

Dérivation – Sommes, produits et quotients

Première générale – Spécialité mathématiques

Objectif : savoir dériver une fonction construite à partir de fonctions usuelles par addition, multiplication ou division.

Rappels :

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad (e^{ax})' = ae^{ax}.$$

1. Dérivée d'une somme

Méthode : Si u et v sont dérivables, alors

$$(u + v)' = u' + v'.$$

Pour une constante k , $(ku)' = ku'$. On dérive donc chaque terme séparément.

Exemple :

$$f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 2x - 7 \implies f'(x) = 12x^3 - 10x + 2.$$

1. Déterminer la dérivée de :

a) $f(x) = x^3 + 4x$

b) $g(x) = 5x^2 - 3$

c) $h(x) = 2x^4 - 7x$

2. Déterminer la dérivée de

$$f(x) = 3x^5 - 2x^3 + 7x - 4.$$

3. Déterminer la dérivée de

$$g(x) = 4x^3 + \sqrt{x}.$$

Préciser l'ensemble sur lequel g est dérivable.

4. Déterminer la dérivée de

$$h(x) = x^2 + 3e^{2x}.$$

5. Déterminer la dérivée de

$$f(x) = \frac{5}{x} + 2x^3 - 4\sqrt{x}.$$

Préciser l'ensemble de dérivabilité.

6. **Exercice plus difficile.** Déterminer la dérivée de

$$f(x) = x^4 - 3x^2 + \frac{2}{x} + 5e^{-x} + \sqrt{x}.$$

Préciser soigneusement l'ensemble sur lequel f est dérivable.

2. Dérivée d'un produit

Méthode : Si u et v sont dérivables, alors

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

On identifie les deux facteurs, on dérive chacun, puis on applique la formule.

Exemple :

$$f(x) = x^2 e^{3x}.$$

Avec $u = x^2$ et $v = e^{3x}$:

$$u' = 2x, \quad v' = 3e^{3x},$$

donc

$$f'(x) = 2xe^{3x} + 3x^2 e^{3x}.$$

1. Déterminer la dérivée de :

a) $f(x) = x^2 e^x$

b) $g(x) = (x + 1)x^3$

c) $h(x) = x\sqrt{x}$

2. Déterminer la dérivée de

$$f(x) = (2x - 3)e^x.$$

3. Déterminer la dérivée de

$$g(x) = x^2 \sqrt{x}.$$

4. Déterminer la dérivée de

$$h(x) = (x^2 + 1)(3x - 2).$$

5. Déterminer la dérivée de

$$f(x) = x^3 e^{-2x}.$$

On ne cherchera pas à développer le résultat.

6. Exercice plus difficile. Déterminer la dérivée de

$$f(x) = (x^2 - 3x + 1)e^{2x}.$$

Factoriser éventuellement le résultat.

3. Dérivée d'un quotient

Méthode : Si u et v sont dérivables et si $v(x) \neq 0$, alors

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Attention au signe « moins » entre les deux termes du numérateur.

Exemple :

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}.$$

Avec $u = x^2$, $v = x + 1$:

$$u' = 2x, \quad v' = 1,$$

donc

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}.$$

1. Déterminer la dérivée de :

a) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

b) $g(x) = \frac{3x+1}{x}$

2. Déterminer la dérivée de

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 2}.$$

Préciser l'ensemble de dérivabilité.

3. Déterminer la dérivée de

$$g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}.$$

Préciser l'ensemble de dérivabilité.

4. Déterminer la dérivée de

$$h(x) = \frac{e^x}{x}.$$

5. Déterminer la dérivée de

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x}{x^2 + 1}.$$

On laissera le résultat sous forme de quotient.

6. **Exercice plus difficile.** Déterminer la dérivée de

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{e^x}.$$

Puis factoriser le numérateur de $f'(x)$ autant que possible.

4. Choisir la bonne formule

Méthode : Avant de calculer, identifier la structure :

$$u + v \Rightarrow u' + v', \quad uv \Rightarrow u'v + uv', \quad \frac{u}{v} \Rightarrow \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Une même fonction peut parfois être écrite de plusieurs façons : choisir la forme qui simplifie le calcul.

1. Indiquer s'il faut utiliser la formule d'une **somme**, d'un **produit** ou d'un **quotient** :

a) $f(x) = x^2 + e^x$

b) $g(x) = x^2 e^x$

c) $h(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$

d) $k(x) = (x - 1)(x^2 + 3)$

2. Sans calculer la dérivée, expliquer pourquoi

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$$

est dérivable sur $]0, +\infty[$.

3. Déterminer la dérivée de

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x}.$$

4. Déterminer la dérivée de

$$g(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$$

de deux façons :

a) avec la formule du quotient ;

b) après simplification de l'expression.

5. Déterminer la dérivée de

$$h(x) = \frac{x^2 e^x}{x}$$

sur $]0, +\infty[$ en choisissant une méthode permettant de simplifier le calcul.

6. **Exercice plus difficile.** Déterminer la dérivée de

$$f(x) = \frac{(x^2 + 1)e^x}{x}$$

sur $]0, +\infty[$. Organiser le calcul pour obtenir une expression de $f'(x)$ aussi simple que possible.

5. Bilan – Quelle formule utiliser ?

1. Déterminer la dérivée de

$$f(x) = 3x^4 - 2x + \sqrt{x}.$$

2. Déterminer la dérivée de

$$g(x) = (x^2 + 1)e^{-x}.$$

3. Déterminer la dérivée de

$$h(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 2}.$$

4. Déterminer la dérivée de

$$k(x) = x^2 + \frac{e^x}{x}.$$

5. Une fonction est définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}.$$

Calculer $f'(1)$.

- 6. Exercice plus difficile.** On considère

$$f(x) = \frac{(x - 1)e^x}{x}.$$

- a) Déterminer $f'(x)$.
- b) Factoriser autant que possible l'expression obtenue.
- c) Calculer $f'(1)$.

Corrigé

1. Dérivée d'une somme

1.

$$\begin{aligned}f'(x) &= 3x^2 + 4, \\g'(x) &= 10x, \\h'(x) &= 8x^3 - 7.\end{aligned}$$

2.

$$f'(x) = 15x^4 - 6x^2 + 7.$$

3. Sur $]0, +\infty[$:

$$g'(x) = 12x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

4.

$$h'(x) = 2x + 6e^{2x}.$$

5. Sur $]0, +\infty[$:

$$f'(x) = -\frac{5}{x^2} + 6x^2 - \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

6. Sur $]0, +\infty[$:

$$f'(x) = 4x^3 - 6x - \frac{2}{x^2} - 5e^{-x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

2. Dérivée d'un produit

1.

$$\begin{aligned}f'(x) &= 2xe^x + x^2e^x = (2x + x^2)e^x, \\g'(x) &= x^3 + 3x^2(x+1) = x^2(4x+3), \\h'(x) &= \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}.\end{aligned}$$

2.

$$f'(x) = 2e^x + (2x-3)e^x = (2x-1)e^x.$$

3.

$$g'(x) = 2x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{2}x\sqrt{x}.$$

4.

$$h'(x) = 2x(3x-2) + 3(x^2+1) = 9x^2 - 4x + 3.$$

5.

$$f'(x) = 3x^2e^{-2x} - 2x^3e^{-2x} = x^2e^{-2x}(3-2x).$$

6.

$$\begin{aligned}f'(x) &= (2x-3-\frac{1}{x^2})e^{2x}\sqrt{x} + 2(x^2-3x+\frac{1}{x})e^{2x}\sqrt{x} + (x^2-3x+\frac{1}{x})e^{2x}\frac{1}{\sqrt{x}} \\&= e^{2x}\sqrt{x}(2x-3-\frac{1}{x^2}+2x^2-6x+\frac{2}{x}+\frac{x}{2}-\frac{3}{2}+\frac{1}{x^2}) \\&= e^{2x}\sqrt{x}\frac{4x^4-11x^3-9x^2+4x}{2x^2}.\end{aligned}$$

3. Dérivée d'un quotient

1.

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2},$$

et

$$g'(x) = \frac{x \cdot 3 - (3x+1)}{x^2} = -\frac{1}{x^2}.$$

2. Pour $x \neq 2$:

$$f'(x) = \frac{2x(x-2) - (x^2+1)}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x - 1}{(x-2)^2}.$$

3. Sur $]0, +\infty[$:

$$g'(x) = \frac{\frac{x+1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}}{(x+1)^2} = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}.$$

4. Pour $x \neq 0$:

$$h'(x) = \frac{xe^x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}.$$

5.

$$f'(x) = \frac{(3x^2-2)(x^2+1) - (x^3-2x)(2x)}{(x^2+1)^2}.$$

Après simplification :

$$f'(x) = \frac{x^4 + 5x^2 - 2}{(x^2+1)^2}.$$

6.

$$f(x) = \frac{x^2+1}{e^x}.$$

Avec $u = x^2 + 1$ et $v = e^x$:

$$f'(x) = \frac{2xe^x - (x^2+1)e^x}{e^{2x}} = \frac{2x - x^2 - 1}{e^x}.$$

Or

$$2x - x^2 - 1 = -(x-1)^2.$$

Ainsi

$$\boxed{f'(x) = -\frac{(x-1)^2}{e^x}}.$$

4. Choisir la bonne formule

1. a) somme ;
b) produit ;
c) quotient ;
d) produit.
2. La fonction x^2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction $\frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Leur somme est donc dérivable sur $]0, +\infty[$.

3.

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2}.$$

4. Première méthode :

$$g'(x) = \frac{2x \cdot x - (x^2+1)}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}.$$

Deuxième méthode :

$$g(x) = x + \frac{1}{x} \implies g'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}.$$

5. Pour $x > 0$,

$$h(x) = xe^x,$$

donc

$$h'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x.$$

6. Pour $x > 0$:

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right) e^x.$$

En posant

$$u(x) = x + \frac{1}{x}, \quad v(x) = e^x,$$

on obtient

$$u'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}, \quad v'(x) = e^x.$$

Ainsi

$$f'(x) = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) e^x + \left(x + \frac{1}{x}\right) e^x.$$

Donc

$$\boxed{f'(x) = e^x \left(x + 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}.$$

5. Bilan

1.

$$f'(x) = 12x^3 - 2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0.$$

2.

$$g'(x) = 2xe^{-x} - (x^2 + 1)e^{-x} = e^{-x}(2x - x^2 - 1).$$

3.

$$h'(x) = \frac{2x(x+2) - (x^2 - 1)}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4x + 1}{(x+2)^2}.$$

4.

$$k'(x) = 2x + \frac{xe^x - e^x}{x^2} = 2x + \frac{e^x(x-1)}{x^2}.$$

5.

$$f'(x) = \frac{2x \cdot x - (x^2 + 1)}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}.$$

Donc

$$\boxed{f'(1) = 0}.$$

6.

$$f(x) = \frac{(x-1)e^x}{x}.$$

On peut d'abord écrire

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^x.$$

Ainsi

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} e^x + \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^x.$$

Donc

$$\boxed{f'(x) = e^x \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}$$

ou encore

$$\boxed{f'(x) = \frac{e^x(x^2 - x + 1)}{x^2}}.$$

Enfin,

$$\boxed{f'(1) = e}.$$