

Chapitre 9

Dérivée et sens de variations d'une fonction

9.1 Introduction

Revenons aux études de fonctions. Dans un chapitre précédent nous nous avons étudié plusieurs choses :

- la notion de fonction dérivée et son lien avec les tangentes à une courbe donnée
- le lien existant entre les variations d'une fonction f et le signe de f' (permettant d'obtenir le coefficient directeur des tangentes à la courbe).
- un formulaire permettant de déterminer la dérivée des fonctions usuelles et un résultat permettant de calculer la dérivée d'une somme de fonction dérivable.

9.2 Dérivée d'un produit de fonction

Plus tôt dans l'année, nous avons rencontré la fonction exponentielle. Si $f(x) = (3x + 5)e^{-2x}$ que vaut $f'(x)$?

Il se trouve que nous ne sommes pas encore en mesure de dériver cette fonction car il ne s'agit pas uniquement d'une somme de fonction dérivables, il y a également un produit. Nous avons besoin d'un résultat supplémentaire.

Proposition 19 (Dérivée d'un produit). *Soient u, v deux fonctions dérivables sur I . Alors*

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Remarque. En particulier, lorsque $v = u$, nous avons $(u^2)' = u'u + uu' = 2uu'$. Il est primordial de retenir les faits suivants :

la dérivée d'un produit n'est pas le produit des dérivées !

Voyons cela sur deux exemples.

Exemple 9.2.1. 1. Soit $f(x) = (3x^2 + 4x)(5x - 1)$ est le produit de deux fonctions dérivables $u(x) = 3x^2 + 4x$ et $v(x) = 5x - 1$. Ainsi, nous avons $u'(x) = 6x + 4$ et $v'(x) = 5$ d'où

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = (6x + 4)(5x - 1) + (3x^2 + 4x) \times 5 = 45x^2 + 34x - 4.$$

2. Soit $g(x) = (-4x^3 + 7x - 1)e^{-x}$ est le produit de deux fonctions dérivables $u(x) = -4x^3 + 7x - 1$ et $v(x) = e^{-x}$. Ainsi, nous avons $u'(x) = -12x^2 + 7$ et $v'(x) = -e^{-x}$ d'où

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = (-12x^2 + 7)(e^{-x}) + (-4x^3 + 7x - 1) \times (-e^{-x}) \\ &= (-12x^2 + 7 + 4x^3 - 7x + 1)e^{-x} \\ &= (4x^3 - 12x^2 - 7x + 8)e^{-x}. \end{aligned}$$

Exercices à traiter : Fiche associée ; 21Q2 page 157.

Les produits venant d'être traités, il paraît naturel de s'interroger aux quotients de fonctions. Par exemple, comment dériver la fonction

$$f(x) = \frac{4x^2 - 6x + 2}{8x^2 + 2x + 1} \quad ?$$

C'est l'objet du résultat suivant.

Proposition 20 (Dérivée d'un quotient). *Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I . Si v ne s'annule pas sur I alors $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et*

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Remarque. 1. Si $u(x) = 1$ pour tout $x \in I$, la formule précédente nous assure que

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}.$$

2. Il est essentiel de retenir que

la dérivée d'un quotient n'est pas le quotient des dérivées !

Traisons un exemple d'application.

Exemple 9.2.2. Soit $h(x) = \frac{-12x+3}{2x+4}$. Déterminons h' sur l'intervalle $] -2, +\infty[$, pour cela nous allons utiliser la formule de dérivation d'un quotient avec

$$u(x) = -12x + 3 \quad \text{et} \quad v(x) = 2x + 4.$$

Par suite, $u'(x) = -12$ et $v'(x) = 2$ c'est pourquoi nous obtenons

$$h'(x) = \frac{-12 \times (2x + 4) - (-12x + 3) \times 2}{(2x + 4)^2} = \frac{-54}{(2x + 4)^2}.$$

Exercices à traiter : Fiche associée ; 24-26 page 157 ; 69 page 160.

9.3 Variations d'une fonction

Ici, nous allons enfin voir de quelle manière l'étude du signe de la fonction dérivée permet d'obtenir des informations sur le sens de variations d'une fonction et de déterminer l'existence d'éventuels extremums. Par la suite $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ désignera une fonction dérivable sur un *intervalle* ouvert $I \subset \mathbb{R}$. Le résultat essentiel du chapitre est le suivant.

Théorème 21 (Variations). *Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable.*

1. *Si $f'(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ alors $x \mapsto f(x)$ est une fonction croissante sur I .*
2. *Si $f'(x) \leq 0$, $x \in \mathbb{R}$ alors $x \mapsto f(x)$ est une fonction décroissante sur I .*
3. *Si $f'(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$ alors $x \mapsto f(x)$ est une fonction constante sur I .*

Remarque. Il est possible de définir de manière similaire la notion de fonction strictement croissante ou strictement décroissante si l'on remplace les inégalités larges par des inégalités strictes dans les points 1 et 2 de la proposition précédente.

Exercices à traiter : 28,29 page 157.

Voyons comment cela se met en œuvre sur un exemple.

Exemple 9.3.1. La fonction $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + 12$

1. Tout d'abord, il faut déterminer f' . Ici, f est bien dérivable (c'est une polynôme de degré 3) et $f'(x) = x^2 + x - 2$.
2. Il faut à présent étudier le signe de f' . Un rapide calcul du discriminant associé nous montre que $\Delta > 0$. En conséquence, f' admet deux racines $x_1 = 1$ et $x_2 = -2$ et nous pouvons donc dresser le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

puisque $a = 1 > 0$.

3. En conséquence de ceci, il est possible d'en déduire (à l'aide du théorème précédent) le tableau de variation suivant pour la fonction f :

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$f(x)$				

Remarque. Il est essentiel de suivre les étapes suivantes lors de l'étude d'une fonction :

1. Déterminer le domaine de définition et de dérivation (lorsque cela est demandé) ;
2. Calculer f' et étudier son signe ;

3. Déterminer les variations et la nature des extremums s'ils existent (nous détaillons ce point juste après);
4. Proposer un graphique représentant de manière fidèle la courbe en indiquant les tangentes horizontales.
5. Il est parfois demander de calculer l'équation d'une tangente T , puis d'étudier la position relative entre C_f et T .

Exercices à traiter : 71page 160.

Revenons sur la notion d'extremum que met en évidence le tableau de variations. Lorsque la fonction dérivée s'annule et change de signe autour d'un point, cela permet de détecter la présence d'un maximum ou d'un minimum. Précisons la terminologie associée dans la définition suivante.

Définition 9.3.1. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

- $x_0 \in I$ est un **maximum local**, s'il existe un intervalle ouvert $J \subset I$ tel que

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{pour tout } x \in J.$$

- $x_0 \in I$ est un **minimum local**, s'il existe un intervalle ouvert $J \subset I$ tel que

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \text{pour tout } x \in J.$$

Remarque. Le maximum ou le minimum sera dit global s'il est possible de choisir $J = I$ dans la définition précédente. Un extremum désigne sans distinction un maximum ou un minimum d'une fonction.

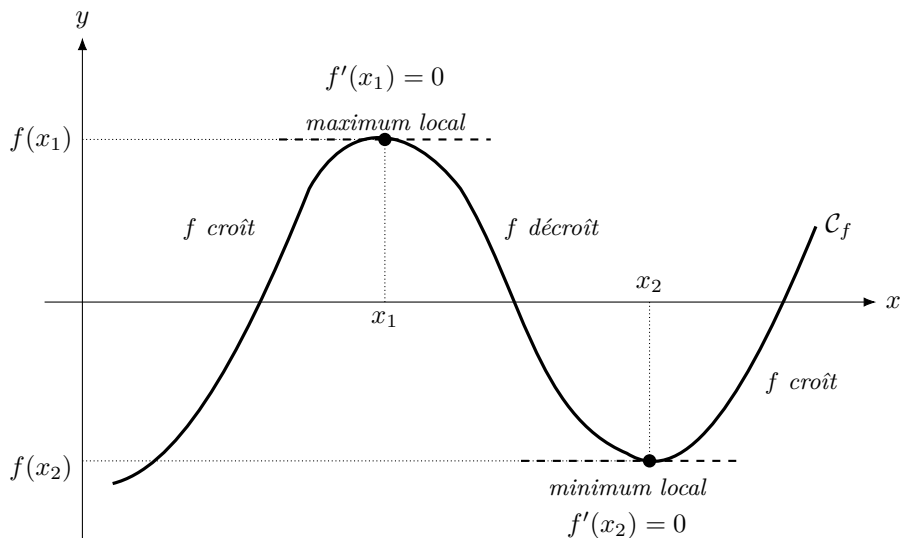
L'étude du signe de la dérivée permet d'exhiber facilement la présence d'extremum locaux.

Théorème 22 (Extremums). Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I .

1. Si $x_0 \in I$ est un extremum de f alors $f'(x_0) = 0$.
2. S'il existe un réel x_0 tel que $f'(x_0) = 0$ et que la dérivée change de signe autour de x_0 ¹ alors $f(x_0)$ est un extremum (local) de f .

Graphiquement, ci-dessous, nous représentons deux extremums locaux (notés x_1 et x_2).

1. par exemple $f'(x) > 0$ si $x > x_0$ et $f'(x) < 0$ si $x < x_0$.



- Remarque.*
1. Attention, si la dérivée s'annule en un point mais ne change pas signe autour de ce point, il ne s'agit pas d'un extremum. Par exemple, si $f(x) = x^3$ alors $f'(x) = 2x^2$ et $f'(0) = 0$ mais f' ne change pas de signe et 0 n'est pas un extremum de f .
 2. Il est usuel d'appeler points critiques les valeurs annulant la dérivée.

Exercices à traiter : 30 page 157 ;

Traisons un deuxième exemple faisant intervenir un quotient cette fois-ci.

Exemple 9.3.2. Etudions les variations de la fonction $f(x) = \frac{x^2 - 6x}{x + 2}$.

1. Tout d'abord il convient d'observer que le domaine de définition de f est $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Sur cet ensemble, f est le quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule jamais : f est donc dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
2. Montrons que pour tout $x > -2$, $f'(x) = \frac{x^2 + 4x - 12}{(x + 2)^2}$. Pour cela, utilisons la formule de dérivation d'un quotient

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

avec $u(x) = x^2 - 6x$ et $v(x) = x + 2$. Nous trouvons alors que

$$u'(x) = 2x - 6 \quad \text{et} \quad v'(x) = 1.$$

Par suite,

$$f'(x) = \frac{(2x - 6)(x + 2) - (x^2 - 6x) \times 1}{(x + 2)^2} = \frac{2x^2 + 4x - 6x - 12 - x^2 + 6x}{(x + 2)^2} = \frac{x^2 + 4x - 12}{(x + 2)^2}.$$

3. Pour déterminer les variations de f , il convient alors d'étudier le signe de f' . Pour cela, il faut traiter séparément le numérateur et le dénominateur.

- (a) Pour le numérateur, il suffit d'employer Δ . Ici, $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times (-12) = 64 > 0$. Il existe donc deux racines

$$x_1 = -6 \quad \text{et} \quad x_2 = 2$$

Le signe du numérateur sera ensuite déterminé par celui de $a = 1 > 0$.

- (b) Pour le dénominateur, il suffit d'observer que

$$(x+2)^2 \geq 0 \quad \text{et que} \quad (x+2)^2 = 0 \iff x = -2.$$

En résumé, nous avons :

x	$-\infty$	x_1	-2	x_2	$+\infty$		
$x^2 + 4x - 12$	+	0	-	-	0	+	
$(x + 2)^2$	+		+	0	+	+	
$f'(x)$	+	0	-		-	0	+

Il est important de ne pas oublier la *double barre* dans la dernière ligne pour signifier que -2 est une valeur interdite.

4. A présent, le signe de $f'(x)$ permet alors d'obtenir les variations de f :

x	$-\infty$	-6	-2	2	$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow f(-6)$	$\searrow$	$\searrow f(2)$	$\nearrow$

avec $f(x_1) = -18$ et $f(x_2) = -2$.

5. Nous observons donc qu'il y a deux extremum locaux :

- (a) un minimum local -18 en $x = -6$
 (b) un maximum local -2 en $x = 2$.

En ces points, les tangentes sont horizontales.

6. Voyons s'il est possible que C_f admette une tangente parallèle à la droite $\mathcal{D}$ d'équation

$$y = -2x + 4.$$

Pour que cela soit le cas, il faut et il suffit que ces droites aient le même coefficient directeur. Autrement dit, il faut résoudre

$$f'(x) = -2 \iff \frac{x^2 + 4x - 12}{(x+2)^2} = -2.$$

Pour résoudre cette équation, nous pouvons multiplier le membre de gauche et de droite afin de se débarrasser du dénominateur :

$$\frac{x^2 + 4x - 12}{(x + 2)^2} = -2. \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + 4x - 12 = -2(x + 2)^2.$$

Il ne reste plus qu'à développer le membre de gauche pour ensuite placer tout les termes dans le membre de droite (par exemple) :

$$x^2 + 4x - 12 = -2x^2 - 8x - 8 \quad \Longleftrightarrow \quad 3x^2 + 12x - 4 = 0.$$

Pour conclure, il suffit d'utiliser Δ . Ici, $\Delta = (12)^2 - 4 \times 3 \times (-4) = 144 + 48 = 192 > 0$. Il y a donc deux solutions :

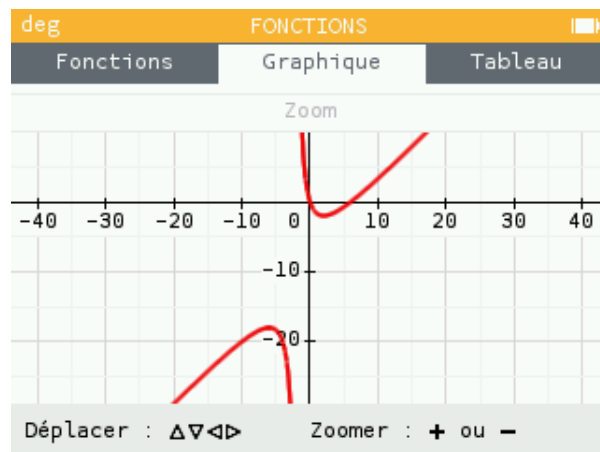
$$x_1 = \frac{-12 + 8\sqrt{3}}{6} = \frac{-4 + 8\sqrt{3}}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-4 - 8\sqrt{3}}{3}.$$

En ces points, C_f admet des tangentes parallèles à la droite $\mathcal{D}$.

7. Le tableau de variations permet aussi d'obtenir un encadrement précis de la fonction f sur un intervalle I donné. Par exemple, si $I = [0; 2]$, nous voyons (d'après le tableau de variation) que f est décroissante sur cet intervalle. Par suite, nous avons

$$f(0) \geq f(x) \geq f(2) \quad \text{pour tout} \quad x \in [0; 2] \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \geq f(x) \geq -2 \quad \text{pour tout} \quad x \in [0; 2].$$

8. Enfin, il est possible de tracer la courbe dans un repère orthonormé afin d'avoir une représentation graphique :



Exercices à traiter : 65page 160;72, 76, 77 page 161; 99p 165; exercices feuille associée.

9.4 Bilan du chapitre

- Etudier les variations d'une fonction à l'aide sa dérivée. Déterminer les éventuels extremums d'une fonction.
- Applications dans différents contexte, problèmes d'optimisation.