231. Trouver les applications f de $\mathbf{N}$ vers $\mathbf{N}$ telles que $f + f \circ f + f \circ f \circ f = 3id_{\mathbf{N}}$.

Solution de Patrice Lassère et Georges Marty

La fonction définie sur **N** par $f(n) = n$ est solution de l'équation fonctionnelle. Montrons que c'est la seule. Soit $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ une telle fonction. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ que $f(n) = n$.

- En substituant 0 à n dans l'équation fonctionnelle, il vient $f(0) + f^2(0) + f^3(0) = 0$ ce qui entraîne $f(0) = 0$.
- Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Supposons $f(k) = k$ pour tout $k < n$.

  S'il existait $j \in \mathbf{N}^*$ tel que $f^j(n) < n$, la suite $(f^l(n))_{l \geqslant j}$ serait constante et on en déduirait $f^j(n) + f^{j+1}(n) + f^{j+2}(n) = 3f^j(n) < 3n$, ce qui est absurde. On a donc :

  $$\forall j \in \mathbf{N}^*,\ f^j(n) \geqslant n.$$

  Comme

  $$f(n) + f^2(n) + f^3(n) = 3n,$$

  ceci entraîne $f(n) = n$.

[Liste des corrigés]

[<]