

Renforcement Séries Chronologiques

Exercices et TP

Agnès Lagnoux
lagnoux@univ-tlse2.fr

ISMAG
MASTER 1 - MI00141X

M1 ISMAG

MI0B246X - Séries chronologiques

Feuille d'exercices n°1 : Processus stationnaires, AR et MA

Exercice 1

Le but de cet exercice est de montrer que la somme de deux processus stationnaires n'est pas nécessairement stationnaire.

Soit $(\eta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ un bruit blanc ; vérifier que les processus définis par : $X_t = \eta_t, \forall t \in \mathbb{Z}$ et $Y_t = (-1)^t \eta_t, \forall t \in \mathbb{Z}$ sont stationnaires. Montrer que leur somme $Z_t = X_t + Y_t, \forall t \in \mathbb{Z}$, n'est pas un processus stationnaire.

Exercice 2

Parmi les séries chronologiques suivantes, déterminer celles qui sont centrées, stationnaires.

- $X_n = \frac{1}{n} \epsilon_n$.
- $X_n = 0.2 \epsilon_n + 0.9 \epsilon_{n-8}$.
- $X_n = \epsilon_n^2 + 0.5 \epsilon_{n-1} - \sigma^2$.
- $X_n = \epsilon_n + 0.2n$.

Nota : Ici ϵ_n est un bb Gaussien de variance σ^2 .

On rappelle que si Y et Z sont des v.a. indépendantes, alors Y^2 est indépendant de Z . Certains calculs peuvent être évités en reconnaissant des modèles connus.

Exercice 3

Soit $X = (X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ un processus stationnaire et pour tout $t \in \mathbb{Z}$, X_t^* la régression affine de X_t sur $(X_s)_{s \leq t-1}$. Montrer que le processus défini par la suite des innovations $(X_t - X_t^*)_{t \in \mathbb{N}}$ est un bruit blanc.

Exercice 4

À partir des autocorrélations empiriques (en haut) et des autocorrélations partielles empiriques (en bas), proposer, s'il y a lieu, des modèles pour les processus suivants de la figure 1.

Exercice 5 : Etude approfondie du processus MA(1)

On considère le processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ défini par :

$$\forall t \in \mathbb{Z}, X_t = \eta_t - \theta \eta_{t-1},$$

où θ est un réel tel que $|\theta| < 1$ et $(\eta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance $\sigma^2 > 0$.

1. Écrire η_t en fonction de $(X_s, s \leq t)$.
2. En déduire la régression affine de X_t sur $(X_s, s \leq t)$.
3. Soit $\widehat{X}_T(1)$ la prévision linéaire optimale de X_{T+1} , c'est-à-dire la régression affine de X_{T+1} sur X_T, X_{T-1}, \dots . Calculer l'erreur de prévision :

$$\mathbb{E} \left(X_{T+1} - \widehat{X}_{T+1} \right)^2.$$

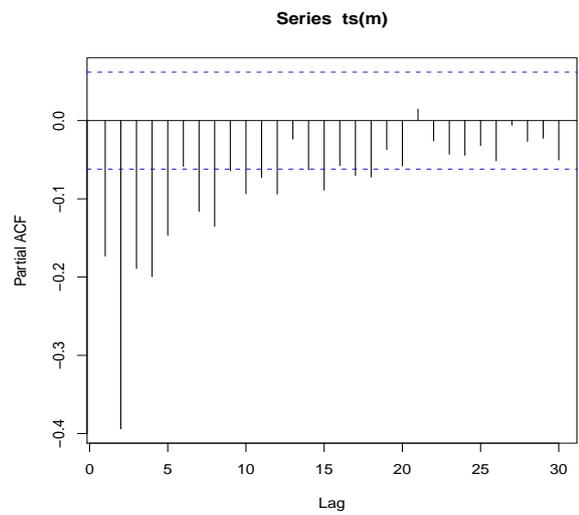
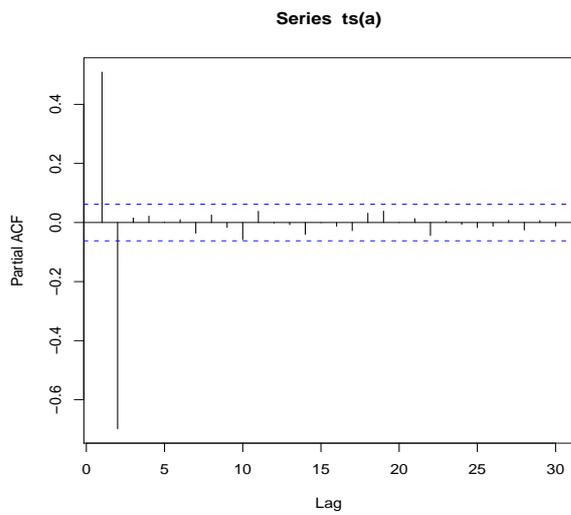
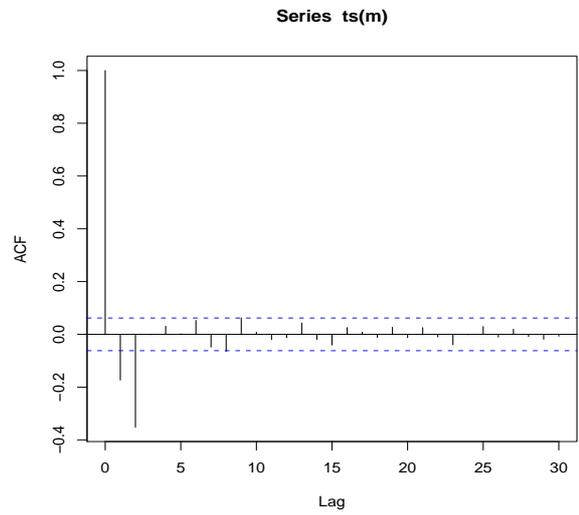
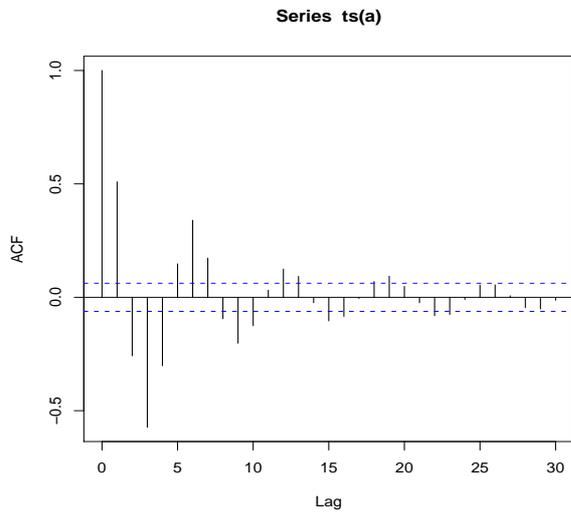


FIGURE 1 – Exemples de l'exercice 4

Exercice 6 : Etude approfondie du processus AR(1)

Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ un processus stochastique centré tel que :

$$X_t - \varphi X_{t-1} = \eta_t, \quad \forall t \in \mathbb{Z},$$

où $(\eta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance $\sigma^2 > 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$.

I.

1. On suppose que $\varphi = 1$.
 - a. Pour $t \in \mathbb{Z}$ et $h \in \mathbb{N}^*$, écrire $X_t - X_{t-h}$ en fonction de $\eta_t, \dots, \eta_{t-h+1}$.
 - b. En déduire la valeur de $\mathbb{E} (X_t - X_{t-h})^2$.
 - c. Montrer que $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ne peut pas être un processus stationnaire.
2. On suppose que $\varphi = -1$; montrer que $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ne peut pas être stationnaire.

II. On suppose que $|\varphi| < 1$ et que $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un processus stationnaire.

1. Pour $t \in \mathbb{Z}$, écrire X_t en fonction de $(\eta_s)_{s \in \mathbb{Z}}$.
2. En déduire que η_t est l'innovation du processus à la date t .
3. Soit $h \in \mathbb{N}^*$; établir une relation de récurrence entre $\gamma(h)$ et $\gamma(h-1)$, où γ est la fonction d'autocovariance du processus.
4. Calculer $\gamma(0)$ et en déduire l'expression de $\gamma(h)$ pour tout h .
5. Calculer la fonction d'autocorrélation du processus.
6. Calculer la fonction d'autocorrélation partielle du processus.
7. Montrer que, pour $i = 1, 2$, $\hat{\gamma}(i) = \frac{1}{T-i} \sum_{t=1}^{T-i} X_t X_{t+i}$ est un estimateur sans biais de $\gamma(i)$. En déduire un estimateur de φ .

III. On suppose que $|\varphi| > 1$ et que $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est stationnaire.

1. Ecrire X_t en fonction de $(\eta_s)_{s \in \mathbb{Z}}$.
2. Soit $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ le processus défini par :

$$X_t - \frac{1}{\varphi} X_{t-1} = \epsilon_t.$$

Ecrire ϵ_t en fonction de $(\eta_s)_{s \in \mathbb{Z}}$.

3. Montrer que $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un bruit blanc et que ϵ_t est l'innovation du processus à la date t .

Exercice 7

Soit η un bruit blanc de variance 1 et X le MA(1) défini selon

$$X_t = \eta_t - 2\eta_{t-1}$$

1. Quelles sont les autocovariances de X ?
2. Quelle est la relation MA(1) entre X et son bruit blanc d'innovation ϵ ?

3. Quelle est la variance de ϵ ?
4. Exprimez ϵ_t en fonction des valeurs passées de X .
5. Exprimez les prévisions optimales $\widehat{X}_t(1), \widehat{X}_t(2), \dots$ en fonction de X_t, X_{t-1}, \dots

Exercice 8

Soit η un bruit blanc et X le AR(1) de variance 1 vérifiant

$$X_t - 3X_{t-1} = \eta_t$$

1. Comment s'exprime X en fonction des valeurs passées de son bruit blanc d'innovation ϵ_t ?
2. On suppose avoir observé $(X_{-5}, \dots, X_0) = (-1, 0.6, 1.2, -0.6, 0.75, 0.27)$. Quelles sont les valeurs numériques des prédictions optimales $\widehat{X}_0(1)$ et $\widehat{X}_0(2)$?
3. Quelle est la variance de ϵ ?
4. Déterminer la variance de η :
 - (a) en utilisant la relation $X_t - 3X_{t-1} = \eta_t$;
 - (b) après avoir exprimé X en fonction des valeurs futures de η .

Exercice 9

Soit ϵ un bruit blanc de variance γ^ϵ et X le AR(2) vérifiant

$$X_t - \frac{8}{15}X_{t-1} + \frac{1}{15}X_{t-2} = \epsilon_t$$

1. On suppose que X est de variance 1. Quelles sont les équations de Yule-Walker reliant $\gamma^\epsilon, \gamma_0 (= 1), \gamma_1$ et γ_2 ? En déduire les valeurs de $\gamma^\epsilon, \gamma_1$ et γ_2 ?
2. Déterminez A et B de sorte que

$$\frac{1}{(1 - \frac{1}{3}z)(1 - \frac{1}{5}z)} = \frac{A}{(1 - \frac{1}{3}z)} + \frac{B}{(1 - \frac{1}{5}z)}.$$

3. Donnez les valeurs de c_0, c_1, c_2 dans l'expression $X_t = c_0\epsilon_t + c_1\epsilon_{t-1} + c_2\epsilon_{t-2} + \dots$
4. Comment s'exprime $X_{t+1} - \widehat{X}_t(1)$ l'erreur de prédiction à l'horizon 1 en fonction des $\epsilon_{t+1}, \epsilon_t, \dots$?
Même question pour $X_{t+2} - \widehat{X}_t(2)$ (en fonction des $\epsilon_{t+2}, \epsilon_{t+1}, \dots$).
Calculer la variance de $X_{t+2} - \widehat{X}_t(2)$?

Exercice 10

Soit η un bruit blanc de variance 1 et X le MA(q) vérifiant

$$X_t = 5\eta_{t+5} - 10\eta_{t-5}.$$

1. Quelle est la valeur minimale de q pour laquelle X est un MA(q) ?
2. Calculer les autocovariances de X ?
3. Donner la relation entre X et son bruit blanc d'innovation ϵ .
4. Calculer la variance de ϵ .

M1 ISMAG
MI0B246X - Séries chronologiques
Feuille d'exercices n°2 : Processus ARMA

Exercice 1

Soit η un bruit blanc et X le ARMA(1,1) vérifiant

$$X_t - 2X_{t-1} = \eta_t + \frac{1}{2}\eta_{t-1}$$

1. Quelle est la relation ARMA entre X et son bruit blanc d'innovation ϵ ?
2. Exprimez X_t en fonction des valeurs passées de ϵ .
3. Exprimez ϵ_t en fonction des valeurs passées de X .

Exercice 2

Soit ϵ un bruit blanc et X le ARMA(1,1) vérifiant

$$X_t - \frac{1}{3}X_{t-1} = \epsilon_t - \frac{1}{2}\epsilon_{t-1}$$

1. Soit Y le AR(1) vérifiant

$$Y_t - \frac{1}{3}Y_{t-1} = \epsilon_t.$$

Montrez que $X_t = Y_t - \frac{1}{2}Y_{t-1}$. Pour cela, on pose $Z_t = Y_t - \frac{1}{2}Y_{t-1}$. Puis on montre que

- (a) Z est bien stationnaire ;
 - (b) Z satisfait la même relation que X ;
 - (c) on déduit que $Z_t = X_t$.
2. Exprimez γ_0^X en fonction de γ_0^Y et γ_1^Y .
 3. On suppose que ϵ est de variance 1. Calculez γ_0^Y et γ_1^Y puis déduisez-en γ_0^X .
 4. Retrouver ce résultat directement à partir de la relation ARMA de X .

Exercice 3

Soit X un ARMA(p, q). Soit Y la série stationnaire définie par

$$\forall t, \quad Y_t = X_{-t}.$$

Montrez que Y est aussi un ARMA(p, q).

Exercice 4

On étudie ici les processus ARMA(1,1)

$$X_t = aX_{t-1} + \epsilon_t - b\epsilon_{t-1},$$

où $|a| < 1$, $|b| < 1$ et ϵ est un bruit blanc de variance σ^2 .

1. Ecrire le développement en moyenne mobile infinie de ces processus.
2. Calculer $\gamma(0)$, $\gamma(1)$, ... à partir de l'expression précédente.

3. Montrer directement (sans utiliser la représentation moyenne mobile infinie) que la variance du processus $\gamma(0)$ est

$$\gamma(0) = \sigma^2 \frac{1 + b^2 - 2ab}{1 - a^2}.$$

4. Déterminer de la même façon l'autocovariance d'ordre 1 $\gamma(1)$ ainsi qu'une relation de récurrence pour les autocorrélations d'ordre h avec $h > 1$.
5. En déduire les autocorrélations $\rho(h)$ du processus.

Exercice 5

On considère le processus aléatoire suivant

$$X_t = 10 + \frac{7}{10}X_{t-1} - \frac{1}{10}X_{t-2} + \epsilon_t - \frac{5}{10}\epsilon_{t-1}$$

où ϵ est un bruit blanc de variance σ^2 .

1. Calculer l'espérance de X en supposant que le processus est stationnaire.
2. Trouver un nombre μ tel que le processus $Y_t = X_t - \mu$ soit un ARMA(2,1) sans terme constant et précisez quelle est la récurrence obtenue.
3. Calculer les trois premiers coefficients ψ_0 , ψ_1 et ψ_2 de la représentation moyenne mobile infinie de Y_t , c'est-à-dire que

$$Y_t = \sum_{i \geq 0} \psi_i \epsilon_{t-i}.$$

Déterminer aussi une formule de récurrence générale pour les coefficients ψ_j .

4. Calculer les trois premiers coefficients π_0 , π_1 et π_2 de la représentation moyenne mobile infinie de Y_t , c'est-à-dire que

$$\epsilon_t = \sum_{i \geq 0} \pi_i Y_{t-i}.$$

Déterminer aussi une formule de récurrence générale pour les coefficients π_j .

5. Donner une formule de récurrence pour les prévisions de Box-Jenkins $\hat{Y}_t(h)$ de Y_{t+h} .
6. Exprimer $\hat{Y}_t(h)$ en fonction des Y_j , $j = 0, \dots, t$ et des valeurs $Y_{-1}, Y_{-2} \dots$
7. En déduire une formule générale de prévision pour $\hat{X}_t(h)$.

M1 ISMAG

MI0B246X - Séries chronologiques

Feuille d'exercices n°3 : Processus ARIMA et SARIMA

Exercice 1 :

On considère le processus ARMA(1,1) de moyenne $\mu = 0$

$$(I - \phi B)Y_t = (I - \theta B)\eta_t$$

où $|\phi| < 1$ et $|\theta| < 1$.

1. Montrer que la fonction de prévision Box-Jenkins est donnée par $\hat{Y}_t(k) = \phi^{k-1}\hat{Y}_t(1)$ et que

$$\begin{aligned} \hat{Y}_t(1) &= \phi Y_t - \theta \eta_t \\ &= (\phi - \theta) \sum_{j=0}^{\infty} \theta^j Y_{t-j} \\ &= (\phi - \theta)(Y_t + \theta Y_{t-1} + \theta^2 Y_{t-2} + \dots) \end{aligned}$$

Ces résultats restent-ils vrais si $\phi = 1$ et donc pour un ARIMA(0,1,1) ?

2. Montrer qu'on a aussi $\hat{Y}_t(1) = (\phi - \theta)Y_t + \theta\hat{Y}_{t-1}(1)$.
3. On utilise ce modèle pour ajuster une série et on obtient comme estimations des paramètres $\phi = 0.8$, $\theta = 0.3$ et $\mu = 0$. Les dix dernières valeurs disponibles sont :

t	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
y_t	2.98	4.10	6.10	9.36	8.57	8.82	7.31	7.19	2.36	0.40

Donner les prévisions des trois valeurs suivantes de la série. Laquelle des différentes formules pour $\hat{Y}_t(1)$ ci-dessus paraît la plus convenable à appliquer ?

Exercice 2 :

On considère un processus ARIMA(0,1,1) (aussi appelé IMA(1,1)) et défini par :

$$(I - B)Y_t = (I - \theta B)\eta_t$$

1. Si $|\theta| < 1$, déterminer les coefficients de la représentation du bruit.
2. En remarquant que $(I - B) \sum_{i=0}^{t-1} B^i = I - B^t$, montrer que

$$Y_t - Y_0 = \eta_t + (1 - \theta) \sum_{k=1}^{t-1} \eta_{t-k} - \theta \eta_0.$$

3. Montrer que $\hat{Y}_t(1) = (1 - \theta)Y_t + \theta\hat{Y}_{t-1}(1)$.

Note : La dernière formule redonne le lissage exponentiel quand $\theta \in (0, 1)$ et donc $\alpha = 1 - \theta \in (-1, 0)$. La formule donne une moyenne pondérée : $\hat{Y}_t(1) = \alpha Y_t + (1 - \alpha)\hat{Y}_{t-1}(1)$ et α est la constante de lissage. Ainsi on peut voir la prévision Box-Jenkins comme une généralisation du lissage exponentiel, en utilisant des paramètres estimés à partir des données (au-lieu de ad-hoc).

Exercice 3 :

Considérons le processus ARIMA(1,1,1)

$$(I - \phi B)(I - B)Y_t = (I + \theta B)\eta_t,$$

avec $|\phi| < 1$ et $|\theta| < 1$.

1. Montrer que $\hat{Y}_t(1) = (1 + \phi)Y_t - \phi Y_{t-1} + \theta \eta_t$ et $\hat{Y}_t(k) = (1 + \phi)\hat{Y}_t(k-1) - \phi \hat{Y}_t(k-2)$ pour $k \geq 2$.
2. Montrer que $\hat{Y}_t(k) = A_t + B_t \phi^k$ pour $k \geq 0$ et trouver des expressions pour A_t et B_t en termes de $Y_t, Y_{t-1}, \eta_t, \phi$ et θ , en utilisant $\hat{Y}_t(0) [= Y_t]$ et $\hat{Y}_t(1)$ du (1) ci-dessus. Montrer que :

$$\hat{Y}_t(k) = Y_t + \phi \frac{1 - \phi^k}{1 - \phi} (Y_t - Y_{t-1}) + \theta \frac{1 - \phi^k}{1 - \phi} \eta_t, \quad k \geq 0.$$

Trouver la limite $\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{Y}_t(k)$.

3. Montrer que $\hat{Y}_t(1) = -\theta \hat{Y}_{t-1}(1) + (1 + \phi + \theta)Y_t - \phi Y_{t-1}$ et $\hat{Y}_t(k) = \hat{Y}_{t-1}(k+1) + \psi_k \eta_t$.
4. Montrer que $\hat{Y}_t(k)$ peut s'exprimer en fonction seulement des valeurs passées de la série. [Indication : utiliser les π pour vous débarrasser de η_t].
5. En utilisant le modèle $(I - 0.6B)(I - B)Y_t = (I + 0.3B)\eta_t$, obtenir les prévisions des trois termes suivants de la série :

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y_t	14.8	12.4	9.4	7.7	7.3	9.0	10.5	11.2	10.4	11.6
t	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Y_t	12.1	11.6	9.9	8.1	6.6	5.4	4.2	5.3	6.8	9.2

Exercice 4 :

Considérons le processus ARIMA(1,1,2)

$$(I - \alpha B)(I - B)Y_t = (I + \theta_1 B + \theta_2 B^2)\eta_t$$

où $|\alpha| < 1$. Soit $\hat{Y}_t(k)$ la prévision de Y_{t+k} au temps t .

1. Montrer que $\hat{Y}_t(1) = (1 + \alpha)Y_t - \alpha Y_{t-1} + \theta_1 \eta_t + \theta_2 \eta_{t-1}$ et trouver les expressions correspondantes pour $\hat{Y}_t(2)$ et $\hat{Y}_t(k)$ pour $k \geq 3$.
2. Montrer que la fonction de prévision peut s'exprimer sous la forme $\hat{Y}_t(k) = a_t + b_t \alpha^k$, $k \geq 1$ et donner la formule de a_t, b_t comme fonctions de $Y_t, Y_{t-1}, \eta_t, \eta_{t-1}$.
3. Montrer que $\hat{Y}_t(k)$ peut s'exprimer en fonction seulement des valeurs passées de la série.
4. Un statisticien a utilisé le modèle ARIMA (1,1,2) décrit ci-dessus pour une série (dénommée prix) qui exprime le prix d'une action à la bourse pour 100 jours consécutifs. En sachant que $\hat{Y}_{98}(1) = 686.996$ et $\hat{Y}_{99}(1) = 659.416$, calculer les prévisions $\hat{Y}_{100}(1)$ et $\hat{Y}_{100}(2)$ de Y_{101} et Y_{102} .

Exercice 5 : Optimalité du lissage exponentiel double

La théorie de la prévision des ARIMA(p, d, q) a montré que

$$\widehat{X}_t(k) = - \sum_{j=1}^{p+d} \phi_j \widehat{X}_{t+k-j} + \sum_{j=1}^q \theta_j \widehat{\eta}_{t+k-j}, \quad (1)$$

avec

$$\widehat{X}_{t+k-j} = \begin{cases} \widehat{X}_t(k-j) & \text{si } k > j \\ X_{t+k-j} & \text{si } k \leq j \end{cases}$$

et

$$\widehat{\eta}_{t+k-j} = \begin{cases} 0 & \text{si } k > j \\ \eta_{t+k-j} & \text{si } k \leq j \end{cases}$$

- 1) Quelle est l'expression de $\widehat{X}_t(k)$ lorsque $k > q$?
- 2) En déduire que

$$\widehat{X}_t(k) = \sum_{i=1}^{p+d} b_i(t) f_i(k), \quad (2)$$

les $f_i(k)$, $i = 1, \dots, p+d$, étant les solutions de élémentaires de l'équation de récurrence ayant pour polynôme caractéristique

$$z^{p+d} - \sum_{i=1}^{p+d} \phi_i z^{p+d-i} = z^{p+d} \phi\left(\frac{1}{z}\right).$$

Les $b_i(t)$ sont déterminées par les valeurs initiales, appelées dans ce contexte les *valeurs pivotales*, à savoir $\widehat{X}_t(k)$, $k = q, q-1, \dots, q-p-d+1$.

- 3) On note

$$F_k = \begin{bmatrix} f_1(k) \dots f_{p+d}(k) \\ \vdots \\ f_1(k+p+d-1) \dots f_{p+d}(k+p+d-1) \end{bmatrix}$$

$$b(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_{p+d}(t) \end{bmatrix}, \quad \tilde{h}_k = \begin{bmatrix} h_k \\ \vdots \\ h_{k+p+d-1} \end{bmatrix}.$$

Montrer que pour $k > q-p-d$,

$$b(t) = F_k^{-1} F_{k+1} b(t-1) + F_k^{-1} \tilde{h}_k \epsilon_t, \quad (3)$$

ϵ étant le bruit blanc d'innovation du processus ARIMA(p, d, q), X_t et les h_j ayant le sens habituel.

Rappelons que le lissage exponentiel double conduit à la formule de prévision

$$\widehat{X}_t(k) = \widehat{a}_t k + \widehat{b}_t, \quad \forall k > 0 \quad (4)$$

et aux formules de mise à jour

$$\widehat{a}_t = \widehat{a}_{t-1} + (1-\beta)^2 \left(X_t - \widehat{X}_{t-1}(1) \right),$$

et

$$\widehat{b}_t = \widehat{b}_{t-1} + \widehat{a}_{t-1} + (1 - \beta^2) \left(X_t - \widehat{X}_{t-1}(1) \right).$$

où β est la constante de lissage.

4) Montrer que pour que (2) soit du type (4), on doit avoir $\phi(B) = (I - B)^2$.

5) Montrer alors que les formules (3) sont les mêmes que celles rappelées ci-dessus si et seulement si $\Theta(B) = (I - \beta B)^2$

6) Vérifier que le lissage exponentiel double est bien optimal pour X_t satisfaisant $\nabla^2 X_t = (I - \beta B)^2 \epsilon_t$.

M1 ISMAG

MI0B246X - Séries chronologiques

Feuille d'exercices n°4 : Processus ARCH et GARCH

Les moments conditionnels

La définition d'un processus ARCH fait intervenir la notion de variance conditionnelle. Nous avons vu que la variance conditionnelle permet de modéliser la variance locale du processus à chaque instant t , en fonction des observations antérieures. Cette notion peut être étendue à tous les moments de la série chronologique. Ainsi, l'espérance conditionnelle du processus (X_t) au temps t est la valeur moyenne attendue du processus au temps t calculée en tenant compte des valeurs du processus observées dans le passé.

Pour illustrer ce concept, considérons la marche aléatoire

$$X_t = X_{t-1} + \epsilon_t$$

où $\epsilon_t \sim \text{i.i.d.}(0, \sigma_\epsilon^2)$.

- L'espérance de ce processus a déjà été calculée et $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_0)$ pour tout t ; donc l'espérance de ce processus est constante.
- Calculons son espérance conditionnelle en X_t , tenant compte des observations passées $(X_{t-i}, i > 0)$: par linéarité de l'espérance, on peut écrire :

$$\mathbb{E}(X_t | X_{t-1}, X_{t-2}, \dots) = \mathbb{E}(X_{t-1} | X_{t-1}, X_{t-2}, \dots) + \mathbb{E}(\epsilon_t | X_{t-1}, X_{t-2}, \dots).$$

Le premier des deux termes de la somme est la valeur attendue de X_{t-1} sachant $(X_{t-i}, i > 0)$. Comme on connaît X_{t-1} , ce terme est l'espérance d'une valeur fixée X_{t-1} . C'est donc X_{t-1} . En ce qui concerne le deuxième terme, il faut observer que ϵ_t ne dépend pas des réalisations passées du processus $(X_{t-i}, i > 0)$ (car le processus (ϵ_t) est i.i.d.). La connaissance du passé ne modifie donc pas la valeur attendue de ϵ_t et on peut écrire :

$$\mathbb{E}(X_t | X_{t-1}, X_{t-2}, \dots) = X_{t-1} + \mathbb{E}(\epsilon_t) = X_{t-1}.$$

L'espérance conditionnelle d'une marche aléatoire en t est donc la valeur du processus en $t - 1$.

Interprétation : On peut interpréter ce résultat en énonçant que le meilleur prédicteur linéaire de la valeur moyenne d'une marche aléatoire est réalisé en répétant sa dernière valeur observée.

La notion de variance conditionnelle est naturellement définie à partir de celle de l'espérance conditionnelle, par la définition de la variance en fonction de l'espérance.

$$\text{Var}(X_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \mathbb{E}(X_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}) - \mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_{t-1})^2.$$

Par extension, on définit également tous les moments conditionnels d'ordre $r > 1$.

Exercice 1 :

Considérons le processus AR(1)

$$X_t = c + \phi X_{t-1} + \epsilon_t$$

où $\epsilon_t \sim \text{i.i.d.}(0, \sigma_\epsilon^2)$ et $|\phi| < 1$. Montrer les moments et moments conditionnels suivants :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_{t-1}) &= c + \phi X_{t-1} & \mathbb{E}(X_t) &= \frac{c}{1-\phi} \\ \text{Var}(X_t | \mathcal{F}_{t-1}) &= \sigma_\epsilon^2 & \text{Var}(X_t) &= \frac{\sigma_\epsilon^2}{1-\phi^2}\end{aligned}$$

Exercice 2 :

Considérons le processus MA(1)

$$X_t = \epsilon_t + \theta_{t-1}$$

avec $\epsilon_t \sim \text{i.i.d.}(0, \sigma_\epsilon^2)$. Montrer les moments et moments conditionnels suivants :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_{t-1}) &= \theta_{t-1} & \mathbb{E}(X_t) &= 0 \\ \text{Var}(X_t | \mathcal{F}_{t-1}) &= \sigma_\epsilon^2 & \text{Var}(X_t) &= (1 + \theta^2)\sigma_\epsilon^2\end{aligned}$$

Exercice 3 :

Considérons le processus ARMA(1,1)

$$X_t = \phi X_{t-1} + \epsilon_t + \theta \epsilon_{t-1}$$

avec $\epsilon_t \sim \text{i.i.d.}(0, \sigma_\epsilon^2)$. Montrer les moments et moments conditionnels suivants :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_{t-1}) &= \phi X_{t-1} + \theta \epsilon_{t-1} & \mathbb{E}(X_t) &= 0 \\ \text{Var}(X_t | \mathcal{F}_{t-1}) &= \sigma_\epsilon^2 & \text{Var}(X_t) &= \frac{1+\theta^2-2\phi\theta}{1-\phi^2}\sigma_\epsilon^2\end{aligned}$$

Exercice 4 :

Montrer que la variance conditionnelle d'un processus ARMA(p, q) est la variance du processus des innovations σ_ϵ^2 .

On peut tirer quelques conclusions importantes des exercices précédents : 1. L'espérance conditionnelle d'un processus stationnaire peut dépendre du temps (qu'en est-il de son espérance inconditionnelle ?). 2. La variance conditionnelle d'un processus ARMA est toujours indépendante du temps. 3. Une différence fondamentale entre les processus ARMA et ARCH est donc que la variance conditionnelle des premiers ne varie pas dans le temps, alors que les seconds permettent une modélisation de la variance conditionnelle qui peut changer au cours du temps.

Processus ARCH et GARCH

Exercice 5 :

On considère un processus ARCH(p).

1. Montrer que $\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_{t-1}) = 0$ et en déduire que $\mathbb{E}(X_t) = 0$.
2. Montrer que $\text{Var}(X_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p X_{t-p}^2$ et en déduire que

$$\text{Var}(X_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i} \quad \text{si} \quad \sum_{i=1}^p \alpha_i < 1.$$

3. Montrer que $\text{Cov}(X_t, X_{t+h} | \mathcal{F}_{t-1}) = 0$ et en déduire que $\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = 0$

Exercice 6 :

On considère un processus GARCH(p, q).

1. Montrer que $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_{t-1}) = 0$ et en déduire que $\mathbb{E}(X_t) = 0$.
2. Montrer que $\text{Cov}(X_t, X_{t+h}|\mathcal{F}_{t-1}) = 0$ et en déduire que $\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = 0$

Exercice 7 :

Si X_t est un processus GARCH(1, 1), montrer que

$$\text{Var}(X_t|\mathcal{F}_{t-1}) = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

et en déduire que

$$\text{Var}(X_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \beta_1} \quad \text{si } \alpha_1 + \beta_1 < 1.$$

M1 ISMAG

MI0B246X - Séries chronologiques

TP 1 - Premières manipulations des processus AR/MA/ARMA

1 Simulation de processus

1.1 Simulation d'un processus MA

Pour simuler simplement T réalisations d'un processus moyenne mobile d'ordre q ayant les paramètres $\theta_1, \dots, \theta_q$ et dont la variance des innovations est σ^2 , on peut utiliser l'algorithme suivant :

1. Générer des innovations i.i.d. $(\eta_t)_{t=1, \dots, T}$.
2. Calculer récursivement les valeurs

$$X_t = \eta_t - \sum_{k=1}^q \theta_k \eta_{t-k}. \quad (5)$$

Par exemple, supposons que l'on veuille générer $T = 1000$ réalisations du processus MA(1) suivant

$$X_t = \eta_t - \frac{1}{3} \eta_{t-1}, \quad (\eta_t) \text{ i.i.d. } \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Il faut tout d'abord introduire quatre éléments :

- `theta`, un vecteur de longueur 1 comportant les paramètres θ_1 ;
- `innov`, le vecteur des innovations de longueur $T + 1$;

puis définir X_t selon la récurrence (5).

Écrire les lignes de commande correspondant à cet algorithme.

Attention : la définition des MA sous R n'est pas tout à fait celle du cours ; on ne met pas les signes - devant les theta.

1.2 Simulation d'un processus AR

Pour simuler simplement T réalisations d'un processus autorégressif d'ordre p ayant les paramètres ϕ_1, \dots, ϕ_p et dont la variance des innovations est σ^2 , on peut utiliser l'algorithme suivant :

1. Fixer p valeurs initiales réelles arbitraires X_0, \dots, X_{p-1} .
2. Générer des innovations i.i.d. $(\eta_t)_{t=1, \dots, T+T_0}$.
3. Calculer récursivement les valeurs

$$X_t = \sum_{k=1}^p \phi_k X_{t-k} + \eta_t. \quad (6)$$

4. Éliminer les T_0 premières valeurs ainsi générées.

En pratique, les ordres de grandeur sont de $T = 1000$ et $T_0 = 200, 300$ ou 500 (selon la distance, dans le plan complexe, entre les racines du polynôme associé aux coefficients et le cercle unité).

Par exemple, supposons que l'on veuille générer $T = 1000$ réalisations du processus AR(2) suivant

$$X_t - \frac{4}{15}X_{t-1} + \frac{1}{15}X_{t-2} = \eta_t, \quad (\eta_t) i.i.d. \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Il faut tout d'abord introduire quatre éléments :

- `phi`, un vecteur de longueur p comportant les paramètres ϕ_1, \dots, ϕ_p ;
- `init`, un vecteur contenant p valeurs arbitraires pour commencer l'algorithme;
- `innov`, le vecteur des innovations de longueur $T + T_0$;
- `t`, qui est le nombre T_0 de valeurs à rejeter à la fin de la procédure.

puis définir X_t selon la récurrence (6).

On écrira donc les lignes de commande suivantes :

```
T=1000
T0=500
phi=c(4/15,-1/15)
p = length(phi)
init=rep(1,2)
innov=rnorm(T+T0)
n = length(innov)
x = init

for (i in (p+1) :n)
{
aux = innov[i] + sum(phi*x[(i-1) :(i-p)])
x = c(x,aux)
}
x = x[(T0+1) :n]
```

1.3 Simulation d'un processus ARMA

Plus généralement, nous allons nous intéresser aux processus ARMA : ce sont des processus ayant une partie AR et une partie MA i.e. de la forme

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} \dots - \phi_p X_{t-p} = \eta_t - \theta_1 X_{t-1} - \theta_2 X_{t-2} \dots - \theta_q X_{t-q}, \quad (\eta_t) i.i.d. \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

R possède une fonction pour simuler directement des processus ARMA (ou ARIMA) : `arma.sim`. Nous allons à présent étudier les paramètres principaux pour utiliser cette fonction. Pour simuler un processus ARMA, on a besoin d'au moins trois éléments : un modèle, un nombre de réalisations et un processus d'innovations.

Par exemple, supposons que l'on veuille simuler le processus ARMA(2, 1) stationnaire et causal

$$X_t - X_{t-1} + \frac{1}{4}X_{t-2} = \eta_t - \eta_{t-1}, \quad (\eta_t) i.i.d. \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

La spécification d'un tel modèle se fait à partir d'une liste composée de deux vecteurs :

- le vecteur des coefficients autorégressifs;

- le vecteur des coefficients du processus à moyenne mobile.

La simulation du processus en R se base sur la syntaxe suivante :

```
arima.sim(model = monmodele,n,rand.gen, innov = rand.gen(n, ...), n.start,...)
```

avec

<code>model</code>	liste des paramètres de la partie AR et de la partie MA. Une liste vide correspond au modèle ARIMA(0,0,0) qui est un bruit blanc.
<code>n</code>	nombre de réalisations désirées ($n = 100$ par défaut)
<code>rand.gen</code>	paramètre optionnel qui permet de spécifier quel est le processus des innovations
<code>innov</code>	paramètre optionnel des innovations
<code>n.start</code>	nombre d'observations initiales à supprimer
...	

Remarque : *On retrouve en fait dans cette fonction la syntaxe et les paramètres utilisés pour la fonction construite au paragraphe précédent pour générer des processus autorégressifs. Il y a encore d'autres paramètres facultatifs à insérer dans l'argument de la fonction `arima.sim`. Nous ne les étudierons pas ici en détail, mais on peut les consulter en lisant la rubrique d'aide sur cette fonction.*

Pour l'exemple, on tapera

```
monmodele = list(ar=c(1,-.25),ma=-1)
monprocessus=arima.sim(model=monmodele,n=100,rand.gen=rnorm)  pour le générer
plot.ts(monprocessus)                                         pour le représenter
```

Exercice 1 : A l'aide de la fonction R `arima.sim`, simuler

1. les processus MA(1) et AR(2) des paragraphes précédents
2. un processus AR(2)
3. un processus MA(3)
4. un processus ARMA(2,2)

On choisira dans chaque cas les paramètres.

2 Représentations graphiques

Avant d'appliquer les méthodes d'estimation et de sélection de modèle dans le but de faire de la prédiction, il convient de représenter la série chronologique observée et de faire une première analyse de ses éventuelles tendances, saisonnalités et autres particularités. Représentons la série simulée précédemment :

```
plot.ts(X)
```

Exercice 2 : Représenter les séries de la section précédente.

La tendance ou la saisonnalité d'une série sont en général détectées à partir du graphe de

la série. Elles influencent cependant le comportement de la fonction d'autocorrélation : une tendance entraîne une persistance dans la fonction d'autocorrélation, et une autocorrélation pratiquement périodique est un indice pour une composante saisonnière. La détection d'une tendance ou d'une saisonnalité peut donc parfois être justifiée par le comportement de son autocorrélation.

Pour calculer et représenter la fonction d'autocorrélation empirique d'une série observée, il faut utiliser en R la fonction `acf()` où la série chronologique est placée en argument. Par défaut, le logiciel fournit la fonction d'autocorrélation pour une longueur proportionnelle au logarithme de la série et représente graphiquement la fonction. On peut changer ces paramètres en utilisant la syntaxe suivante :

```
acf(serie, lag.max=n, plot=F)
```

où `serie` est la série observée, `n` est le nombre de valeurs désirées pour la fonction d'autocorrélation, et `plot=F` signifie que l'on ne désire pas de représentation graphique (par défaut, `plot=T`). Par défaut, la représentation graphique montre également l'intervalle de confiance au niveau 95%

$$\left[-1.96/\sqrt{T}; 1.96/\sqrt{T} \right]$$

pour un bruit blanc. Lorsque T est assez grand, les autocorrélations d'un bruit blanc sont approximativement indépendantes et de loi $\mathcal{N}(0, \frac{1}{T})$. Ainsi 95% des autocorrélaations devraient se trouver dans l'intervalle précédent.

En précisant à la fonction `acf()` un argument `type`, on peut obtenir les autocorrélations partielles :

```
acf(serie, type = "partial")
```

tandis qu'en écrivant `type="covariance"` à la place de cet argument, on obtient la fonction d'autocovariance :

```
acf(serie, type = "partial")
```

On peut aussi utiliser la commande `pacf` pour obtenir le corrélogramme partiel.

Remarque : Les paramètres graphiques et le niveau de l'intervalle de confiance peuvent être modifiés en utilisant la fonction `plot()` qui doit contenir une fonction d'autocorrélation en argument¹ : `plot(acf(serie))`

Cette fonction peut contenir tous les paramètres graphiques en argument ainsi que les deux arguments suivants :

```
conf.int=T ou F
```

selon que l'on veuille ou non que l'intervalle de confiance soit représenté (la valeur par défaut est `True`), et

```
ci = 0.9
```

1. Dans cette commande, on spécifie que `plot = F` car, sinon, R représente deux fois la fonction d'autocorrélation : la première fois à cause de l'appel `acf(serie)`, et la seconde par la commande `acf.plot()`

où 0.9 ou toute autre valeur précise le niveau de l'intervalle de confiance (cet argument suppose bien entendu que `conf.int=T`).

Exercice 3 : Vérifier qu'une tendance entraîne une persistance dans la fonction d'auto-corrélation alors que la périodicité entraîne plutôt une forme sinusoidale.

Exercice 4 : A titre d'exemple, nous allons étudier le processus AR(2) suivant :

$$X_t - 0.9X_{t-1} + 0.8X_{t-2} = \eta_t.$$

Commençons par le simuler en appliquant la fonction `arima.sim` :

```
X=arima.sim(100,model=list(ar=c(0.9,-0.8)))
```

Ensuite, on tape les lignes de commande suivantes :

<code>plot.ts(X)</code>	Représentation graphique de la série
<code>mean(X)</code>	Calcul de la moyenne empirique
<code>acf(X)</code>	Représentation du corrélogramme
<code>acf(X,type="covariance")</code>	Représentation du variogramme
<code>pacf(X)</code>	Représentation du corrélogramme partiel

1. Le processus est-il centré ?
2. Que peut-on dire de la tendance et de la saisonnalité de la série ?
3. Quel est le lien entre le corrélogramme et le variogramme ?
4. Commenter les corrélogrammes de la série $(X_t)_t$.

Pour expliquer les différents graphiques, on calcule le discriminant du polynôme Φ qui est négatif et vaut -2.39 . Les racines sont donc complexes. Ceci explique la forme "sinusoïdale" du corrélogramme.

D'autre part, les corrélations d'ordre 1,3 et 6 apparaissent assez élevées en module. Cette propriété devrait réapparaître sur les trajectoires : une forte valeur à une certaine date devrait en général impliquer une faible valeur trois dates après et une forte valeur six dates après (le caractère faible ou fort dépend bien évidemment du signe de ρ).

5. Retrouve-t-on ce phénomène sur le graphe de la trajectoire ?

La présence du bruit de variance σ^2 explique évidemment que la fonction ne soit pas strictement périodique.

Exercice 5 : Simuler le processus ARMA(1,1) suivant :

$$X_t - 0.5X_{t-1} = \eta_t - 0.6\eta_{t-2}$$

Répondre aux questions de l'exercice précédent.

3 Choix de l'ordre et estimation des coefficients ARMA

Étudions dans cette section le processus ARMA(2, 1) défini par

$$X_t - X_{t-1} + \frac{1}{4}X_{t-2} = \eta_t - \eta_{t-1}, \quad (\eta_t) i.i.d. \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

On tapera donc les commandes :

```
monmodele = list(ar=c(1,-.25),ma=-1)
X=arima.sim(model=monmodele,n=100,rand.gen=rnorm)  pour le générer
plot.ts(X)                                         pour le représenter
```

On va faire comme si on ne connaissait pas les coefficients et la variance mais seulement l'ordre et on va procéder à l'estimation des paramètres. On peut ajuster un modèle ARIMA(p, d, q) à l'aide de la commande `arima`. Pour cela, on peut spécifier les ordres (voir le cours pour la détermination et l'estimation de ces ordres) ou laisser R libre de décider.

Dans le cadre de l'exemple, comme on souhaite ajuster un modèle ARMA(2,1) (ce qui revient à une ARIMA(2,0,1)), il suffit de lancer les commandes :

```
X.ord=c(2,0,1)          Spécifier le modèle
X.arima=arima(X,order=X.ord)  Estimer les paramètres du modèle
```

Recommencer avec une simulation plus grande ($n = 1000$ par exemple) et vérifier que les paramètres sont mieux estimés.

Remarque : Pour ajuster un modèle possédant une composante à moyenne mobile, les estimateurs de Yule-Walker ne conviennent plus et il faut utiliser les estimateurs de moindre carrés ou de maximum de vraisemblance. Ces derniers estimateurs sont calculés en R par la même fonction `arima`. Pour sélectionner un modèle ARMA suivant la technique vue en cours, dans le cadre de la procédure de Box-Jenkins, il faut tout d'abord fixer des valeurs p_{\max} et q_{\max} maximales pour l'ordre du modèle à ajuster. Ces valeurs peuvent par exemple être choisies par l'observation des fonctions empiriques d'autocorrélation et d'autocorrélation partielle. A chaque valeur $1 \leq p \leq p_{\max}$, $1 \leq q \leq q_{\max}$, on peut utiliser la fonction `arima` pour calculer les estimateurs de maximum de vraisemblance des coefficients et la fonction AIC du modèle correspondant.

Voici une brève description des options de la commande `arima` :

x	la série à ajuster
order	pour indiquer l'ordre du processus ARIMA
seasonal	pour spécifier la partie saisonnière du modèle
include.mean	pour indiquer la présence d'une constante (T) ou pas (F) dans le modèle
method	méthode d'estimation : CSS-ML, ML, CSS

La méthode ML est celle du maximum de vraisemblance et la méthode CSS est celle qui minimise la sommes des carrés résiduels. Par défaut, la méthode CSS-ML est employée

et conjugue ces deux méthodes : d'abord, elle minimise la somme des carrés résiduels, puis elle applique la méthode du maximum de vraisemblance. L'objet renvoyé par cette fonction possède, entre autres, les composantes suivantes :

<code>coeff</code>	estimateurs des coefficients des parties AR et MA, ainsi que de la constante
<code>sigma2</code>	estimation de la variance du bruit d'innovation
<code>var.coef</code>	matrice asymptotique de variance covariance pour les estimateurs de maximum de vraisemblance
<code>loglik</code>	log-vraisemblance à l'optimum
<code>aic</code>	valeur du critère AIC pour le modèle <code>model</code> (si la méthode du maximum de vraisemblance est appliquée)
<code>residuals</code>	estimation des innovations

4 Cas particulier : choix de l'ordre et estimation des coefficients AR

On peut ajuster de manière automatique un modèle autorégressif via la commande `ar`

```
serie.ar= ar(dserie)
```

qui a pour argument la série observée et renvoie un objet de type `liste` contenant :

<code>order</code>	ordre \hat{p} du modèle ajusté et correspond à la minimisation de l'AIC
<code>ar</code>	estimation des coefficients du modèle autorégressif
<code>x.mean</code>	estimation de la moyenne de la série
<code>var.pred</code>	estimation de la variance des innovations
<code>aic</code>	<code>aic=T</code> signifie que l'on choisit le meilleur modèle selon le critère AIC tandis que <code>aic=F</code> signifie que l'on n'utilise pas le critère AIC. Il faut donc dans ce cas-là donner un ordre pour le modèle spécifié par la commande <code>ordre.max</code> .
<code>n.used</code>	nombre d'observations
<code>order.max</code>	ordre maximal considéré par la fonction AIC. Sa valeur par défaut est $\min(n.used - 1, 10 \log_{10}(n.used))$, mais peut être spécifiée en introduisant un argument supplémentaire dans l'appel de la fonction, suivant la syntaxe : <code>ar(serie, order.max=N)</code> où N indique la longueur du vecteur <code>aic</code> à considérer
<code>partialacf</code>	vecteur de longueur <code>order.max</code> possédant les valeurs de la suite de la fonction d'autocorrélation partielle empirique
<code>resid</code>	objet de type <code>time series</code> contenant les résidus et du modèle ajusté aux données
<code>method</code>	chaîne de caractères (<code>string</code>) <code>yule-walker</code>
<code>series</code>	nom de la série introduite en argument de la fonction

On peut également choisir d'utiliser la fonction d'ajustement `ar` en imposant l'ordre du modèle à ajuster, sans passer par le critère de minimisation de l'AIC. En demandant

```
ar(dserie, aic=F, order.max=N)
```

R ajustera un modèle $AR(N)$ à `dserie`.

Les coefficients sont estimés à l'aide des équations de Yule-Walker. Le modèle retenu est celui qui maximise le critère AIC (sauf si on ajoute l'option `aic=F` auquel cas la fonction ajuste un modèle autorégressif à l'ordre `ordre.max`). Cette fonction est en fait la même que la fonction `ar.yw`. Il existe trois autres fonctions qui utilisent une autre méthode pour estimer les paramètres du modèle : la fonction `ar.mle` qui repose sur les estimateurs du maximum de vraisemblance, `ar.burg` qui utilise l'algorithme de Durbin-Levinson et `ar.ols` qui résoud un problème de moindres carrés.

5 Choix de modèle et validation

Comme nous le verrons en cours, dans le cadre de la procédure de Box-Jenkins, il s'agit de comparer les différents ARMA envisagés (modèles différents (AR,MA, ARMA) et ordres différents) puis de sélectionner un modèle ARMA parmi plusieurs en se basant sur le critère AIC donnée en sortie de la fonction. Pour cela, on appliquera donc plusieurs fois la commande `arima` avec des ordres différents.

Avant de conclure sur le choix d'un modèle, il est nécessaire d'effectuer des tests sur les résidus. Pour cela, on peut utiliser la commande `tsdiag` qui renvoie un graphique contenant de haut en bas : les résidus normalisés, la fonction d'autocorrélation des résidus et les p -valeurs de la statistique de Ljung-Box en fonction des décalages. Le test de Box-Ljung ainsi que celui de Box-Pierce (qui testent la non-corrélation) peuvent être aussi effectués en utilisant la commande `Box.test` qui prend en entrée la série de données initiales :

```
tsdiag(X.arima)
Box.test(X.arima$residuals,lag=1,type=c("Box-Pierce"))
Box.test(X.arima$residuals,lag=1,type=c("Ljung-Box"))
```

Avec la fonction `Box.test`, il faut préciser l'ordre du décalage et le type de test choisi. L'objet renvoyé par cette fonction possède, entre autres, les composantes suivantes :

<code>statistic</code>	valeur de la statistique de test
<code>parameter</code>	nombre de degrés de liberté de la loi du χ^2 (loi asymptotique)
<code>p.value</code>	p -valeur associée à la statistique de test.

- Commenter les résultats obtenus à l'aide de la fonction `tsdiag`.

6 Prédiction des processus ARMA

Une fois un modèle retenu, il est possible de faire des prévisions à horizons donnés en appliquant la fonction `predict`. Une fois un modèle retenu, il est possible d'appliquer la fonction `predict` pour effectuer une prévision à horizon donné. On peut aussi appliquer la théorie de la prédiction linéaire pour trouver un intervalle de confiance pour les valeurs futures de la série. La fonction à utiliser à cet effet est

```
predict(model, n)
```

où les arguments placés entre parenthèses sont obligatoires.

<code>serie</code>	série stationnaire observée
<code>model</code>	liste contenant les coefficients estimés
<code>n</code>	nombre de prédictions à estimer

Le résultat de cette fonction est une liste comportant deux éléments :

<code>mean</code>	valeur moyenne estimée de chaque prévision
<code>std.err.</code>	estimateur de $\sigma_\eta(\cdot)$ qui intervient dans le calcul de l'intervalle de prévision $\left[\hat{X}_T(h) \pm z_{1-\alpha/2} \hat{\sigma}_\eta(h) \right], 1 \leq h \leq n$ qui, rappelons-le, ne tient pas compte de l'erreur d'estimation des paramètres du modèle ajusté

Pour avoir une prédiction à l'horizon 10, il suffit de taper la commande :

```
X.pred=predict(X.arima,10)
```

tandis que pour avoir les 10 prochaines prédictions, il faudra taper

```
X.pred=predict(X.arima,n.ahead=10)
```

Exercice 6

Soit le processus

$$X_t - X_{t-1} + \frac{1}{2}X_{t-2} - \frac{1}{3}X_{t-3} = \eta_t$$

avec η_t un bruit blanc gaussien centré réduit.

1. Après avoir identifié ce processus, simuler 50 réalisations de longueur 105.
2. Pour chaque simulation, extraire les 100 premières valeurs et estimer les paramètres d'un AR(3).
3. Pour chaque simulation, prédire les cinq valeurs suivantes.
4. Donner une estimation de l'erreur moyenne (biais) et de la variance de l'erreur de prévision à 1, 2, 3, 4 et 5 pas.
5. Recommencer en rallongeant la durée d'observation, et comparer aux résultats précédents.

M1 ISMAG

MI0B246X - Séries chronologiques

TP 2 - Manipulation complète d'une série chronologique

Nous avons vu dans le dernier TP comment simuler des processus ARMA puis les différentes étapes du traitement d'une série temporelle :

- la représentation graphique ;
- la détermination des fonctions d'autocorrélation et d'autocorrélation empiriques ;
- le choix de l'ordre et l'estimation des paramètres ;
- la validation du modèle ;
- la prédiction.

Nous allons mettre en pratique cette procédure dans ce TP en étudiant le jeu de données `airlinedata` (à télécharger depuis la page web des travaux pratiques) étudiée par Box and Jenkins (1976) et représentant le nombre de voyageurs en avion sur une période de 144 mois.

7 Analyse préliminaire

Graphe et première transformation

Avant de modéliser des données à l'aide d'un processus ARMA, il convient de représenter la série chronologique observée et de faire une première analyse de ses éventuelles tendances, saisonnalités ou autres particularités.

```
serie= scan("airlinedata.dat")
plot.ts(serie)
```

Son graphe indique une forte dépendance entre la variabilité de la série et son niveau : lorsque le temps augmente, les valeurs prises par la série sont de plus en plus étendues. Pour éliminer cette variabilité, on applique une transformation aux données observées. Ici le logarithme népérien :

```
lserie=log(serie)
plot.ts(lserie)
```

Sur le graphe du logarithme népérien de la série observée, on peut constater que cette transformation a stabilisé la variance des observations.

Analyse des autocorrélations

Il est assez simple de déceler une tendance ou bien une saisonnalité dans les données. Pour commencer, on s'intéresse à la structure de corrélation. On commence par représenter les nuages de points des observations (x_t) et (x_{t+h}) avec h entier, à l'aide de la commande `lag.plot` :

```
lag.plot(serie,lags=9,do.lines=F)
```

Par défaut, les nuages de point sont représentés pour h allant de 1 à `lags`. Il est possible de sélectionner certains nuages de points à l'aide de l'option `set.lags`. Par exemple, si on ne souhaite représenter que les nuages de points pour $h = 1$ et $h = 9$, il suffit d'appliquer

la commande :

```
lag.plot(serie,set.lags=c(1,9),do.lines=F)
```

On peut aussi représenter la fonction d'autocorrélation empirique et la fonction d'autocorrélation partielle empirique comme nous l'avons vu dans le TP précédent :

```
par(mfrow=c(2,1))
acf(serie,lag.max=50,plot=T,main="Fonction d'autocorrélation",
+xlab="Décalage")
pacf(serie,lag.max=50,plot=T,main="Fonction d'autocorrélation partielle",
+xlab="Décalage")
```

Rappelons qu'une tendance entraîne une persistance dans la fonction d'autocorrélation et une autocorrélation pratiquement périodique est un indice pour une composante saisonnière. Dans cet exemple, on observe une fonction d'autocorrélation empirique typique d'une série présentant une tendance et une composante saisonnière.

Tracez les mêmes graphiques avec la série transformée. Que constatez-vous ?

Suppression de la tendance et de la saisonnalité

Si la série semble ne pas présenter les signes de la stationnarité, on peut alors essayer de la transformer. Nous avons vu dans le cours que la tendance et la saisonnalité pouvaient être éliminées en appliquant les opérateurs de différence ∇ et ∇_d à la série observée. En écrivant

```
mserie=diff(lserie)
plot.ts(mserie)
```

on applique l'opérateur de différence ∇ à `serie` et on élimine ainsi la tendance. L'objet retourné est de type `ts` et possède une observation de moins que `serie`. A vérifier.

Remarque : Pour supprimer la tendance, on pourrait également l'estimer et l'enlever directement des observations. Pour ce faire, on peut calculer la moyenne empirique

```
mean()
```

ou bien un estimateur de moindres carrés généralisé ou encore utiliser l'estimateur non paramétrique à moyenne mobile.

Tracer la fonction d'autocorrélation pour vérifier que la persistance a bien disparu. A partir de ce graphique, déterminer la période de la composante saisonnière. Pour enlever une saisonnalité d'ordre d , l'ordre de la différence doit être spécifié en indice par l'argument `lag`. La fonction `diff` calcule la série $x_{t+d} - x_t$ où d est donné par `lag`. Par exemple,

```
dserie=diff(mserie,lag=12)
plot.ts(dserie)
```

retourne la série $\nabla_d(mserie)$ et possède d observations en moins que `mserie`. En pratique, on pourra utiliser ces deux opérateurs pour enlever une tendance ou une saisonnalité en "devinant" la valeur de d . La fréquence de la série analysée est une indication pour

trouver la valeur de d , ainsi que le comportement de la fonction d'autocorrélation.

Tracer la fonction d'autocorrélation pour vérifier que la périodicité a bien disparu.

8 Estimation des paramètres de l'ARMA

Estimez maintenant les paramètres de l'ARMA de l'ordre que vous avez choisi.

9 Test sur les résidus

Validez maintenant le modèle.

10 Prévision

Proposez maintenant les 10 prochaines prédictions.

11 Validation avec R

Quel est le modèle proposé par R lorsqu'on ne lui spécifie pas les ordres ?
Correspond-il à celui que vous avez proposé ?

12 Deux applications

Récupérer le fichier de données `serie1.dat`.

1. Ce processus vous semble-t-il modélisable par un processus ARMA ? Pourquoi ?
2. On travaille désormais avec la série obtenue en appliquant la fonction `diff` à la série. Quelle transformation a-t-on effectuée ? Pourquoi ?
3. En observant les autocorrélations empiriques et autocorrélations partielles empiriques, proposer des modèles $AR(p)$ et $MA(q)$ d'ordre faible pour modéliser cette série.
4. Estimer les paramètres des deux modèles sélectionnés.
5. Tester la blancheur des résidus.
6. Conclure pour choisir un modèle.
7. S'inspirer de la démarche précédente pour modéliser la série `serie2.dat`.

M1 ISMAG

MI0B246X - Séries chronologiques

TP 3 - Evolution du PNB américain

On s'intéresse dans ce TP à la série du PNB américain (son logarithme plus précisément noté (X_t) dans la suite) sur la période 1954-1987 en dollars.

Commencer par charger le package "tseries" puis

```
library(tseries)
data(USEconomic)
PNB = USEconomic[, 2]
annee = seq(1954, 1987.75, 0.25)
plot(annee, PNB, main = "log(PNB) au cours du temps", t = "l",
+ col = "blue", xlab = "temps", ylab = "log PNB")
```

On constate clairement une tendance; la série $\log(PNB)$ n'est pas stationnaire.

13 Stationnarité de la série $\log(PNB)$

Traçons le corrélogramme et le corrélogramme partiel.

```
par(mfrow = c(1, 2))
acf(PNB)
pacf(PNB)
```

L'analyse de la fonction d'autocorrélation confirme la non stationnarité de la série $\log(PNB)$: en effet, on constate une persistance et la fonction d'autocorrélation empirique $\rho(h)$ n'est pas nulle pour tous les termes $h \geq 0$. Le test du portmanteau (testant la non-corrélation de l'échantillon) rejette aussi la stationnarité de la série :

```
Box.test(PNB)
```

14 Etude de la série $\text{diff}(\log(PNB))$

Différenciation, stationnarité et choix de modèle

Nous allons maintenant travailler sur la série $(Y_t = X_t - X_{t-1})_{2 \leq t \leq T}$. Sur le tracé de Y_t , on constate que la série ne semble plus avoir de tendance (comportement très erratique).

```
diffPNB = diff(PNB)
T = length(annee)
par(mfrow = c(1, 1))
plot(annee[2 :T], diffPNB, main = "diffPNB", t = "l",
col = "blue", xlab = "temps", ylab = "diff PNB")
```

On peut aussi tracer les fonctions d'autocorrélation empiriques.

```
par(mfrow = c(1, 2))
acf(diffPNB, lag.max = 30)
pacf(diffPNB, lag.max = 30)
```

Comme les fonctions d'autocorrélations (normale et partielle) décroissent très vite, on

peut considérer que la série Y_t des différences est stationnaire. De plus, la série Y_t n'est pas centrée malgré une faible moyenne empirique de 0.007596586. On peut le voir aussi en testant l'hypothèse " $\bar{Y}_T = 0$ " avec le test de Student : on rejette l'hypothèse nulle :

```
mean(diffPNB)
t.test(diffPNB)
```

Ainsi, nous avons besoin d'un terme constant dans la modélisation de Y . Nous pourrions aussi appliquer une nouvelle fois l'opérateur Δ afin de supprimer ce terme de moyenne et rendre la série centrée.

Étant donné que Y_t est stationnaire, cela signifie que la série X_t des log du PNB est du type marche aléatoire puisque $Y_t = X_t - X_{t-1}$ est stationnaire. Au vu des autocorrélogrammes, un modèle ARMA(0,2) semble être le plus adapté. On peut aussi choisir les modèles ARMA(1,2) ou ARMA(8,2) ou encore ARMA(0,1). En effet, la fonction d'autocorrélation $\rho(h)$ est en dehors de l'intervalle de confiance pour $h = 1$ et $h = 2$ et la fonction d'autocorrélation partielle $\tau(h)$ est en dehors de l'intervalle de confiance pour $h = 1$ et quasiment en dehors de l'intervalle pour $h = 8$.

Estimation des modèles

L'estimation par maximum de vraisemblance se fait avec la fonction `arima` de R.

```
arima(diffPNB, c(0, 0, 2))
```

Estimons aussi les paramètres des trois autres modèles retenus :

```
arima(diffPNB, c(1, 0, 2))
arima(diffPNB, c(8, 0, 2))
arima(diffPNB, c(0, 0, 1))
```

Stationnarité des résidus

Pour comparer les modèles entre eux, on cherche à minimiser le critère AIC (Aikake's Information Criterion). Le modèle dont le critère AIC est le plus bas (-863.73) est le modèle ARMA(0,2). Il semble donc être le mieux adapté aux données. Cependant, on peut aussi comparer ces 4 modèles en testant la stationnarité de leurs résidus.

```
residus02 = arima(diffPNB, c(0, 0, 2))$residual
Box.test(residus02)
residus12 = arima(diffPNB, c(1, 0, 2))$residual
Box.test(residus12)
residus82 = arima(diffPNB, c(8, 0, 2))$residual
Box.test(residus82)
residus01 = arima(diffPNB, c(0, 0, 1))$residual
Box.test(residus01)
```

On constate que le modèle ARMA(1,2) semble meilleur, puisque la p-valeur du test de Box Pierce est plus élevée. Ainsi, on ne peut pas rejeter le fait que les résidus sont non corrélés. Le tracé des autocorrélogrammes confirme que les modèles ARMA(1,2), ARMA(8,2) et ARMA(0,2) collent bien aux données.

```

par(mfrow = c(4, 2))
acf(residus02, main = "modèle ARMA(0,2)")
pacf(residus02, main = "modèle ARMA(0,2)")
acf(residus12, main = "modèle ARMA(1,2)")
pacf(residus12, main = "modèle ARMA(1,2)")
acf(residus82, main = "modèle ARMA(8,2)")
pacf(residus82, main = "modèle ARMA(8,2)")
acf(residus01, main = "modèle ARMA(0,1)")
pacf(residus01, main = "modèle ARMA(0,1)")

```

Normalité des résidus

On teste maintenant la normalité des résidus.

```

shapiro.test(residus02)
shapiro.test(residus12)
shapiro.test(residus82)
shapiro.test(residus01)

```

Seul le modèle ARMA(0,1) rejette la normalité des résidus à 95%.

Prévision

Nous allons maintenant tester les performances des 4 modèles. Pour ce faire, nous enlevons les 10 derniers points de notre série Y_t , pour ensuite comparer nos 10 valeurs prédites avec nos 10 valeurs réelles.

```

n = 10
index = 1 : (T - n - 1)
pred02 = predict(arima(diffPNB[index], c(0, 0, 2)), n)

```

```

par(mfrow = c(1, 3))
plot(annee[(T - 4 * n) : T], diffPNB[(T - 4 * n) : T - 1], main =
+ "prevision ARMA(0,2)", t = "l", col = "blue", xlab = "temps", ylab = "diff PNB")
lines(annee[(T - n) : T], c(diffPNB[T - n - 1], pred02$pred))
lines(annee[(T - n) : T], c(diffPNB[T - n - 1], pred02$pred) + c(0, pred02$se)
+ * 1.96, lty = 2)
lines(annee[(T - n) : T], c(diffPNB[T - n - 1], pred02$pred) - c(0, pred02$se)
+ * 1.96, lty = 2)

```

Faire la même chose pour les 3 autres modèles.

Au vu des graphes, on en déduit que les prédictions du modèle ARMA(0,1) sont plus mauvaises que celles des deux autres modèles. Les intervalles de confiance (à 95%) sur les valeurs prédites supposent que les résidus sont gaussiens (ce qui semblent être vrai pour le modèle ARMA(1,2), ARMA(8,2) et ARMA(0,2), puisque on ne peut pas rejeter l'hypothèse de normalité).

En conclusion de l'analyse de la série différenciée Y_t , on est amené à préférer le modèle ARMA(0,2), car il minimise le critère AIC sans perdre la stationnarité des résidus et qu'il nécessite moins de paramètres.

15 Modèle ARIMA pour la série $\log(PNB)$

Différenciation d'ordre 2 et choix de modèle

La série Y_t des différences de la série des log du PNB nous semblait centrée, mais si on trace l'histogramme, on constate qu'elle n'est pas du tout symétrique.

```
hist(diffPNB)
```

Ainsi, on va différencier une deuxième fois la série des log du PNB : on pose $Z_t = \Delta^2 X_t (= \Delta Y_t)$. On constate que la série est plus centrée et surtout plus symétrique.

```
d2PNB = diff(diffPNB)
par(mfrow = c(1, 2))
plot(annee[3 :T],d2PNB,main="Z au cours du temps",t="1",
+ col="blue",xlab="temps",ylab="Z")
par(mfrow = c(1, 2))
hist(d2PNB)
mean(d2PNB)
```

Le test de Student révèle qu'on ne peut pas rejeter l'hypothèse que $\bar{Z}_T = 0$.

```
t.test(d2PNB)
```

Nous pourrions étudier directement la série d2PNB comme expliqué précédemment mais il faudrait ensuite revenir à PNB pour déterminer ses prédictions. Nous choisissons donc ici de travailler directement sur PNB et de modéliser cette série par un ARIMA. Comme pour les modèles ARMA, nous allons maintenant trouver les coefficients p et q du modèle puis tester la stationnarité des résidus et la performance de nos prédictions.

```
par(mfrow = c(1, 2))
acf(d2PNB, lag.max = 30)
pacf(d2PNB, lag.max = 30)
```

Le tracé des autocorrélogrammes révèle que $q = 1$ et $p = 5$ ou 9 .

Estimation des modèles

Nous allons donc tester deux modèles ARIMA(5,2,1) et ARIMA(9,2,1) ou éventuellement si on veut être économes en paramètres ARIMA(1,2,1). On estime les coefficients :

```
arma(PNB, c(1, 2, 1), inc = FALSE)
arma(PNB, c(5, 2, 1), inc = FALSE)
arma(PNB, c(9, 2, 1), inc = FALSE)
```

Selon le critère AIC, le modèle ARIMA(1,2,1) semble mieux coller aux données puis le modèle ARIMA(5,2,1).

Stationnarité et normalité des résidus

Testons la stationnarité et la normalité des résidus.

```

residus121=arima(PNB, c(1, 2, 1), inc = FALSE)$residual
residus521=arima(PNB, c(5, 2, 1), inc = FALSE)$residual
residus921=arima(PNB, c(9, 2, 1), inc = FALSE)$residual
Box.test(residus121)
Box.test(residus521)
Box.test(residus921)
shapiro.test(residus121)
shapiro.test(residus521)
shapiro.test(residus921)

```

On en déduit qu'on ne peut pas rejeter la stationnarité et la normalité des résidus pour les trois modèles envisagés. Cependant, pour le modèle ARIMA(1,2,1) la p-valeur est quand même faible. On préférera donc les modèles ARIMA(5,2,1) et ARIMA(9,2,1) qui ont certes plus de paramètres mais de bons AIC et des résidus stationnaires (p-valeur très proches de 1). L'hypothèse de normalité n'est quand même pas très vraisemblable (p-valeurs de Shapiro faibles). On retiendra finalement le modèle ARIMA(5,2,1) qui a le plus petit AIC et le moins de paramètres.

```

par(mfrow = c(1, 2))
acf(residus121)
acf(residus521)
acf(residus921)
pacf(residus121)
pacf(residus521)
pacf(residus921)

```

Enfin le tracé des fonctions d'autocorrélogrammes ne montre pas de corrélation pour les résidus. Au final, le modèle ARIMA(5,2,1) semble meilleur que l'ARIMA(9,2,1) sur ces données.

Prévision

Enfin testons la performance des prédictions.

```

index = 1 :(T - n)
pred521 = predict(arima(PNB[index], c(5, 2, 1), inc = FALSE),n)
pred921 = predict(arima(PNB[index], c(9, 2, 1), inc = FALSE),n)

plot(annee[(T - 4 * n) :T], PNB[(T - 4 * n) :T], main = "prevision ARIMA(5,2,1)",
t = "l", col = "blue", xlab = "temps", ylab = "PNB")
lines(annee[(T - n) :T], c(PNB[T - n], pred521$pred))
lines(annee[(T - n) :T], c(PNB[T - n], pred521$pred) + c(0, pred521$se)
* 1.96, lty = 2)
lines(annee[(T - n) :T], c(PNB[T - n], pred521$pred) - c(0, pred521$se)
* 1.96, lty = 2)

```

Refaire la même chose pour l'autre modèle. Au vu des prévisions, on conclut que le modèle ARIMA(5,2,1) est mieux adapté aux données.

16 Conclusion

Les tableaux ci-dessous récapitulent l'ensemble des résultats des différents modèles du TP.

Critères-Modèles	ARMA(0,2)	ARMA(0,1)	ARMA(1,2)	ARMA(8,2)
AIC	-863,73	-860,05	-861,89	-855,32
Vraisemblance	435,86	433,03	439,62	439,66
p-valeur Box Pierce	0,9474	0,5948	1	0,9997
p-valeur Shapiro	0,323	0,2492	0,4097	0,1872

FIGURE 2 – Bilan : critère AIC, log vraisemblance et tests sur les résidus pour les ARMA

Critères-Modèles	ARIMA(1,2,1)	ARIMA(5,2,1)	ARIMA(9,2,1)
AIC	-851,52	-847,31	-843,02
Vraisemblance	428,76	430,66	432,51
p-valeur Box Pierce	0,6096	0,9401	0,9561
p-valeur Shapiro	0,1175	0,2780	0,2963

FIGURE 3 – Bilan : critère AIC, log vraisemblance et tests sur les résidus pour les ARIMA

En conclusion, le modèle ARMA(0,2) sur la série différenciée des PNB est meilleur compte tenu des critères choisis que le modèle ARIMA(5,2,1) sur la série PNB. Cependant, si on choisit de travailler sur la série différenciée des PNB et donc le modèle ARMA(0,2), le logiciel R nous fournira les prévisions pour la série différenciée; à nous ensuite de calculer les prédicteurs de la série de départ PNB à la main en écrivant que $diffPNB = (I - B)PNB$. Il vaut mieux donc travailler directement avec la modélisation ARIMA.

M1 ISMAG

MI0B246X - Séries chronologiques

TP 4 - Evolution du trafic SNCF

On s'intéresse dans ce TP à la série mensuelle du nombre de voyageurs kilomètres, correspondant au trafic deuxième classe du réseau principal SNCF pour la période 1963-1980 (source : Gouriéroux et Monfort, 1983).

```
Y = scan('trafic.dat')
Y = as.ts(Y)
Y = ts(Y, start=1963, frequency=12)
anneeY = seq(1963, 1980+11/12, by=1/12)
TY=length(anneeY)
```

On enlève à Y les 12 dernières valeurs (soit l'année 1980) afin de faire de l'estimation sur les années 1963 à 1979 puis comparer les prévisions issues du modèle estimé aux vraies valeurs.

```
n=12
index=1 : (TY-n)
annee=anneeY[index]
T=length(annee)
X=Y[index]
X = as.ts(X)
X = ts(X, start=1963, frequency=12)
anneeY = seq(1963, 1980+11/12, by=1/12)
plot(annee, X, main = "Evolution du trafic SNCF au cours du temps (1963-1980)",
+ t = "l", col = "blue", xlab = "temps", ylab = "nb voyageurs")
```

L'examen du graphe fait apparaître une tendance approximativement linéaire; il sera donc nécessaire de différencier la série brute. La série présente visiblement une périodicité de période 12 qui pourra être prise en compte par l'introduction de polynômes retards B^{12} . Finalement, on peut remarquer qu'il n'y a pas d'évolution significative de la variabilité et il n'y a pas lieu a priori d'effectuer une transformation de type Box-Cox ou d'utiliser un modèle ARCH ou GARCH.

17 Stationnarité de la série

Traçons le corrélogramme et le corrélogramme partiel de X .

```
par(mfrow = c(1, 2))
acf(X)
pacf(X)
```

La fonction d'autocorrélation estimée $\hat{\rho}(h)$ est strictement positive pour les premières valeurs de h (au moins pour $h \leq 12$). Il y a donc lieu de différencier la série au moins une fois. Le test du portmanteau (testant la non-corrélation de l'échantillon) rejette aussi la stationnarité de la série :

```
Box.test(X)
```

18 Etude des séries $\text{diff}(X)$ et $\text{diff12}(\text{diff}(X))$

Nous allons maintenant travailler sur la série $(D_t = X_t - X_{t-1})_{2 \leq t \leq T}$. Sur le tracé de D_t , on constate que la série ne semble plus avoir de tendance (comportement très erratique).

```
diffX = diff(X)
T = length(annee)
par(mfrow = c(1, 1))
plot(annee[2 :T], diffX, main = "diffX", t = "l",
col = "blue",xlab = "temps", ylab = "diff X")
```

On peut aussi tracer les fonctions d'autocorrélation empiriques. Le corrélogramme estimé de la série différenciée $(I - B)X$ montre de fortes corrélations pour les valeurs h multiples de 12. Ceci implique qu'il faut appliquer au moins une fois l'opérateur $(I - B^{12})$ à la série des différences.

```
par(mfrow = c(1, 2))
acf(diffX, lag.max = 30)
pacf(diffX, lag.max = 30)
diff12X = diff(diff(X),lag=12)
par(mfrow = c(1, 1))
plot(annee[14 :T], diff12X, main = "Série Z", t = "l",
col = "blue",xlab = "temps", ylab = "Z")
par(mfrow = c(1, 2))
acf(diff12X, lag.max = 30)
pacf(diff12X, lag.max = 30)
```

Le corrélogramme de la série $Z_t = (I - B)(I - B^{12})X_t$ ne présente plus systématiquement de fortes valeurs des autocorrélations pour les petites valeurs de h ou pour les valeurs de h multiples de 12. On peut donc considérer que la série Z a été générée par un processus stationnaire. Il existe cependant de fortes corrélations pour $h = 1$ et $h = 12$. Ceci suggère d'introduire dans le polynôme moyenne mobile un terme du type $(I - \theta_1 B)(I - \theta_2 B^{12})$. Le choix d'une représentation moyenne mobile est confirmé par ma forme de la fonction d'autocorrélation empirique estimée. On choisit donc de modéliser le processus par un $SARIMA(0, 1, 1) \times (0, 1, 1)_{12}$.

Remarque :

(1) Le choix d'une représentation de type autorégressif aurait été possible aussi mais moins judicieux car il nécessiterait d'introduire un plus grand nombre de paramètres (puisque en particulier les sept premières valeurs de l'autocorrélation partielle estimée sont différentes de 0).

(2) Une moyenne mobile du type :

$$(I - \theta_1 B)(I - \theta_2 B^{12})\epsilon_t = \epsilon_t - \theta_1 \epsilon_{t-11} - \theta_2 \epsilon_{t-12} + \theta_1 \theta_2 \epsilon_{t-13}$$

admet des corrélations ρ_k non nulles pour $h = 1, 11, 12, 13$. Ceci est en particulier compatible avec les valeurs prises par $\hat{\rho}(11)$ et $\hat{\rho}(13)$.

Finalement, la moyenne empirique de Z est égale à -0.16 et la variance empirique vaut 28527. La variance de la moyenne empirique dans le cas d'une moyenne mobile du type

$(I - \theta_1 B)(I - \theta_2 B^{12})\epsilon_t$ est asymptotiquement donnée par :

$$\frac{1}{T}\gamma(0) [1 + 2\rho(1) + 2\rho(11) + 2\rho(12) + 2\rho(13)]$$

où T désigne le nombre d'observations de $(I - \theta_1 B)(I - \theta_2 B^{12})\epsilon_t$. Cette variance est estimée par :

$$\frac{1}{204 - 13} 28257 [1 + 2(-0.4) + 2(0.18) + 2(-0.39) + 2(0.18)] = 21$$

La moyenne empirique est donc en module inférieur à deux fois son écart-type estimé et le processus peut être considéré comme centré. Ce qui est confirmé par le test de Student.

```
mean(diff12X)
t.test(diff12X)
```

19 Estimation du modèle

Le modèle retenu est un $SARIMA(0, 1, 1) \times (0, 1, 1)_{12}$:

$$(I - B)(I - B^{12})X_t = (I - \theta_1 B)(I - \theta_2 B^{12})\epsilon_t$$

avec $\mathbb{E}(\epsilon_t) = 0$ et $\text{Var}\epsilon_t = \sigma^2$. Il y a donc trois paramètres à estimer : θ_1 , θ_2 et σ^2 . L'estimation par maximum de vraisemblance se fait avec la fonction `arima` de R.

```
arima(X,order=c(0,1,1),seasonal=list(order=c(0,1,1),period=12))
```

On obtient ainsi les estimées des trois paramètres ainsi que les écart-type estimés.

	θ_1	θ_2
Estimation	0.87	0.54
Ecart-type	0.04	0.07

La variance du bruit blanc est estimée par 26247.

20 Etude des résidus

Tout d'abord, on examine la suite des résidus d'estimation pour voir si elle ne présente pas certaines tendances ou irrégularités qui feraient rejeter l'hypothèse de bruit blanc. La série semble compatible avec cette hypothèse.

```
residus=arima(X,order=c(0,1,1),seasonal=list(order=c(0,1,1),period=12))$residual
par(mfrow=c(1,1))
plot(residus,main="Résidus au cours du temps",t="l",
+ col="blue",xlab="temps",ylab="résidus")
```

Stationnarité des résidus

Pour tester la stationnarité des résidus, on fait le test de Portmanteau et on trace les autocorrélogrammes.

```

Box.test(residus)
par(mfrow=c(1,2))
acf(residus,main= "modele SARIMA(0,1,1)x(0,1,1)12")
pacf(residus,main= "modele SARIMA(0,1,1)x(0,1,1)12")

```

Normalité des résidus

Pour tester la normalité des résidus, on effectue le test de Shapiro-Wilks.

```
shapiro.test(residus)
```

21 Prévision

Nous allons maintenant tester les performances du modèle. Les valeurs prévues pour les 12 mois de l'année 1980 sont comparées aux valeurs réelles non prises en compte dans l'estimation.

```

pred = predict(arima(X,order=c(0,1,1),seasonal=list(order=c(0,1,1),period=12)),12)
par(mfrow = c(1, 1))
plot(anneeY[(TY - 4 * n) :TY], Y[(TY - 4 * n) :TY - 1], main =
+ "prevision ARMA(0,2)", t = "l", col = "blue", xlab = "temps", ylab = "X")
lines(anneeY[(TY - n) :TY], c(X[T - 1], pred$pred),col="red")
lines(anneeY[(TY - n) :TY], c(X[T - 1], pred$pred) + c(0,pred$se)
+ * 1.96, lty = 2,col="green")
lines(anneeY[(TY - n) :TY], c(X[T - 1], pred$pred) - c(0,pred$se)
+ * 1.96, lty = 2,col="green")

```

M1 ISMAG

MI0B246X - Séries chronologiques

TP5 - Processus ARIMA/SARIMA et ARCH/GARCH

22 Les processus ARIMA et SARIMA

Simulation des processus ARIMA et SARIMA

Nous avons vu dans les TP précédents que la fonction `arima.sim(n,modele)` permet de simuler un processus ARMA(p, q) défini par

$$X_t - \sum_{k=1}^p a_k X_{t-k} = \epsilon_t - \sum_{j=1}^q b_j \epsilon_{t-j}.$$

Les paramètres a_k et b_j du processus étant précisés dans le paramètre `modele` de la fonction :

```
modele=list(ar=c(a1, ... , ap),ma=c(b1, ... , bq))
```

Pour simuler un modèle ARIMA(p, d, q), il faut ajouter le paramètre `order=c(p,d,q)` dans le paramètre `modele` de la fonction `arima.sim` :

```
X=arima.sim(n,model=list(order = c(p,d,q),ar=c(a1, ... , ap),ma=c(b1, ... , bq)))
```

Pour simuler un modèle SARIMA(p, d, q) \times (P, Q, D) $_s$, il faut ajouter le paramètre `order=c(p,d,q)` et le paramètre `seasonal=list(order=c(P,D,Q),period=s)` dans le paramètre `modele` de la fonction `arima.sim` :

```
X=arima.sim(n,model=list(order = c(p,d,q),seasonal=list(order=c(P,D,Q),period=s),
+ar=c(a1, ... , ap),ma=c(b1, ... , bq)))
```

Remarque : On peut aussi utiliser la syntaxe suivante pour un modèle ARIMA(p, d, q)

```
arima.sim(serie, model = list( ar = a, ndiff = 1,ma = theta), n = 2)
```

et pour un modèle SARIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$, il faut utiliser une liste de deux éléments :

```
arima.sim(serie, model = list(list(ar = a, ndiff = d, ma = theta),
+ list(ar = A, ndiff = D, ma = Theta , period = s))
```

où `a`, `d`, `theta`, `A`, `D`, `Theta` et `s` sont les valeurs des coefficients du processus. Les fonctions précédentes peuvent alors être utilisée avec cet argument.

Estimation des processus ARIMA et SARIMA

Nous avons vu dans les TP précédents que la fonction `ar` permet d'estimer les paramètres d'un processus AR(p) :

```
X.ar=ar(X,aic=TRUE,order.max=NULL)
```

L'ordre p du processus autorégressif est choisi (inférieur à `order.max`) à l'aide du critère AIC (si l'option `aic` est validée).

Nous avons aussi vu que la fonction `arma` permet d'estimer un processus ARMA(p, q) :

```
X.arma=arma(X,order=c(p,0,q))
```

C'est aussi la fonction `arma` qui permet d'estimer les paramètres des processus ARIMA :

```
X.arma=arma(X,order=c(p,d,q))
```

et des processus SARIMA :

```
X.sarima=arma(X,order=c(p,d,q),seasonal=list(order=c(P,D,Q),period=T))
```

Parmi les sorties de cette fonction, on peut obtenir :

coef	estimation des coefficients des parties AR et MA, ainsi que de la constante
sigma2	estimation de la variance du bruit d'innovation
var.coef	estimation de la matrice de variance-covariance des paramètres
loglik	log-vraisemblance à l'optimum
aic	valeur du critère AIC (si la méthode du maximum de vraisemblance est appliquée)
resiudals	estimation des résidus

Prédiction des processus ARIMA et SARIMA

La fonction `predict(X,h)` permet d'effectuer une prévision à l'horizon h . Parmi les sorties de cette fonction,

pred	prévisions
se	écart-type de l'erreur de prévision

Il n'existe pas de fonction prédéfinie pour calculer un intervalle de confiance sur les prévisions, mais cela peut être fait manuellement grâce à ces deux sorties de la fonction `predict`.

Exercice 1 : On se propose d'étudier un ARIMA(1,1,1).

1. Générer 100 réalisations d'un tel processus.
2. Estimer les paramètres.
3. Prévoir les 5 prochaines valeurs du processus

Exercice 2 : Précipitations mensuelles à San Fransisco entre 1932 et 1966

Récupérer la série `sanfran.dat`.

1. La série semble-t-elle stationnaire ? Si non, faites en sorte qu'elle le soit.
2. Proposer alors un AR(p) adapté. Valider votre modélisation en testant les résidus.

Mettez votre idée de côté car nous vous proposons de tester maintenant directement sur la série initiale un AR(2) avec partie saisonnière (autrement dit un

SARIMA(2, 0, 0) × (0, 0, 0)₁₂). On utilise désormais les données jusqu'à la fin de l'année 1963.

3. Estimer le modèle SARIMA(2, 0, 0) × (0, 0, 0)₁₂. Afficher et tester les résidus.
4. Prévoir les précipitations de 1964, 1965 et 1966 à partir de ce modèle. Superposer sur un graphique prévision et valeurs réelles.
5. Faire de même avec le modèle AR(*p*) sélectionné à la première question (ainsi qu'avec un lissage exponentiel de Holt-Winters, avec et sans composante saisonnière).
6. Quel est, graphiquement, le meilleur modèle pour prédire cette série ?
7. Comment aurait-on pu répondre à la question précédente de façon moins subjective ? Comparer les résultats à l'analyse graphique.

Exercice 3 : Taux d'intérêt au Royaume-Uni

Le fichier `UKinterestrates.dat` contient le "spread" des taux d'intérêts (différence entre taux d'intérêt à long terme et à court terme) pour le Royaume-Uni entre mars 1953 et décembre 1996. En vous inspirant des exercices précédents, proposer une modélisation de type ARMA, ARIMA ou SARIMA. Justifier bien votre démarche.

23 Les processus ARCH et GARCH

Pour utiliser les fonctions spécifiques à l'étude des modèles ARCH et GARCH, il faut avant tout charger les packages `tseries` et `TSA`. Pour cela, aller dans le menu Packages puis cliquer sur Installer le(s) package(s)... puis sur France (Toulouse) dans la fenêtre CRAN Mirror et enfin sélectionner `tseries` et taper la commande `library(tseries)`. Refaire la même manipulation avec cette fois-ci le package `TSA`.

Exercice 3 : Données simulées

Soit le processus X_t défini par :

$$X_t | X_{t-1}, X_{t-2}, \dots \sim \mathcal{N}(0, \sigma_t^2)$$

avec

$$\sigma_t^2 = 0.1 + 0.5X_{t-1}^2 + 0.2X_{t-2}^2$$

1. Reconnaissez-vous ce processus ?
2. Simuler dans un vecteur `x` 1000 réalisations de ce processus en tapant les commandes :

```
n =1100
a =c(0.1, 0.5, 0.2)                                coefficients ARCH(2)
e =rnorm(n)
x =double(n)
x[1 :2] =rnorm(2, sd = sqrt(a[1]/(1.0-a[2]-a[3])))
for(i in 3 :n)                                       génération du processus
{x[i] = e[i]*sqrt(a[1]+a[2]*x[i-1]^ 2+a[3]*x[i-2]^ 2)}
x = ts(x[101 :1100])
```

Représenter cette trajectoire graphiquement, et analyser les moyenne, variance et auto-covariance empiriques.

3. Ajuster un processus ARCH(*p*) au vecteur `x`. Contrôle (on pourra utiliser la commande `summary`) et conclusion.

La fonction `garch.sim` permet directement de simuler un processus GARCH. Par exemple, pour simuler le processus

$$X_t = \epsilon_t$$

avec $\epsilon_t | X_{t-1}, X_{t-2}, \dots \sim \mathcal{N}(0, \sigma_t^2)$ et $\sigma_t^2 = 0.1 + 0.8X_{t-1}^2$, il faut écrire

```
monarch=garch.sim(alpha=c(0.1,0.8), n=500)
plot.ts(monarch)
```

La syntaxe est identique si une partie GARCH doit être modélisée. Par exemple, pour spécifier un modèle GARCH dont la variance conditionnelle est

$$\sigma_t^2 = 0.1 + 0.5X_{t-1}^2 + 0.3\sigma_{t-1}^2$$

on notera

```
monarch=garch.sim(alpha=c(0.1,0.5), beta=0.3,n=500)
plot.ts(monarch)
```

La fonction `garch` permet d'estimer un GARCH(p, q) :

```
serie=garch(data,order=c(q,p))
```

Parmi les sorties de cette fonction : `coef`, `residuals`, `fitted.values`.

La prédiction se fait de la même façon que pour les modèles de type ARMA.

Exercice 4 : Données réelles : EuStockMarkets

Le fichier `EuStockMarkets` de R contient les valeurs de clôture des 4 principaux indices boursiers européens, de 1991 à 1998. Pour chaque indice, chercher un modèle ARCH ou GARCH approprié, et effectuer la prévision à 30 jours. Les données pourront (devront ?) au préalable être transformées.

Exercice 5 : Données réelles : NYSE

Le fichier `nyse.dat` contient les évolutions journalières de la bourse des valeurs de New-York (NYSE) du 19 octobre 1984 au 31 décembre 1991. Chercher un processus ARCH ou GARCH adapté, et réaliser la prévision à 30 jours.

M1 ISMAG - MI0B246X

Fiche Résumé : Processus stationnaires et rappels

Définition d'un processus stationnaire

Un processus $X = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est **stationnaire** si et seulement si

- (i) $\mathbb{E}(X_t) = \mu, \forall t \in \mathbb{Z}$;
- (ii) X_t est de carré intégrable pour tout $t \in \mathbb{Z} : \mathbb{E}(X_t^2) < \infty$;
- (iii) $\text{Cov}(X_s, X_{s+t}) = \text{Cov}(X_{s-1}, X_{s-1+t}) = \dots = \text{Cov}(X_0, X_t), \forall t, s \in \mathbb{Z}$.

Fonctions d'autocovariance et d'autocorrélation

Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ un processus stationnaire. On appelle **fonction d'autocovariance** (resp. **fonction d'autocorrélation**) la fonction γ (resp. ρ) définie de \mathbb{Z} dans \mathbb{R} par

$$\forall h, t \in \mathbb{Z}, \quad \gamma(h) := \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) \quad (\text{resp. } \rho(h) := \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}).$$

Le graphe de cette fonction est appelé **variogramme** (resp. **corrélogramme**).

La fonction d'autocovariance d'un processus stationnaire vérifie

1. $\forall h \in \mathbb{Z}, \quad \gamma(-h) = \gamma(h)$: elle est paire ;
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall (a_i) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall (t_i) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \gamma(t_i - t_j) > 0$: elle est de type positif ;
3. $\gamma(0) = \text{Var}(X_t)$;
4. $|\gamma(h)| \leq \gamma(0), \forall h$.

La fonction d'autocorrélation est la version normalisée de la fonction d'autocovariance et vérifie donc le même genre de propriétés.

La fonction $\rho(h)$ est l'expression du lien linéaire entre X_t et X_{t-h} . Si t est l'instant présent et $h > 0$, $\rho(h)$ est l'expression du lien linéaire entre le présent et le passé d'ordre h ; plus $|\rho(h)|$ est proche de 1 et plus ce lien est fort.

Fonction d'autocorrélation partielle

Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ un processus stationnaire. Définissons tout d'abord la régression affine de X_t sur $(X_{t-1}, \dots, X_{t-h})$ notée $X_{t,h}^*$. On a

$$X_t = X_{t,h}^* + R_{t,h} = \lambda_{0,h} + \sum_{s=1}^h \lambda_{s,h} X_{t-s} + R_{t,h}$$

où $R_{t,h}$ est une variable aléatoire non corrélée avec X_{t-1}, \dots, X_{t-h} . La **fonction d'autocorrélation partielle** τ est définie par

$$\forall h \in \mathbb{Z}, \quad \tau(h) = \lambda_{h,h}$$

Le graphe de cette fonction est appelé **corrélogramme partiel**. Cette fonction permet donc de déterminer jusqu'à quel niveau de décalage ou ordre, il existe une relation directe entre X_t et les valeurs précédentes.

L'autocorrélation partielle d'ordre h $\tau(h)$ représente le coefficient de corrélation linéaire entre

- le résidu $X_t - X_{t,h-1}^*$ de la régression de X_t par $X_{t-h+1}, \dots, X_{t-1}$
et

- le résidu $X_{t-h} - X_{t-h,h-1}^*$ de la régression de X_{t-h} par $X_{t-h+1}, \dots, X_{t-1}$.

En d'autres termes, $X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \dots + \alpha_{h-1} X_{t-h+1} + U$

$$X_{t-h} = \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + \dots + \beta_{h-1} X_{t-h+1} + V$$

et $\tau(h) = \text{Cor}(U, V)$.

Relation entre les fonctions d'autocorrélation et d'autocorrélation partielle

A partir des régressions affines de X_t sur les valeurs du passé, on obtient le système de h éq. lin.

$$\begin{pmatrix} \rho(1) \\ \rho(2) \\ \vdots \\ \rho(h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \dots & \rho(h-1) \\ \rho(1) & 1 & \dots & \rho(h-2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \rho(h-1) & \rho(h-2) & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{1,h} \\ \lambda_{2,h} \\ \vdots \\ \lambda_{h,h} \end{pmatrix}$$

D'où l'on déduit que

$$\tau(h) = \lambda_{h,h} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho(1) & \dots & \rho(h-2) & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 & \dots & \rho(h-3) & \rho(2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \rho(h-1) & \rho(h-2) & \dots & \rho(1) & \rho(h) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho(1) & \dots & \rho(h-2) & \rho(h-1) \\ \rho(1) & 1 & \dots & \rho(h-3) & \rho(h-2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \rho(h-1) & \rho(h-2) & \dots & \rho(1) & 1 \end{vmatrix}}$$

Ceci montre que $\tau(h)$ est fonction de $\rho(1), \dots, \rho(h)$ et inversement.

Innovation

Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ un processus de carré intégrable et X_t^* la régression affine de X_t sur $(X_s, s < t)$. On appellera **innovation** du processus à la date t la variable aléatoire réelle $\epsilon_t^* := X_t - X_t^*$.

La v.a.r. X_t^* représente la régression affine de X_t sur le passé du processus à la date t . Il s'agit donc de la projection de X_t sur l'espace $L_{(X_s, s < t)}$. C'est la meilleure approximation affine de X_t fonction du passé du processus. L'innovation est alors la partie de X_t non corrélée au passé.

Opérateurs avance et retard

On appelle **opérateur retard** l'opérateur $B : (X_t)_{t \in \mathbb{Z}} \mapsto (BX_t)_{t \in \mathbb{Z}} := (X_{t-1})_{t \in \mathbb{Z}}$.

L'application $I - \lambda B$ est inversible si et seulement si $|\lambda| \neq 1$. Son inverse est alors donnée

par

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{+\infty} \lambda^i B^i & \text{pour } |\lambda| < 1 \\ -\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda^i} F^i & \text{pour } |\lambda| > 1 \end{cases} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda^i B^i & \text{pour } |\lambda| < 1 \\ -\sum_{i=-1}^{-\infty} \lambda^i B^i & \text{pour } |\lambda| > 1 \end{cases}$$

L'opérateur $\Phi(B) := 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$ est inversible si et seulement si les racines du polynôme Φ sont de module différent de 1.

M1 ISMAG - MI0B246X

Fiche Résumé : Processus moyennes mobiles (MA)

Cadre d'utilisation d'un MA(q) : Les processus MA sont utiles pour modéliser des processus stationnaires qui ont des autocorrélations nulles à partir d'un certain rang.

Définition d'un MA(q)

Un **processus moyenne mobile** d'ordre q est un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ stationnaire tel que

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad X_t = \eta_t - \theta_1 \eta_{t-1} - \dots - \theta_q \eta_{t-q} = \Theta(B)\eta_t$$

où $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$ sont des réels fixés et $(\eta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance σ^2 . Un tel processus est dit MA(q) (Moving Average of order q).

Bruit blanc d'innovation d'un MA(q)

La relation d'un MA(q) avec son bruit blanc d'innovation est aussi du type $X_t = \tilde{\Theta}(B)\epsilon_t$, $t \in \mathbb{Z}$. Le polynôme $\tilde{\Theta}$ de degré q , dit **polynôme canonique**, s'obtient à partir de Θ en remplaçant toutes les racines éventuelles à l'intérieur du cercle unité par leur inversion ($\mu \mapsto \frac{1}{\bar{\mu}}$), les déplaçant ainsi à l'extérieur du cercle unité. Notons μ_1, \dots, μ_q les co-racines de $\Theta(z)$:

$$\Theta(z) = \prod_j (1 - \mu_j z) = 1 - \theta_1 z - \dots - \theta_q z^q.$$

Le polynôme $\tilde{\Theta}$ qui relie X à son bruit blanc d'innovation est donné par

$$\tilde{\Theta}(z) = \prod_{j, |\mu_j| \leq 1} (1 - \mu_j z) \prod_{j, |\mu_j| > 1} \left(1 - \frac{1}{\bar{\mu}_j} z\right).$$

A partir de maintenant, nous ne considérerons plus que des processus MA(q) donnés sous leur représentation canonique i.e. vérifiant l'équation

$$X_t = \Theta(B)\eta_t$$

avec $\Theta(z) = 1 - \theta_1 z - \dots - \theta_q z^q = \prod_{i=1}^q (1 - \mu_i z)$ où $|\mu_i| \leq 1 \forall i$ puisque nous venons de voir qu'il est toujours possible de se ramener à ce cas quitte à changer de bruit blanc.

Forme autorégressive infinie d'un MA(q)

(i) Si Θ n'a pas de racine de module égal à 1, alors il existe un choix unique de coefficients π_j pour lesquels on a

$$\eta_t = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \pi_j X_{t-j},$$

avec $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} |\pi_i| < \infty$.

(ii) Si de plus les racines de Θ sont toutes de module strictement supérieur à 1, alors il existe un choix unique de coefficients π_j pour lesquels on a

$$\eta_t = \sum_{j \in \mathbb{N}} \pi_j X_{t-j}.$$

Les coefficients π_j convergent rapidement vers 0 lorsque $j \rightarrow \infty$, en effet ce sont les coefficients du filtre associé au polynôme $1/\Theta$. Dans ce cas, on dit que le processus est **inversible** et η_t est l'innovation du processus à la date t .

Dans le cas où Θ n'a pas de racine multiple, on a la formule explicite suivante

$$\forall j \geq 0, \quad \pi_j = \sum_{1 \leq k \leq q} m_k \mu_k^j$$

avec

$$m_k = \frac{1}{\prod_{l \neq k} \left(1 - \frac{\mu_l}{\mu_k}\right)}$$

et

$$\Theta(z) = 1 - \theta_1 z - \dots - \theta_q z^q = \prod_j (1 - \mu_j z).$$

(iii) Si Θ s'annule en un point du cercle unité, alors il n'existe aucun choix de coefficients π_j pour lesquels $\sum_{j \geq 0} \pi_j X_{t-j}$ converge et coïncide avec η_t . Cependant, on peut représenter η_t comme limite de telles combinaisons linéaires des X_u , $u \leq t$.

Fonctions caractéristiques et propriétés d'un MA(q)

1. La variance de X_t est donnée par

$$\text{Var}(X_t) = \gamma^X(0) = (1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2) \gamma^n(0) > \gamma^n(0) = \sigma^2, \quad \forall t$$

Ayant de plus $\mathbb{E}(X_t) = 0$, on en déduit que tout processus moyenne mobile est un processus stationnaire.

2. Plus généralement, la fonction d'autocovariance est donnée par

$$\gamma(h) = \begin{cases} (-\theta_h + \theta_{h+1}\theta_1 + \dots + \theta_q\theta_{q-h})\sigma^2 & \text{si } 0 < |h| \leq q \\ 0 & \text{si } |h| > q \end{cases}$$

3. La fonction d'autocorrélation est donnée par

$$\rho(h) = \begin{cases} \frac{-\theta_h + \theta_{h+1}\theta_1 + \dots + \theta_q\theta_{q-h}}{1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2} & \text{si } 0 < |h| \leq q \\ 0 & \text{si } |h| > q \end{cases}$$

4. L'expression de la fonction d'autocorrélation partielle est compliquée. Notons simplement qu'elle ne s'annule pas à partir d'un certain rang mais qu'il existe un nombre $r \in]0, 1[$ tel que $|\tau(h)| \leq r^h$, $h \geq 2$.

Prédiction d'un MA(q)

On a

$$\begin{aligned} \widehat{X}_t(1) &= -\theta_1 \eta_t - \dots - \theta_q \eta_{t-(q-1)} \\ \widehat{X}_t(2) &= -\theta_2 \eta_t - \dots - \theta_q \eta_{t-(q-2)} \\ &\dots \\ \widehat{X}_t(q) &= -\theta_q \eta_t \\ \widehat{X}_t(j) &= 0, \quad j > q \end{aligned}$$

Il suffit ensuite d'exprimer explicitement les η_u en fonction des X_t .

M1 ISMAG - MI0B246X

Fiche Résumé : Processus autorégressifs (AR)

Cadre d'utilisation d'un AR(p) : Les processus AR sont utiles pour modéliser des processus stationnaires qui ont des autocorrélations partielles nulles à partir d'un certain rang.

Définition d'un AR(p)

Un **processus autorégressif** d'ordre p est un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ stationnaire tel que

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad X_t - \phi_1 X_{t-1} - \dots - \phi_p X_{t-p} = \eta_t \quad \text{i.e.} \quad \Phi(B)X_t = \eta_t \quad (7)$$

où $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ sont des réels fixés et $(\eta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance σ^2 . Un tel processus est dit AR(p) (AutoRegressive of order p).

Bruit blanc d'innovation d'un AR(p)

Si X est un AR(p) alors X est purement innovant et il existe un unique polynôme $\tilde{\Phi}$ (dit canonique) tel que le bruit blanc d'innovation de X soit de la forme $\epsilon = \tilde{\Phi}(B)X$. Ce polynôme est de degré p et s'obtient à partir de Φ par la même règle que pour les MA(q). Il est donc de la forme $\tilde{\Phi}(z) = \prod_{1 \leq k \leq p} (1 - \mu_k z)$ avec $\forall k \quad |\mu_k| < 1$.

A partir de maintenant, nous ne considérerons plus que des processus AR(p) donnés sous leur représentation canonique i.e. vérifiant l'équation

$$\Phi(B)X_t = \eta_t$$

avec $\Phi(z) = 1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p = \prod_{i=1}^p (1 - \lambda_i z)$ où $|\lambda_i| \leq 1 \quad \forall i$ puisque nous venons de voir qu'il est toujours possible de se ramener à ce cas quitte à changer de bruit blanc.

Écriture moyenne mobile infinie d'un AR(p)

(i) Si Φ n'a pas de racine de module égal à 1, $\Phi(B)$ est inversible et on en déduit que l'équation (7) a une solution unique, avec une écriture moyenne mobile infinie

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad X_t = (\Phi(B))^{-1} \eta_t = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi_j \eta_{t-j},$$

avec $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} |\psi_i| < \infty$. Les coefficients ψ_j qui convergent rapidement vers 0 lorsque $j \rightarrow \infty$, en effet ce sont les coefficients du filtre associé au polynôme $1/\Phi$.

(ii) Si de plus les racines de Φ sont toutes de module strictement supérieur à 1, alors l'opérateur inverse $\Phi^{-1}(B)$ admet un dévt. ne faisant intervenir que les puissances positives de B :

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad X_t = (\Phi(B))^{-1} \eta_t = \sum_{i=0}^{+\infty} \psi_i \eta_{t-i},$$

avec $\sum_{i=0}^{+\infty} |\psi_i| < +\infty$. C'est-à-dire que le processus X_t s'exprime en fonction de η_s , $s \leq t$ et d'après la définition, on voit que η_t n'est pas corrélé avec X_{t-1}, X_{t-2}, \dots . La variable

η_t est donc l'innovation du processus à la date t et $\sum_{i=0}^{+\infty} \psi_i \eta_{t-i}$ est la régression affine de X_t sur $(X_s, s \leq t-1)$; il s'agit de la représentation canonique d'un processus AR(p).

Fonctions caractéristiques et propriétés d'un AR(p)

1. La fonction d'autocovariance d'un AR(p) est donnée par

$$\gamma(h) = \sum_{i=1}^p \phi_i \gamma(h-i).$$

2. La fonction d'autocorrélation se déduit aisément $\rho(h) = \sum_{i=1}^p \phi_i \rho(h-i)$.

3. La fonction d'autocorrélation partielle est nulle pour $|h| > p$ et vaut ϕ_p sinon :

$$\tau(h) = \begin{cases} 0 & \text{si } |h| > p \\ \phi_p & \text{si } |h| \leq p \end{cases}$$

Prédiction d'un AR(p)

On a Soit X un AR(p) de bruit blanc d'innovation η et de polynôme canonique $\Phi(z) = 1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p$. Les prévisions optimales $\hat{X}_t(h)$ pour $h > 0$ sont des combinaisons linéaires de $X_t, X_{t-1}, \dots, X_{t-p+1}$:

$$\hat{X}_t(h) = \sum_{0 \leq j \leq p-1} a_j(h) X_{t-j}$$

qui s'obtiennent par récurrence selon

$$\hat{X}_t(h) = \sum_{1 \leq k \leq p} \phi_k \hat{X}_t(h-k)$$

avec les conditions initiales $\hat{X}_t(-j) = X_{t-j}$ pour $j \geq 0$.

Equations de Yule-Walker d'un AR(p)

On a les équations suivantes dites **équations de Yule-Walker** :

$$\begin{aligned} (\text{YW}_0) \quad & \gamma^X(0) - \phi_1 \gamma^X(-1) - \dots - \phi_p \gamma^X(-p) = \gamma^\eta(0) \\ (\text{YW}_1) \quad & \gamma^X(1) - \phi_1 \gamma^X(0) - \dots - \phi_p \gamma^X(1-p) = 0 \\ & \dots \\ (\text{YW}_j) \quad & \gamma^X(j) - \phi_1 \gamma^X(j-1) - \dots - \phi_p \gamma^X(j-p) = 0 \end{aligned}$$

Etant donnés ϕ_1, \dots, ϕ_p et $\gamma^\eta(0)$, le système des $p+1$ équations linéaires en les $p+1$ inconnues $\gamma^X(0), \dots, \gamma^X(p)$ possède une unique solution. Les $\gamma^X(j)$ pour $j > p$ sont alors calculés par récurrence avec les $\text{YW}_j, j > p$.

Etant donnés $\gamma^X(0), \dots, \gamma^X(p)$, le système des p équations linéaires en les p inconnues ϕ_1, \dots, ϕ_p possède une unique solution. L'équation YW_0 permet d'évaluer $\gamma^\eta(0)$.

Dans la pratique (après avoir deviné une valeur raisonnable pour p), on calcule des valeurs empiriques des autocovariances $\gamma^X(0), \dots, \gamma^X(p)$. On en déduit les valeurs de ϕ_1, \dots, ϕ_p et $\gamma^n(0)$. Puis on cherche à valider le modèle en comparant avec les empiriques les valeurs des $\gamma^X(j)$ pour $j > p$ déduites des autres YW_j . Enfin, le modèle sera adapté (du point de vue de la prédiction) si $\gamma^n(0)$ est petit par rapport à $\gamma^X(0)$. Cela signifie que les racines (ou co-racines) de Φ doivent être proches du cercle unité.

M1 ISMAG - MI0B246X

Fiche Résumé : Processus ARMA

Cadre d'utilisation d'un ARMA(p, q) : Les processus ARMA sont utiles pour modéliser des processus stationnaires qui ne sont ni des AR purs ni des MA purs.

Définition d'un ARMA(p, q)

Un **processus autorégressif moyenne mobile** d'ordre (p, q) est un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ stationnaire tel que

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad X_t - \phi_1 X_{t-1} - \dots - \phi_p X_{t-p} = \eta_t - \theta_1 \eta_{t-1} - \dots - \theta_q \eta_{t-q} \quad \text{i.e.} \quad \Phi(B)X_t = \Theta(B)\eta_t \quad (8)$$

où $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ sont des réels fixés et $(\eta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance σ^2 . Un tel processus est dit ARMA(p, q) (AutoRegressive Moving Average of order (p, q)).

Bruit blanc d'innovation d'un ARMA(p, q)

Pour que η soit le bruit blanc d'innovation de X il faut et il suffit que

$$\Phi(z) = \prod_{1 \leq k \leq p} (1 - \lambda_k z) \quad \text{et} \quad \Theta(z) = \prod_{1 \leq j \leq q} (1 - \mu_j z)$$

avec $\forall k, \quad |\lambda_k| < 1$ et $\forall j, \quad |\mu_j| \leq 1$.

Si X est un ARMA(p, q) donné selon $\Phi(B)X = \Theta(B)\eta$, alors la relation (dite minimale) qui le lie à son bruit blanc d'innovation est aussi du type $\tilde{\Phi}(B)X = \tilde{\Theta}(B)\epsilon$, où les polynômes $\tilde{\Phi}$ et $\tilde{\Theta}$ s'obtiennent à partir de Φ et Θ selon les mêmes règles que pour les AR(p) et les MA(q) puis en supprimant tout facteur commun éventuel.

A partir de maintenant, nous ne considérerons plus que des processus ARMA(p, q) donnés sous leur représentation canonique i.e. vérifiant l'équation

$$\Phi(B)X_t = \Theta(B)\eta_t$$

avec

- $\Phi(z) = 1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p = \prod_{i=1}^p (1 - \lambda_i z)$ où $|\lambda_i| \leq 1 \quad \forall i$

- $\Theta(z) = 1 - \theta_1 z - \dots - \theta_q z^q = \prod_{i=1}^q (1 - \mu_i z)$ où $|\mu_i| \leq 1 \quad \forall i$

puisque nous venons de voir qu'il est toujours possible de se ramener à ce cas quitte à changer de bruit blanc.

Représentation moyenne mobile infinie d'un ARMA(p, q)

(i) Si le polynôme Φ a toutes ses racines de module différent de 1, l'opérateur $\Phi(B)$ est inversible et la relation admet une solution stationnaire donnée par

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad X_t = \frac{\Theta(B)}{\Phi(B)} \eta_t = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \psi_i \eta_{t-i} \quad \text{avec} \quad \sum_{i \in \mathbb{Z}} |\psi_i| < +\infty,$$

c'est à dire sous une forme moyenne mobile infinie.

(ii) Si de plus les racines du polynôme Φ sont de module strictement supérieur à 1, seules

les valeurs présente et passées du bruit interviennent dans cette écriture MA(∞). Dans ce cas, les ψ_i de la représentation causale vérifient

$$\begin{aligned}\psi_0 &= 1 \\ \psi_k &= -\theta_k + \sum_{i=1}^{\min(k,p)} \phi_i \psi_{k-i}, \quad 1 \leq k \leq q \\ \psi_k &= \sum_{i=1}^{\min(k,p)} \phi_i \psi_{k-i}, \quad k > q\end{aligned}$$

Représentation autorégressive d'un ARMA(p, q)

(i) Supposons que le polynôme Θ a toutes ses racines de module différent de 1, l'opérateur $\Theta(B)$ est inversible et on obtient la forme autorégressive infinie

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad \eta_t = \frac{\Phi(B)}{\Theta(B)} X_t = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \pi_i X_{t-i} \text{ avec } \sum_{i \in \mathbb{Z}} |\pi_i| < +\infty$$

(ii) Si de plus les racines du polynôme Θ sont de module strictement supérieur à 1, cette représentation AR(∞) ne fait intervenir que les valeurs présente et passées du processus. Dans ce cas, les π_i de la représentation causale vérifient

$$\begin{aligned}\pi_0 &= 1 \\ \pi_k &= -\phi_k - \sum_{i=1}^{\min(k,q)} \theta_i \pi_{k-i}, \quad 1 \leq k \leq p \\ \pi_k &= - \sum_{i=1}^{\min(k,q)} \theta_i \pi_{k-i}, \quad k > p\end{aligned}$$

Fonctions caractéristiques d'un ARMA(p, q)

La fonction d'autocovariance d'un processus ARMA(p, q) vérifie pour $h \geq q + 1$,

$$\gamma(h) = \sum_{i=1}^p \phi_i \gamma(h-i)$$

et pour $0 \leq h \leq q$, $\gamma(h) = \sum_{i=1}^p \phi_i \gamma(h-i) + \sigma^2 (\psi_0 - \psi_1 \theta_{h+1} - \dots - \psi_{q-h} \theta_q)$.

Prédiction d'un ARMA(p, q) : Formule déduite de la forme autorégressive

(i) Les prévisions optimales s'expriment comme des combinaisons linéaires

$$\hat{X}_T(h) = \sum_{j \geq 0} \alpha_j(h) X_{T-j},$$

avec pour chaque h

$$\sum_{j \geq 0} \alpha_j(h) z^j = \left[\frac{1}{z^h} \frac{\Theta(z)}{\Phi(z)} \right]_+ \frac{\Phi(z)}{\Theta(z)}$$

où [] signifie que l'on ne retient que les termes en z^k pour $k \geq 0$.

(ii) Les $\widehat{X}_T(h)$ s'obtiennent par récurrence selon

$$\widehat{X}_T(h) = - \sum_{j \geq 1} \pi_j \widehat{X}_T(h-j),$$

avec les conditions initiales pour $t \leq T$: $\widehat{X}_T(t-T) = X_t$.

Autrement dit on procède comme pour un AR(p) à partir du moment où l'on dispose de la représentation «AR(∞)» qui exprime le bruit blanc d'innovation à partir de X .

La deuxième équation du théorème permet de calculer récursivement les prévisions $\widehat{X}_T(h)$ à partir des prévisions précédentes. Il faut d'abord remarquer que, pour $t \leq T$, $\widehat{X}_T(t-T) = X_t$. Ainsi, pour la prévision à l'horizon 1, on a la formule suivante :

$$\widehat{X}_T(1) = - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j X_{T+1-j},$$

qui ne fait intervenir que des valeurs observées de la série temporelle.

Pour la prévision à l'horizon 2, on a une formule basée sur les observations et sur la prévision donnée ci-dessus :

$$\widehat{X}_T(2) = -\pi_1 \widehat{X}_T(1) - \sum_{j=2}^{\infty} \pi_j X_{T+2-j}.$$

Et ainsi de suite pour tout $h \in \mathbb{N}^*$. Cependant, ces prévisions font intervenir des valeurs non observées, à savoir X_t pour $t \leq 0$. Il faut alors effectuer une approximation en tronquant la série. On obtient alors la prévision suivante :

$$\widehat{X}_T^*(h) = - \sum_{j=1}^{T+h-1} \pi_j X_{T+h-j},$$

avec toujours $\widehat{X}_T^*(t-T) = X_t$ pour $t \leq T$.

Prédiction d'un ARMA(p, q) : Formule déduite de la forme moyenne mobile

(i) Les $\widehat{X}_T(h)$ s'expriment comme des combinaisons linéaires des valeurs passées du bruit blanc d'innovation

$$\widehat{X}_T(h) = \sum_{j \geq h} \psi_j \eta_{T+h-j}.$$

(ii) Enfin, la variance de l'erreur de prédiction est donnée par

$$\mathbb{E} \left((X_{T+h} - \widehat{X}_{T+h})^2 \right) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j^2.$$

Mise à jour : Lorsque l'observation X_{T+1} vient s'ajouter aux précédentes, la mise à jour des prévisions se fait de la façon suivante :

$$\widehat{X}_{T+1}(h-1) = \psi_{h-1} \left(X_{T+1} - \widehat{X}_T(1) \right) + \widehat{X}_T(h).$$

Autrement dit, on ajoute au prédicteur précédent de X_{T+h} une correction proportionnelle à l'erreur que l'on avait faite en prédisant, avant de l'avoir observée, la donnée que l'on vient de recueillir.

M1 ISMAG - MI0B246X

Fiche Résumé : Processus ARIMA(p, d, q)

Cadre d'utilisation d'un ARIMA(p, d, q) : Les processus ARIMA sont utiles pour modéliser des processus qui ont des corrélations positives et lentement décroissantes car cette propriété des autocorrélations peut être le signe d'une tendance dans la série.

Définition d'un ARIMA(p, d, q)

Soient $p, q, d \geq 0$. Un processus (X_t) est un processus ARIMA(p, d, q) [Autoregressif moyenne mobile intégré] s'il satisfait une équation du type

$$\phi(B)(I - B)^d X_t = \Theta(B)\eta_t, \quad (9)$$

où

$$\begin{cases} \phi(B) = I + \phi_1 B + \dots + \phi_p B^p, & \phi_p \neq 0 \\ \Theta(B) = I + \theta_1 B + \dots + \theta_q B^q, & \theta_q \neq 0 \end{cases}$$

sont des polynômes dont les racines sont de module supérieur à 1, où les conditions initiales $(X_{-1}, \dots, X_{-p-d}, \eta_{-1}, \dots, \eta_{-q})$ sont non corrélées avec $\eta_0, \dots, \eta_t, \eta = (\eta_t)_{t \geq -q}$ BB de var. σ^2 .

Représentation d'un ARIMA(p, d, q)

(i) X_t peut s'écrire sous la **forme moyenne mobile** :

$$X_t = \sum_{j=0}^t h_j \eta_{t-j} + h^*(t) Z_{-1}, \quad (10)$$

où les h_j sont les coefficients de la division selon les puissances croissantes de Θ par Φ (en particulier $h_0 = 1$) et $h^*(t)$ est un vecteur ligne de fonctions de t .

(ii) X_t peut s'écrire sous la **forme autorégressive** :

$$\eta_t = X_t + \sum_{j=1}^t \pi_j X_{t-j} - g(t) Z_{-1}, \quad (11)$$

où les π_j sont les coefficients de la division selon les puissances croissantes de Φ par Θ et $g(t)$ est un vecteur ligne de fonctions de t tendant vers zéro lorsque t tend vers l'infini.

Prédiction d'un ARIMA(p, d, q) : Formule déduite de la forme moyenne mobile

La régression affine de X_{t+k} sur $(Z_{-1}; \eta_i, i = 0, \dots, t)$ est

$$\hat{X}_t(k) = \sum_{j=k}^{t+k} h_j \eta_{t+k-j} + h^*(t+k) Z_{-1} \quad \text{ou} \quad \hat{X}_t(k) = \sum_{j=0}^t h_{j+k} \eta_{t-j} + h^*(t+k) Z_{-1}.$$

Formule de mise à jour : Cette dernière formule n'est pas directement utilisable puisqu'elle fait intervenir les η_j qui sont non observables. Elle permet cependant d'obtenir une

formule de mise à jour intéressante :

$$\hat{X}_{t+1}(k-1) - \hat{X}_t(k) = \sum_{j=k-1}^t h_j \eta_{t+k-j} - \sum_{j=k}^t h_j \eta_{t+k-j} = h_{k-1} \eta_{t+1}$$

ou

$$\hat{X}_{t+1}(k-1) - \hat{X}_t(k) = h_{k-1} [X_{t+1} - \hat{X}_t(1)]. \quad (12)$$

Prédiction d'un ARIMA(p, d, q) : Formule déduite de la forme autorégressive

La formule autorégressive (11) fournit $X_{t+k} = -\sum_{j=1}^{t+k} \pi_j X_{t+k-j} + g(t+k)Z_{-1} + \eta_{t+k}$; le terme $g(t+k)Z_{-1}$ devient négligeable pour t assez grand et on obtient l'approximation

$$\hat{X}_t(k) = -\sum_{j=1}^{t+k} \pi_j \hat{X}_{t+k-j} \quad (13)$$

$$\text{avec } \hat{X}_{t+k-j} = \begin{cases} \hat{X}_t(k-j) & \text{si } k > j \\ X_{t+k-j} & \text{si } k \leq j \end{cases}$$

Prédiction d'un ARIMA(p, d, q) : Formule déduite de la forme ARIMA

La formule de définition d'un ARIMA permet d'obtenir

$$\hat{X}_t(k) = -\sum_{j=1}^{p+d} \Phi_j \hat{X}_{t+k-j} + \sum_{j=1}^q \theta_j \hat{\eta}_{t+k-j}, \quad (14)$$

$$\text{avec } \hat{X}_{t+k-j} = \begin{cases} \hat{X}_t(k-j) & \text{si } k > j \\ X_{t+k-j} & \text{si } k \leq j \end{cases} \text{ et } \hat{\eta}_{t+k-j} = \begin{cases} 0 & \text{si } k > j \\ \eta_{t+k-j} & \text{si } k \leq j \end{cases}$$

Prédiction d'un ARIMA(p, d, q) : Utilisation jointe de ces formules

Supposons que l'on souhaite effectuer des prédictions jusqu'à l'horizon K . A la date T , on doit calculer $X_T(k)$ pour $k = 1, \dots, K$. A la date $T+1$, on dispose d'une observation nouvelle qui doit être prise en compte pour modifier les prévisions de $X_{T+1} \dots X_{T+K}$ c'est-à-dire pour calculer $\hat{X}_{T+1}(k)$, $k = 1, \dots, K-1$. On doit également déterminer une nouvelle prévision, celle de X_{T+K+1} . Ces calculs peuvent être menés en utilisant de façon jointe les diverses formules précédentes et après remplacement des divers paramètres par des estimateurs convergents. On procède donc comme suit :

1. On calcule les $\hat{X}_T(k)$, $k = 1, \dots, K$ à la première date T considérée à l'aide de (13) ; ce calcul fait, on n'aura plus à se servir des valeurs des X_s , $s \leq T$.
2. A la date $T+1$, on connaît la valeur de X_{T+1} ; on peut donc calculer $\hat{X}_{T+1}(k)$, $k = 1, \dots, K-1$ à l'aide de (12).
3. Il reste à calculer $\hat{X}_{T+1}(K)$ qu'on peut facilement obtenir à partir de (14) à condition d'avoir pris la précaution de prendre $K > q$ (et donc $\hat{\eta}_{t+K-i} = 0$, $i = 1, \dots, q$) et $K > p+d$ (ce qui évite d'avoir à garder trace des observations puisqu'on a $\hat{X}_{t+K-i} = \hat{X}_t(K-i)$, $i = 1, \dots, p+d$).

Connaissant $\hat{X}_{T+1}(k)$, $k = 1, \dots, K$, on peut répéter les phases de mise à jour (2) et (3) à la date $T + 2$ et ainsi de suite.

M1 ISMAG - MI0B246X

Fiche Résumé : Processus SARIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)

Cadre d'utilisation d'un SARIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_s : Si l'on veut en même temps traiter les saisonnalités de période s (sans supposer une répétition exacte, déterministe, des données), on utilise les processus SARIMA.

Définition d'un SARIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_s

Soient p, q, d et $s \geq 0$ et $P, Q, D \geq 0$. Un processus (X_t) est un processus SARIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_s [Autoregressif moyenne mobile et saisonnalité intégrées] si

$$Y_t = \Delta^d \Delta_s^D X_t = (I - B)^d (I - B^s)^D X_t, \quad (15)$$

est un processus ARMA stationnaire de la forme

$$\Phi(B)\Psi(B^s)Y_t = \Theta(B)\Omega(B^s)\eta_t \quad (16)$$

où Φ (resp. Θ) est le polynôme générateur d'un AR(p) (resp. d'un MA(q)) :

$$\Phi(z) = 1 - \sum_{k=1}^p \phi_k z^k \quad \text{et} \quad \Theta(z) = 1 - \sum_{k=1}^q \theta_k z^k,$$

et où, pour la saisonnalité $Y_t - Y_{t-s}$, F (resp. G) est le polynôme générateur d'un AR(P) (resp. d'un MA(Q)) :

$$F(z) = 1 - \sum_{k=1}^P f_k z^k \quad \text{et} \quad G(z) = 1 - \sum_{k=1}^Q g_k z^k.$$

Prédiction d'un SARIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_s

Si les données X_1, \dots, X_T suivent un modèle SARIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_s, on définit

$$Y_t = (I - B)^d (I - B^s)^D X_t$$

On traite le problème de prédiction du processus Y_t du type ARMA($p + Ps, q + Qs$) comme vu précédemment et on rentre après au niveau du processus X_t du type SARIMA en exprimant $\hat{X}_T(1)$ en fonction de $\hat{Y}_T(1)$ et les valeurs observées X_t pour $t \leq T$.

M1 ISMAG - MI0B246X

Fiche Résumé : Processus ARCH(p) et GARCH(p, q)

Cadre d'utilisation d'un ARCH(p) : Les modèles ARCH permettent de prendre en compte une variation de la variance au cours du temps (et, plus largement, des moments d'ordres supérieurs ou égaux à deux). L'idée est de déterminer la distribution de ϵ_t conditionnellement à toutes les valeurs passées X_{t-1}, X_{t-2}, \dots

Définition d'un ARCH(p)

Un processus ARCH(p) [AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity] est défini par

$$X_t = \epsilon_t$$

avec

$$\epsilon_t | X_{t-1}, X_{t-2}, \dots \sim \mathcal{N}(0, \sigma_t^2) \quad \text{et} \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p X_{t-p}^2$$

Identification d'un ARCH(p) : Un processus ARCH a un moment centré d'ordre 3 nul (la distribution est donc symétrique) et moment centré d'ordre 4 standardisé supérieur à 3 (la distribution est donc plus aplatie qu'une gaussienne); ceci permet de détecter un ARCH en pratique.

Cadre d'utilisation d'un GARCH(p, q) : Les modèles ARCH permettent de prendre en compte une variation de la variance au cours du temps (et, plus largement, des moments d'ordres supérieurs ou égaux à deux). L'idée est de déterminer la distribution de ϵ_t conditionnellement à toutes les valeurs passées X_{t-1}, X_{t-2}, \dots

Définition d'un GARCH(p, q)

Un processus GARCH(p, q) [Generalized ARCH] est défini par :

$$X_t = \epsilon_t$$

avec

$$\epsilon_t | X_{t-1}, X_{t-2}, \dots \sim \mathcal{N}(0, \sigma_t^2) \quad \text{et} \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p X_{t-p}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \dots + \beta_q \sigma_{t-q}^2$$

avec $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$ pour $i = 1, \dots, p$ et $\beta_j \geq 0$ pour $j = 1, \dots, q$.

Un processus GARCH peut être vu comme un processus ARCH d'ordre infini. Ainsi, la généralisation des processus ARCH aux processus GARCH est similaire à la généralisation des processus autorégressifs aux processus ARMA. Un processus GARCH peut ainsi représenter formellement de façon plus parcimonieuse un processus ARCH comprenant un nombre élevé de paramètres.

Identification d'un GARCH(p, q) : pour identifier un GARCH(p, q), on identifiera tout d'abord le processus ARMA(m, q) qui modélise X_t^2 . Pour identifier p dans le cas où $m = q$ ($p = q$), il faut effectuer des tests de significativité des coefficients a_q, \dots, a_1 du processus ARMA(m, q) (sont-ils significativement non nuls?).