

## Chapitre 8

# Inéquations de degré 2

Dans ce chapitre nous allons terminer l'étude qui a été faite plus tôt dans l'année. Il nous reste à voir comment résoudre des inéquations de degré 2.

### 8.1 Signe d'un polynôme de degré 2

Avant toutes choses, rappelons le résultat majeur qui a été obtenu plus tôt dans l'année grâce à  $\Delta$ .

**Proposition 17** (Factorisation d'un polynôme du second degré). *Soit  $f(x) = ax^2 + bx + c$  un polynôme de degré 2 et  $\Delta$  le discriminant associé.*

1. Si  $\Delta > 0$  alors, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

avec  $x_1$  et  $x_2$  les racines de  $f$ .

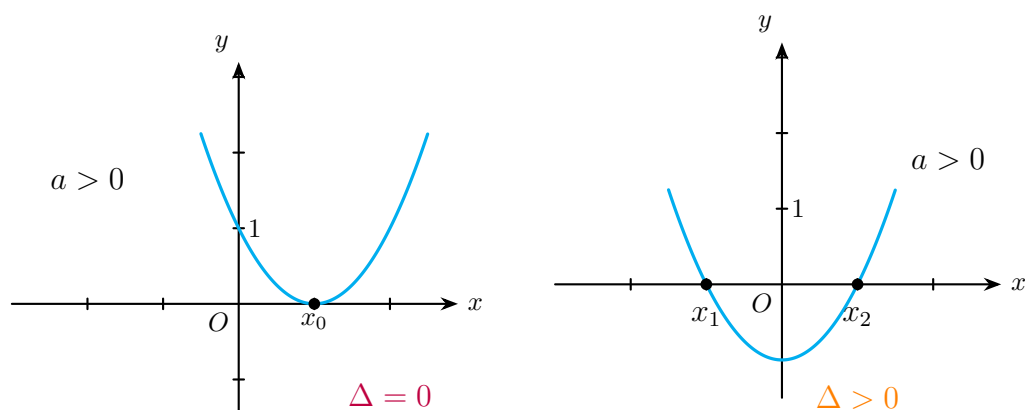
2. Si  $\Delta = 0$  alors, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = a(x - x_0)^2$$

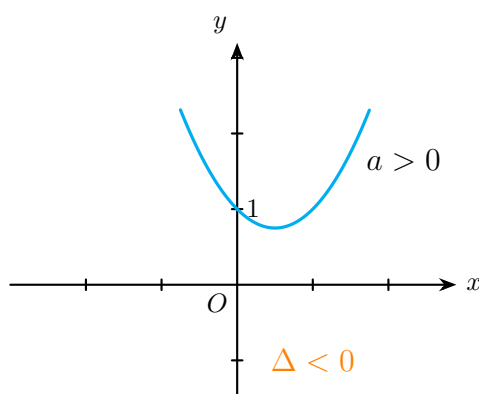
avec  $x_0$  la racine double de  $f$ .

3. Lorsque  $\Delta < 0$ , il n'est pas possible de factoriser (dans  $\mathbb{R}$ ) le polynôme  $f$ .

*Remarque.* Voyons ce que cela signifie graphiquement.



L'abscisses des points d'intersections entre la courbe et l'axe des abscisses correspond à l'emplacement des racines du polynôme. Si  $\Delta = 0$  il n'y a qu'un seul point d'intersection, tandis qu'il y en a 2 lorsque  $\Delta > 0$ . Pour le dernier cas, lorsque  $\Delta < 0$ , la courbe ne rencontre jamais l'axe des abscisses.



Lorsque  $a < 0$ , les courbes sont tournées dans l'autre sens.

Tout ceci va nous permettre **d'en déduire aisément le signe d'un polynôme de degré 2 en fonction de  $\Delta$** . Les courbes rappelées ci-dessous permettent de retrouver graphiquement pourquoi les tableaux de signes sont ainsi.

**Corollaire 18** (Signe d'un polynôme de degré 2). *Sous le contexte précédent, pour tout réel  $x$ , nous avons les résultats suivants :*

1. Lorsque  $\Delta > 0$  et  $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$  avec  $x_1 < x_2$  (par exemple) les deux racines du polynôme, nous avons le tableau de signe suivant :

| $x$    | $-\infty$            | $x_1$ | $x_2$                 | $+\infty$ |                      |
|--------|----------------------|-------|-----------------------|-----------|----------------------|
| $f(x)$ | $\text{signe de } a$ | $0$   | $-\text{signe de } a$ | $0$       | $\text{signe de } a$ |

2. Lorsque  $\Delta = 0$  et  $f(x) = a(x - x_0)^2$  avec  $x_0$  la racine double de  $f$ , nous avons

|        |                                                                                                                                                                                                                                 |       |           |
|--------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|-----------|
| $x$    | $-\infty$                                                                                                                                                                                                                       | $x_0$ | $+\infty$ |
| $f(x)$ | <div style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: center;"> <span style="color: orange;">signe de <math>a</math></span> <span>0</span> <span style="color: orange;">signe de <math>a</math></span> </div> |       |           |

3. Lorsque  $\Delta < 0$ , le polynôme  $f$  ne s'annule jamais et est de signe constant : nous avons

|        |              |           |
|--------|--------------|-----------|
| $x$    | $-\infty$    | $+\infty$ |
| $f(x)$ | signe de $a$ |           |

*Démonstration.* La démonstration de ce résultat repose sur les formes factorisées, du polynôme  $f$ , obtenues via la forme canonique et le signe du discriminant. A partir de celles-ci, il est facile de dresser un tableau de signe pour chaque cas de figure.

1. Si  $\Delta > 0$ , nous avons

|           |              |       |               |              |
|-----------|--------------|-------|---------------|--------------|
| $x$       | $-\infty$    | $x_1$ | $x_2$         | $+\infty$    |
| $x - x_1$ | -            | 0     | +             | +            |
| $x - x_2$ | -            | -     | 0             | +            |
| $f(x)$    | signe de $a$ | 0     | -signe de $a$ | signe de $a$ |

2. Si  $\Delta = 0$  nous avons  $f(x) = a(x - x_0)^2$ . Observons alors que  $f(x_0) = 0$  et que  $(x - x_0)^2 > 0$  si  $x \neq x_0$  pour conclure.

3. Si  $\Delta < 0$ , il n'existe pas de factorisation de  $f$  permettant de dresser un tableau de signe. Cependant, la forme canonique de  $f$  va nous permettre de conclure. En effet, celle ci nous fournit l'expression suivante

$$f(x) = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right], \quad x \in \mathbb{R}.$$

Observons alors que  $-\frac{\Delta}{4a^2} > 0$  (puisque  $\Delta < 0$ ) et  $\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 \geq 0$ . Ce qui nous permet d'en déduire que  $\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$ . Ainsi, le signe de  $f$  est dicté par celui du coefficient dominant  $a$ .

□

Il est important maintenant de savoir mettre en œuvre ceci dans différents contextes.

**Exemple 8.1.1.** 1. Déterminons le signe du polynôme  $f(x) = -3x^2 - 2x + 5$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Ici  $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-3) \times 5 = 64 > 0$ , il existe donc deux racines

$$x_1 = -\frac{5}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = 1.$$

Puisque  $a = -3 < 0$ , nous avons le tableau de signes suivant :

|        |           |                |     |           |
|--------|-----------|----------------|-----|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $-\frac{5}{3}$ | $1$ | $+\infty$ |
| $f(x)$ | $-$       | $0$            | $+$ | $-$       |

Si nous devons résoudre  $f(x) < 0$  nous trouverions que  $f(x) < 0 \iff x \in ]-\infty, -\frac{5}{3}[ \cup ]1, +\infty[$ .

2. Résolvons l'inéquation  $-3x - 2 + \frac{5}{x} \leq 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_*$ . Cette équation est équivalente à

$$Q(x) = \frac{-3x^2 - 2x + 5}{x} \leq 0.$$

Nous avons donc (grâce à la question précédente)

|        |           |                |     |     |           |     |
|--------|-----------|----------------|-----|-----|-----------|-----|
| $x$    | $-\infty$ | $-\frac{5}{3}$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |     |
| $x$    | $-$       | $-$            | $0$ | $+$ | $+$       |     |
| $f(x)$ | $-$       | $0$            | $+$ | $+$ | $0$       | $-$ |
| $Q(x)$ | $+$       | $0$            | $-$ | $+$ | $0$       | $-$ |

Ainsi,  $Q(x) \leq 0 \iff x \in ]-\infty, -\frac{5}{3}] \cup ]0, 1]$ .

Comme nous le verrons, de nombreux problèmes (géométriques, d'optimisation, ...) peuvent se ramener à une étude de signe d'un polynôme du second degré. Il est primordial d'avoir les résultats de ce chapitre en tête tout au long de l'année.

**Exercices à traiter :** 44p 99; 25p97; Applications : 56 p100; 63 p101; voir exercice de la feuille inéquations du second degré.

## 8.2 Bilan du chapitre

Voici les savoirs faire à acquérir dans ce chapitre :

- Déterminer le signe d'un polynôme de degré 2.
- Résoudre des inéquations de degré 2.