Revue de la Filière Mathématiques
RMS

513. Soit E un espace vectoriel normé dont la boule unité fermée est incluse dans l'union d'un nombre fini de boules fermées de rayon $1/2$. Montrer que E est de dimension finie.

solution utilisant celles de David Alexander, Dominique Fellah et Adrien Reisner

En réalité $1/2$ peut être remplacé par r tel que $0 < r < 1$. Notons $B_r(a)$ la boule fermée de centre a et de rayon r. Soit $a_1, a_2, \ldots, a_m$ des points de E tels que

$$B_1(0) \subset \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant m} B_r(a_j).$$

Notons F le sous-espace vectoriel de E engendré par les a_i. On va montrer que $F = E$, ce qui implique que E est de dimension finie, majorée par m.

On commence par un résultat classique.

Proposition 1. *Soit V un espace vectoriel normé et W un sous-espace vectoriel de V de dimension finie. Soit x dans $V \setminus F$. Alors il existe y dans W tel que $d(x,W) = \|x - y\|$.*

Démonstration. Notons δ la distance $d(x,W)$. Comme W est un sous-espace vectoriel de dimension finie, W est fermé et $\delta > 0$; l'intersection de W et de la boule fermée B de centre x et de rayon 2δ est un compact K de V ; la fonction $u \mapsto \|x-u\|$ est continue et sa restriction à K présente donc un minimum en un certain y de W ; on a $\|x - y\| \leq \|x - u\|$ pour tout u de W, donc $\delta = \|x - y\|$. __

Terminons la solution de l'exercice. Raisonnons par l'absurde et supposons donc l'existence de b dans E non situé dans F. Il existe, d'après la proposition ci-dessus, c dans F tel que $d(b, F) = \|b - c\|$. Notons u un vecteur unitaire proportionnel à $b - c$; par construction, F étant stable par homothétie de centre 0, $d(u,F) = \|u\| = 1$. Mais comme u est dans $B_1(0)$, il existe j tel que $\|u - a_j\| \leq r$; donc $d(u,F) \leq r < 1$. C'est contradictoire.

solution par Patrice Lassère

Il existe par hypothèse $x_1, \ldots, x_N \in E$ tels que

$$B^f(O_E, 1) \subset \bigcup_{i=1}^{N} B^f(x_i, 1/2).$$

Montrons par récurrence sur $m \geq 1$ que $B^f(O_E,1) \subset \mathrm{Vect}\{x_1, \ldots, x_N\} + 2^{-m} B^f(O_E,1)$. En effet,

$$B^f(O_E,1) \subset \cup_{i=1}^{N} \left(\{x_i\} + B^f(O_E, 1/2)\right) \subset \mathrm{Vect}\{x_1, \ldots, x_N\} + 2^{-1} B^f(O_E, 1).$$

La propriété est donc vraie pour $m = 1$. Si on la suppose vraie au rang m, alors :

$$\begin{aligned} B^f(O_E,1) &\subset \mathrm{Vect}\{x_1, \ldots, x_N\} + 2^{-m} B^f(O_E,1) \\ &\subset \mathrm{Vect}\{x_1, \ldots, x_N\} + 2^{-m} \left[\mathrm{Vect}\{x_1, \ldots, x_N\} + 2^{-1} B^f(O_E,1)\right] \\ &= \mathrm{Vect}\{x_1, \ldots, x_N\} + 2^{-m-1} B^f(O_E,1). \end{aligned}$$

C'est la propriété au rang $m + 1$, par récurrence sur m, elle est donc toujours vraie.

Par conséquent, pour tout $m \geq 1$ et $x \in B^f(O_E,1)$, il existe $a_m \in \mathrm{Vect}\{x_1,\ldots,x_N\}$ et $b_m \in B^f(O_E, 1)$ tels que

$$x = a_m + 2^{-m} b_m.$$

On a donc $\|2^{-m} b_m\| \leq 2^{-m}$, i.e. $\lim_m 2^{-m} b_m = O_E$; la suite $(x - 2^{-m} b_n = a_m)_m$ converge donc vers x mais par construction cette suite est aussi incluse dans le sous-espace $\mathrm{Vect}\{x_1,\ldots,x_N\}$ de dimension finie donc fermé dans E. Par conséquent x est dans ce sous-espace. Ainsi $\mathrm{Vect}\{x_1, \ldots, x_N\}$ est un sous-espace vectoriel d'intérieur non vide dans E (il contient la boule unité) et comme la boule unité engendre E, $\mathrm{Vect}\{x_1,\ldots,x_N\} = E$; ainsi E est de dimension finie $\leq N$.

[**Liste des corrigés**]

[<]