

[Retour à la table des matières](#)

307 Soit $f \in C^2([0, 1], \mathbb{R})$, concave, strictement décroissante, telle que $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$. Soit $K = \{(x, y, z) \in (\mathbb{R}^+)^3 ; x + y + z = 1\}$. Déterminer $\max_{(x,y,z) \in K} f(x) f(y) f(z)$.

Solution composée de celles de David Alexander, Patrice Lasserre et Moubinool Omarjee

On supposera seulement : f concave, strictement décroissante, telle que $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$, sans hypothèse de dérivabilité. Il est clair que f est positive. On utilise l'inégalité arithmético-géométrique :

$$f(x)f(y)f(z) \leq \left(\frac{f(x) + f(y) + f(z)}{3} \right)^3$$

L'égalité dans cette dernière relation force : $f(x) = f(y) = f(z)$, puis, puisque f est injective : $x = y = z$. De plus, comme f est concave et que $x + y + z = 1$:

$$f(1/3) \geq \frac{f(x) + f(y) + f(z)}{3},$$

et il y a égalité si $x = y = z$. Ainsi :

$$f(x)f(y)f(z) \leq f(1/3)^3,$$

avec égalité si et seulement si $x = y = z = 1/3$.

[Retour à la table des matières](#)

[<]