35. Soit $A \in M_n(\mathbf{Z}) \cap GL_n(\mathbf{C})$ à valeurs propres (complexes) de module majoré par 1. Montrer que les valeurs propres de A sont des racines de l'unité.

Solution de Hervé Carrieu et Patrice Lassère

Il s'agit, comme le remarque G. Dospinescu, d'une version adaptée d'un théorème de Kronecker. Le polynôme caractéristique d'une telle matrice appartient à

$$\mathcal{P} = \{P \in \mathbf{Z}[X],\ P \text{ est unitaire de degré } n \text{ et les zéros de } P \text{ sont de module } \leqslant 1\}$$

Or $\mathcal{P}$ est un ensemble fini, car si

$$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0 = \prod_{i=1}^{n}(z - \zeta_i) \in \mathcal{P},$$

les relations entre coefficients et racines donnent, pour $0 \leq k \leq n - 1$

$$|a_k| = \Big|\sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n-k} \zeta_{i_1} \ldots \zeta_{i_k}\Big| \leqslant \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n-k} |\zeta_{i_1} \ldots \zeta_{i_k}| \leqslant \binom{n}{k}$$

De plus, quel que soit l'entier naturel k, A^k est aussi dans $M_n(\mathbf{Z})$ et à valeurs propres de module majoré par 1. Donc son polynôme caractéristique appartient aussi à $\mathcal{P}$. Comme le spectre de A^k est $\{\lambda_1^k, \ldots, \lambda_r^k\}$ (où $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ est le spectre de A, il suffit de trigonaliser A pour s'en rendre compte), l'ensemble $\{\lambda_i^k,\ k \in \mathbf{N}\}$ est fini (où $i \in \{1, \ldots, r\}$). Étant donné que $\lambda_i \neq 0$, λ_i est une racine de l'unité. (*Résolu par Gabriel Dospinescu, Ivan Gozard, P.-J. Hormière, Christophe Jan et Adrien Reisner.)*

*[**Liste des corrigés**]*

[<]