Revue de la Filière Mathématiques
RMS

**285. Soit $(u_n)_{n\geq 0} \in (\mathbf{R}^{+*})^{\mathbf{N}}$ une suite décroissante, telle que $u_0 = 1$ et telle que la série de terme général $\frac{{u_n}^2}{u_{n+1}}$ converge. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{{u_n}^2}{u_{n+1}} \geq 4$.**

**Solution d'après David Alexander, Roger Cuculière, Abdelkader Daouia, Jean-Denis Eiden, Dominique Fellah, Denis Guibourg, Christophe Jan, Patrice Lassère, Moubinool Omarjee.**

D'après l'hypothèse, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 < u_n \leqslant \frac{u_n^2}{u_{n+1}}.$$

La série de terme général $u_n$ est donc convergente et, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)^2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{\sqrt{u_{n+1}}} \times \sqrt{u_{n+1}}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n^2}{u_{n+1}}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}\right).$$

On a donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n^2}{u_{n+1}} \geqslant \frac{(1+S)^2}{S} \quad \text{avec} \quad S = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n.$$

La fonction $x \longmapsto \frac{(1+x)^2}{x}$ admet sur $]0, +\infty[$ un minimum égal à 4. On a donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n^2}{u_{n+1}} \geqslant 4.$$

**Remarque.** Jean-Denis Eiden et Patrice Lassère remarquent que l'égalité n'est obtenue que pour la suite de terme général $u_n = \frac{1}{2^n}$.

[**Liste des corrigés**]

**[ < ]**