+1} se calcule à l'aide du terme précédent u_n à partir d'une valeur initiale u_0 .*

Remarque. Si $n \geq 1$ est donné nous dirons que u_{n+1} est le **terme suivant** de u_n tandis que u_{n-1} est le **terme précédent**.

Voyons un autre exemple de ceci.

Exemple 6.3.2. Considérons la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et

$$u_{n+1} = 3u_n - 2 \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

Nous pouvons alors calculer un par un les termes de la suite :

$$u_1 = 3 \times u_0 - 2 = 3 \times 5 - 2 = 13 \quad \text{puis} \quad u_2 = 3 \times u_1 - 2 = 3 \times 13 - 2 = 37 \quad \text{etc}$$

Exercices à traiter : 11, 12, 13, 14 (Qb, Qc) page 64 ; 65 page 68 ; 71p69.

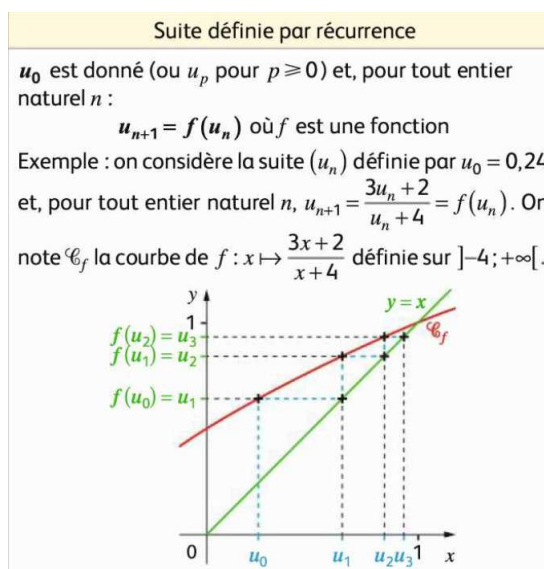
Comme vous avez pu le constater, l'inconvénient dans ce genre de relation est que pour calculer un terme lointain (i.e. avec un indice assez grand), il est nécessaire de connaître tous les termes précédents. La calculatrice permet de pallier à ce défaut : https://www.youtube.com/watch?v=D50Ai2_h_bw.

Nous pourrions imaginer que n'importe quelle suite de nombres peut s'exprimer soit à l'aide d'une formulation explicite soit avec une formule de récurrence. Il se trouve que ce n'est pas le cas : certaines suites de nombres n'admettent ni une formulation explicite, ni une formulation par récurrence. Par exemples, la suite des nombres premiers, ceci explique notamment pourquoi il est difficile d'obtenir des résultats concernant ce genre de nombres.

Comme nous allons le voir, il est possible de représenter graphiquement une suite définie par récurrence mais cela est moins direct qu'avec une formulation explicite.

6.3.1 Représentation graphique

La représentation graphique d'une suite définie par récurrence se fait en deux temps. Il faut tracer la droite $y = x$ ainsi que la courbe de la fonction f utilisée pour définir la suite.



A vous d'essayer sur un exemple.

Exemple 6.3.3. Représenter graphiquement les premiers termes de la suite (v_n) définie par

$$\begin{cases} v_{n+1} = 2v_n - 1 & \text{pour tout } n \geq 1, \\ v_0 = 2. \end{cases}$$

Pour cela tracer la droite d'équation $y = x$ ainsi que la droite d'équation $y = 2x - 1$.

Comme vous avez appris à étudier les variations de fonction en classe de seconde, il est naturel de se demander s'il est possible de faire la même chose pour des suites. C'est l'objet de la dernière section de ce chapitre.

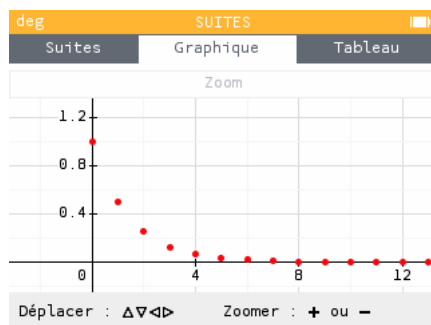
6.4 Variations d'une suite

Tout comme lors de l'étude de fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, il est possible d'étudier la monotonie d'une suite. Nous allons voir que cette étude est plus simple à mettre en place que l'étude des variations d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Voyons déjà ce que cela pourrait signifier sur des exemples.

Exemple 6.4.1. 1. Si (t_n) est une suite dont les premiers termes sont donnés par

$$t_0 = 1, \quad t_1 = \frac{1}{2}, \quad t_2 = \frac{1}{4}, \quad t_3 = \frac{1}{16}, \dots$$

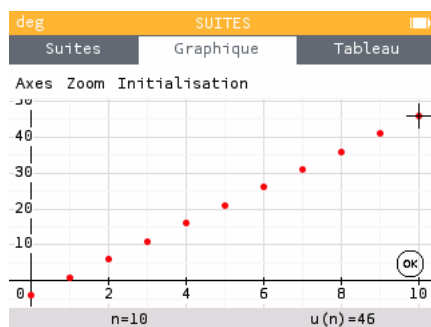
Nous observons que $t_0 \geq t_1 \geq t_2 \geq t_3 \geq \dots$. Il paraît alors naturel de dire que **la suite semble être décroissante**. Graphiquement, à chaque fois que l'indice n augmente, la hauteur des points diminue.

FIGURE 6.2 – Graphique associé à la suite (t_n)

2. Si les premiers termes de la suite (v_n) sont donnés par

$$v_0 = -4, \quad v_1 = 1, \quad v_2 = 6, \quad v_3 = 11, \dots$$

Nous observons que $v_0 \leq v_1 \leq v_2 \leq v_3 \leq \dots$: **la suite semble être croissante**. Graphiquement, à chaque fois que l'indice n augmente, les hauteurs des points augmentent aussi.

FIGURE 6.3 – Graphique associé à la suite (v_n)

Il semblerait qu'une suite décroissante voit ses valeurs devenir de plus en plus petite, tandis qu'une suite croissante voit ses valeurs augmenter. Plus formellement, cela donne la définition suivante.

Définition 6.4.1. Soit (u_n) une suite numérique, une telle suite sera dite :

- **croissante** si, pour tout entier $n \geq 0$,

$$u_{n+1} \geq u_n.$$

- **décroissante** si, pour tout entier $n \geq 0$,

$$u_{n+1} \leq u_n.$$

- **constante** si, pour tout entier $n \geq 0$,

$$u_{n+1} = u_n.$$

Remarque. **Vocabulaire :** une suite croissante ou décroissante est dite **monotone**.

Voyons comment établir ceci sur un exemple. En reformulant la définition 12.1.1, nous obtenons des critères pratiques pour étudier la monotonie d'une suite. En effet, l'étude de la monotonie d'une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ consiste à **déterminer le signe** de

$$u_{n+1} - u_n \quad \text{pour tout } n \geq 0.$$

Voyons plutôt au travers d'un exemple.

Exemple 6.4.2. Considérons la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{3}{n+2}$ avec $n \geq 0$. Nous avons donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{3}{n+3} - \frac{3}{n+2} \\ &= \frac{3n+6-3n-9}{(n+3)(n+2)} \\ &= \frac{-3}{(n+3)(n+2)}. \end{aligned}$$

De plus, puisque $n \in \mathbb{N}$ nous avons immédiatement que $n+2 > 0$ et $n+3 > 0$. Autrement dit, le dénominateur est strictement positif. Par suite, puisque $-3 < 0$, nous en déduisons que $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout $n \geq 0$. D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} < u_n.$$

Autrement dit la suite (u_n) est (strictement) décroissante.

Remarque. Une suite n'est pas forcément croissante ou décroissante. Voyons cela sur un exemple. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = n(-1)^n$ pour tout $n \geq 0$. Dans ce cas,

$$v_0 = 0 > v_1 = -1 \quad \text{et} \quad v_1 = -1 < v_2 = 2.$$

Cette suite ne peut donc pas être croissante ou décroissante.

Exercices à traiter : 55(Q1), 56(Q1) et 59(Q1) page 67; 47, 48, 50 page 66; 77 p 70 (cf. exercice résolu 5 page 63).

6.5 Bilan du chapitre

Voici les savoirs faire à acquérir dans ce chapitre :

- Savoir calculer et représenter graphiquement les termes d'une suite à partir d'une formule explicite ou d'une définition par récurrence.
- Savoir étudier la monotonie d'une suite.
- Savoir utiliser sa calculatrice pour calculer les termes d'une suite donnée et mettre en place un algorithme de seuil.

6.6 Pour aller plus loin

Voici quelques exemples supplémentaires pour les plus curieux.

6.6.1 Conjecture de Syracuse

Considérons la suite (u_n) définie, par récurrence à partir d'un entier $u_0 \in \mathbb{N}$, de la manière suivante

$$u_{n+1} = \begin{cases} \frac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ est pair} \\ 3u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Exemple 6.6.1. Si $u_0 = 14$, nous obtenons la suite des nombres :

14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, ...

Remarque. La suite de nombre 1, 4, 2, 1, 4, 2, ... se répète indéfiniment, il est usuel de désigner ceci sous le nom de « cycle trivial ».

La conjecture de Syracuse, ou conjecture d'Ulam, est l'hypothèse mathématique selon laquelle la suite de Syracuse de n'importe quel entier strictement positif atteint 1. Autrement dit, peu importe la valeur de départ, à partir d'un certain rang, la suite atteint le cycle trivial 1, 4 2 1, ...

En dépit de la simplicité de son énoncé, cette conjecture défie depuis de nombreuses années (au moins depuis 1928) les mathématiciens. D'ailleurs, le mathématicien Paul Erdős (1913 – 1996) a dit à propos de la conjecture de Syracuse : « les mathématiques ne sont pas encore prêtes pour de tels problèmes ».

6.6.2 Nombre d'or, suite de Fibonacci, pavage de Penrose

Historiquement, il semblerait que le nombre d'or $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ait été initialement défini comme étant l'unique rapport $\frac{a}{b}$ entre deux longueurs a et b telles

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

De manière équivalente, le nombre d'or peut-être obtenu comme étant une racine de l'équation

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Il est possible de relier ce nombre particulier aux suites de la manière suivante. Pour cela, il faut introduire **la suite de Fibonacci**¹, laquelle permet de décrire, de manière grossière, la croissance d'une population de lapins. Sa définition est faite par récurrence et le terme u_{n+2} s'exprime en fonction des deux termes qui le précèdent (nécessitant ainsi la donnée des deux premiers termes).

$$\begin{cases} u_{n+2} = u_{n+1} + u_n & n \geq 2, \\ u_0 = 1, \quad \text{et} \quad u_1 = 1. \end{cases}$$

Les premiers valeurs sont donc $u_2 = 2$, $u_3 = 3$, $u_4 = 5$, $u_5 = 8, \dots$. Cette suite est notamment célèbre dans la culture populaire au travers, entre autres, du roman *Da Vinci Code* de D. Brown mais aussi par son apparition dans le tableau *Parade de cirque*, peint en 1887 – 1888, de G. Seurat. Cette suite entretient également des liens avec le célèbre nombre d'or ϕ . En effet, il est possible de montrer que le quotient de deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci se rapproche de plus en plus du nombre d'or à mesure que n se rapproche de l'infini.

Le nombre d'or est également utilisé dans la construction de pavage de Penrose.

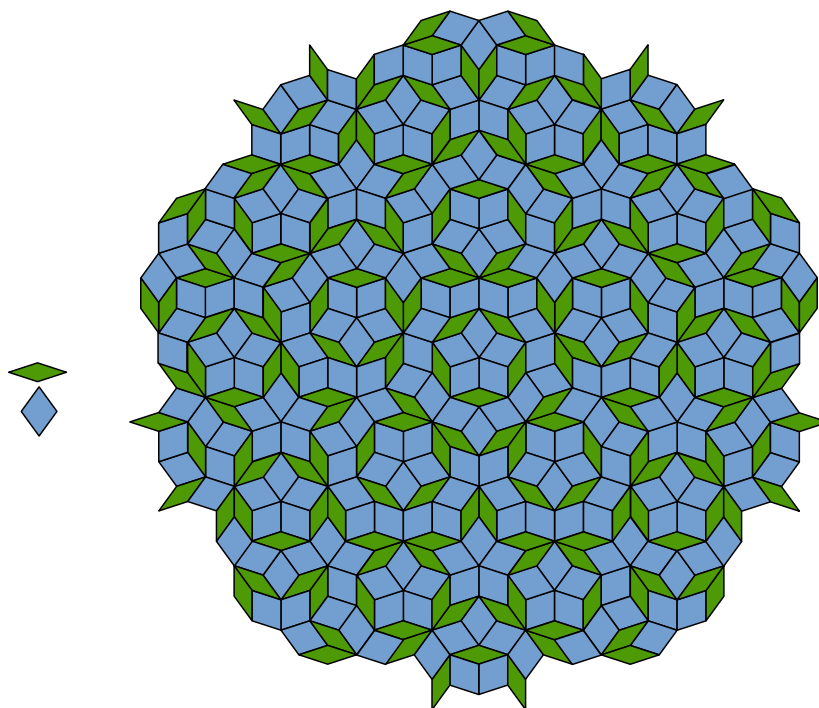


FIGURE 6.4 – Pavage de Penrose

Ces pavages du plan découverts par le mathématicien et physicien britannique Roger Penrose dans les années 1970. En 1984, ils ont été utilisés pour modéliser la structure des quasi-cristaux (il s'agit de solides dont le spectre de diffraction est essentiellement discret et dont l'arrangement des

1. Cette suite doit son nom au mathématicien italien Fibonacci (1175 – 1250).

atomes n'est pas périodique). La construction de tels objets mathématiques s'obtient grâce à des suites définies par récurrence.