Retour à la table des matières

49 Si (E_1, N_1) et (E_2, N_2) sont deux espaces vectoriels normés réels, une application linéaire T de E_1 dans E_2 est dite compacte si, pour toute suite $(x_n)_n$ de la boule unité de (E_1, N_1), la suite $(T(x_n))_n$ admet une valeur d'adhérence dans (E_2, N_2). Montrer que si $T \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ est compacte, elle est continue. Que dire de la réciproque ?
Patrick Lassère

● Soit $T \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ une application linéaire compacte. Si, par l'absurde, T n'est pas continue, alors il est bien connu que

$$\sup_{N_1(x)=1} N_2(T(x)) = +\infty,$$

si bien qu'il existe une suite $(x_n)_n$ dans E_1 vérifiant

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad N_1(x_n) = 1 \quad \text{et} \quad N_2(T(x_n)) \geqslant n.$$

La condition $N_2(T(x_n)) \geqslant n$ pour tout entier n assure que la suite $(T(x_n))_n$ n'admet aucune valeur d'adhérence dans (E_2, N_2) (car aucune des ses sous-suites n'est bornée ni, a fortiori, convergente) ce qui est contraire à l'hypothèse de compacité de T. Contradiction.

● La réciproque est fausse : On choisit $E_1 = E_2 = \mathbb{R}[X]$ normés par $N_1 = N_2 = N_\infty$ la norme Â« supÂ» (i.e. $N_\infty(P) = \max_{0 \leqslant k \leqslant d} |a_k|$ pour $P = a_d X^d + \cdots + a_0 \in \mathbb{R}[X]$). Alors la suite $(P_n)_n$, où $P_n = X^n$, vérifie

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad N_\infty(P_n) = 1.$$

Elle est donc bornée dans $(\mathbb{R}[X], N_\infty)$ et on a

$$\forall\, n \neq m \in \mathbb{N}, \quad N_\infty(P_n - P_m) = 1.$$

Ceci interdit à toute suite extraite de $(P_n)_n$ de converger. Par conséquent, l'application identité

$$T = \mathrm{Id} \ : \ (\mathbb{R}[X], N_\infty) \to (\mathbb{R}[X], N_\infty)$$

n'est pas compacte, bien que trivialement continue.

Retour à la table des matières

[≤]