Revue de la Filière Mathématiques

RMS

61. Montrer que si Γ est une partie de $GL_n(\mathbf{C})$ compacte, non vide et stable par produit alors Γ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbf{C})$.

Solution de Patrice Lassère

L'ensemble Γ, stable par produit dans $GL_n(\mathrm{C})$, sera un sous-groupe de $GL_n(\mathrm{C})$ si et seulement s'il est stable par passage à l'inverse.

Soit donc $A \in \Gamma$. La suite $(A^k)_k$ est contenue dans Γ qui est compact. Elle admet donc une sous-suite convergente $(A^{\phi(k)})_k$ vers $B \in \Gamma$. Quitte à faire une autre extraction on peut supposer $\phi(k+1) - \phi(k) \geq 2$ pour tout k. Alors, par continuité du passage à l'inverse,

$$\lim_k A^{\varphi(k+1)-\varphi(k)} = B \cdot B^{-1} = I_n = A \cdot \lim_k A^{\varphi(k+1)-\varphi(k)-1}.$$

Ainsi $A^{-1} = \lim_k A^{\phi(k+1)-\phi(k)-1} \in \Gamma$ puisque $(A^{\phi(k+1)-\phi(k)-1})_k \subset \Gamma$ (car $\phi(k+1)-\phi(k)-1 \geq 1$) et que Γ est fermé. (*Résolu par Rafik Imekraz, Eric Pité, Omar Sonebi, Serge Varjabédian et Bruno Ziliotto)*

*[**Liste des corrigés**]*

[<]