Feuille de TD n°1 3ième année GI

Exercice 1 :
Soient f, g et h des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x\log(x)^2 + y^2, \\ g(x,y) &= x^4 + y^4 - 2(x-y)^2 \\ h(x,y) &= x^3y^2(1-x+y) \end{aligned}$$

Déterminer les extrema des fonctions s'il en existe. Donner la nature de ces extrema et la valeur correspondante.

Exercice 2 : Production
On considère une unité de production qui utilise n matières premières $p_1,..,p_n$. Si l'unité de production utilise des quantités $x_1,..,x_n$ de ces matières premières alors en sortie on obtient une quantité $h(x_1,..,x_n)$ de produit fini. Les coûts unitaires des matières premières sont $p_1,..,p_n$. Le prix de vente du produit fini est q. Exprimer les conditions nécessaires du 1er et 2nd ordre pour l'obtention de valeurs $x_1,..,x_n$ qui maximisent le profit. Appliquer les résultats précédents au cas $p_1 = 2$, $p_2 = 1$ et $h(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$ puis au cas $p_1 = p_2 = 1$ et $h(x_1,x_2) = x_1^{2/3}x_2^{2/3}$.

Exercice 3 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = 3x^4 - 4x^2y + y^2.$$

1) Montrer que f admet un seul point stationnaire $\bar{x}$ et donner la nature de ce point.
2) Montrer que $\forall \alpha k(\alpha) = f(x,\alpha x)$ présente un minimum en 0.
3) Montrer que $g(x) = f(x,2x^2)$ présente un maximum en 0.

Exercice 4 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = 5x^2 + 3y^2 + 8xy - 3x + 7y.$$

Montrer que f a un unique point statinnaire $\bar{x}$ et préciser la nature de $\bar{x}$.

Feuille de TD n^{o}2 3ième année GI

Exercice 1 :
On considère la surface de révolution T (tore) engendrée par rotation du cercle de centre (2,0,0) et de rayon 1 dans le plan $\{y=0\}$.
a) Montrer que T est décrit par la représentation paramétrique $\tau(\theta,\varphi)$:

$$\begin{cases} x &= \tau_1(\theta,\varphi) = \cos\theta(2+\cos\varphi) \\ y &= \tau_2(\theta,\varphi) = \sin\theta(2+\cos\varphi) \\ z &= \tau_3(\theta,\varphi) = \sin\varphi \end{cases}$$

b)Montrer que T admet l'équation cartésienne

$$h(x,y,z) := (x^2+y^2-2)^2 + z^2 = 1$$

c) Soit $f(x,y,z) = x$. Déterminer les extrema de f.
d) Retrouver ces points en étudiant les extrema de $fo\tau$.

Exercice 2 : Production
On considère n centrales électriques $C_1,...,C_n$. On note

- P_i la puissance produite par C_i,
- $F_i(P_i)$ le coût de production de P_i (fonction de P_i uniquement)
- $P_{C_i}(P_1,...,P_n)$ la perte de transmission entre C_i et l'utilisateur (fonction de $(P_1,...,P_n)$)
- P_u la puissance demandée par l'utilisateur (indépendante des P_i, $i=1...n$).

Trouver les productions $P_1,...,P_n$ permettant de minimiser le coût, tout en répondant à la demande de l'utilisateur.

Appliquer les résultats précédents au cas $F_1(P_1) = P_1^3$, $F_2(P_2) = P_2^3$, $P_{C_1} = rP_1$ et $P_{C_2} = rP_2$.

Exercice 3 :
1) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$ et $s > 0$. On considère l'application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x_1,..,x_n) = x_1...x_n.$$

Maximiser f sur $\Gamma = \{(x_1,...,x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n / \ \sum_{i=1}^n x_i = s\}$ et retrouver ainsi l'inégalité arithmético-géométrique.
2) On se donne un entier $n \geq 2$ et n réels strictement positifs $\lambda_1,...,\lambda_n$. On note

$$\Gamma = \{(x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n / \ \sum_{i=1}^n \frac{x_i^4}{\lambda_i^4} = 1\}$$

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(x_1,...,x_n) \to \sum_{i=1}^n x_i^2$, déterminer le maximum global de f sur Γ.
3) Soient $a_1,...,a_n$ des réels strictement positifs tels que $a_1 + ... + a_n = 1$, avec $n \geq 2$. Démontrer que

$$\prod_{i=1}^{n} a_i(1-a_i) \leq \frac{(n-1)^n}{n^{2n}}.$$

Exercice 4 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = 5x^2 + 3y^2 + 8xy - 3x + 7y.$$

Montrer que f a un unique point statinnaire $\bar{x}$ et préciser la nature de $\bar{x}$.

Feuille de TD n°3 3ième année GI

Exercice 1 :
Montrer que $f(x,y) = x + y - \log(xy)$ est strictement convexe sur $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ \ x > 0, \ \ y > 0\}$, qu'elle admet un point stationnaire. Donner la nature de ce point et la valeur correspondante.

Exercice 2 :
Montrer que $f(x,y) = 5x^2 - 4xy + y^2 + 22x - 8y + 36$ est strictement convexe. Donner les points stationnaires de f et leur nature.

Exercice 3 :
Soit S un ensemble de $\mathbb{R}^n$ défini par les contraintes $g_1(x) \leq 0, ..., g_i(x) \leq 0$ avec g_i des fonctions convexes.
Montrer que S est convexe.

Application : Montrer que $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ \ x^2 + 3y^2 \leq 2, \ \ x + y \geq -10, \ \ 2x + 3y \leq 5\}$ est un ensemble convexe.

Exercice 4 :
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{2} < Ax, x > + < b, x > + c$$

avec A une matrice carrée symétrique définie positive et $b, \ c$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
Montrer que f a un unique point statinnaire $\bar{x}$ et préciser la nature de $\bar{x}$.

Exercice 5 :
Soient Q une matrice symétrique semi-définie positive et c un vecteur de $\mathbb{R}^n$.
Minimiser $f(x) = \frac{1}{2} < Qx, x > + < c, x >$ sur la contrainte $\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b\}$ où $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ et b un vecteur de $\mathbb{R}^m$.