

Retour à la table des matières

50 Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $C([0, 1], \mathbb{R})$ .

On pose  $I = \left\{ \frac{\|f\|_\infty}{\|f\|_2}, f \in F \setminus \{0\} \right\}$

a) Montrer que  $I$  est un sous-intervalle de  $[1, +\infty[$ .

b) On suppose  $I$  borné. Montrer que  $I$  est fermé. On pourra, étant donné une famille

orthonormée  $(f_1, \dots, f_n)$  de  $F$ , s'intéresser, pour  $t \in [0, 1]$ , à la fonction  $g_t = \sum_{i=1}^n f_i(t) f_i$ .

c) Donner un exemple d'espace  $F$  pour lequel  $I$  n'est pas fermé.

Patrice Lassère et Georges Marty

a) Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $C([0, 1], \mathbb{R})$  non réduit au vecteur nul et  $f \in F \setminus \{0\}$ . L'inégalité classique  $\|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$  assure déjà que  $I \subset [1, +\infty[$ .

• Si  $I$  est un singleton (on peut observer que c'est le cas lorsque  $F$  est de dimension 1 par homogénéité des normes) il n'y a rien à démontrer.

• Sinon, soient  $a < b$  dans  $I$ . Il existe  $f, g \in F \setminus \{0\}$  tels que

$$\frac{\|f\|_\infty}{\|f\|_2} = a < b = \frac{\|g\|_\infty}{\|g\|_2}.$$

Comme on l'a observé dans le premier point,  $a < b$  assure que  $f$  et  $g$  sont libres dans  $F$  et par conséquent

$$\|(1 - \lambda)f + \lambda g\|_2 > 0, \quad \forall \lambda \in [0, 1].$$

Donc l'application

$$\varphi : [0, 1] \ni \lambda \mapsto \varphi(\lambda) = \frac{\|(1 - \lambda)f + \lambda g\|_\infty}{\|(1 - \lambda)f + \lambda g\|_2} \in \mathbb{R}_+$$

est bien définie.  $\varphi$  est continue sur  $[0, 1]$  (quotient de deux fonctions continues). Par construction,  $\varphi(0) = a$ ,  $\varphi(1) = b$  donc par le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout  $c \in [a, b]$  il existe  $\lambda \in [0, 1]$  tel que  $\varphi(\lambda) = c$  soit

$$\frac{\|(1 - \lambda)f + \lambda g\|_\infty}{\|(1 - \lambda)f + \lambda g\|_2} = c.$$

Enfin, par convexité de  $F$  :  $f, g \in F$  nous assure que  $(1 - \lambda)f + \lambda g \in F$ , par conséquent  $c \in I$  qui est donc bien un intervalle.

b) On suppose  $I$  borné, posons  $c = \sup(I)$  on a

$$\|f\|_2 \leq \|f\|_\infty \leq c \cdot \|f\|_2, \quad \forall f \in F.$$

Autrement dit,  $I$  borné équivaut à dire que sur  $F$  les normes  $\|\cdot\|_\infty$  et  $\|\cdot\|_2$  sont équivalentes. En suivant l'indication proposée on va en déduire que  $F$  est de dimension finie. Il sera alors facile de conclure.

• Montrons que  $F$  est de dimension finie. Sinon on peut construire (par le procédé

d'orthonormalisation de Gram-Schmidt) une famille infinie  $(f_n)_n$  orthonormale dans  $(F, \|\cdot\|_2)$ . On définit alors pour tout entier  $N$  et  $t \in [0, 1]$  la fonction

$$h_N(x) = \sum_{k=0}^N f_k(t)f_k(x) \in F, \quad x \in [0, 1].$$

Par orthogonalité des vecteurs  $f_k$  :

$$\forall x \in [0, 1] : |h_N(x)| \leq \|h_N\|_\infty \leq c \cdot \|h_N\|_2 = c \cdot \left( \sum_{k=0}^N f_k^2(t) \right)^{1/2}.$$

En particulier  $t = x$  donne

$$\sum_{k=0}^N f_k^2(x) \leq c \cdot \left( \sum_{k=0}^N f_k^2(x) \right)^{1/2}$$

soit

$$\forall N \in \mathbb{N}, x \in [0, 1] : \sum_{k=0}^N f_k^2(x) \leq c^2.$$

On intègre alors cette inégalité sur  $[0, 1]$  :

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^N f_k^2(x) dx = \sum_{k=0}^N \|f_k\|_2^2 = N + 1 \leq c^2$$

et ceci pour tout entier  $N$  : c'est absurde ; par conséquent  $\dim(F) < +\infty$  (la réciproque est vraie : si  $F$  est de dimension finie alors toutes les normes sur  $F$  sont équivalentes donc  $I$  est borné).

• Montrons maintenant que  $I$  est fermé. Vu la première étape,  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $C([0, 1], \mathbb{R})$  de dimension finie. Par conséquent, sa sphère unité pour la norme  $\|\cdot\|_2$  :

$S_2 = \{f \in F : \|f\|_2 = 1\}$  est fermée bornée et donc compacte. Or, l'homogénéité des normes fait que  $I = \varphi(S_2)$  où  $\varphi$  est l'application de  $F \setminus \{0\}$  dans  $\mathbb{R}_+$  définie par  $\varphi(f) = \|f\|_\infty$ . L'application  $\varphi$  est continue sur  $F \setminus \{0\}$  donc l'image  $I = \varphi(S_2)$  du compact  $S_2$  par  $\varphi$  est un compact de  $\mathbb{R}$ , donc un fermé borné. Ainsi  $I$  est fermé.

c) Au vu de la solution de la question précédente, pour exhiber un exemple d'espace  $F$  pour lequel  $I$  n'est pas fermé, il nous faut chercher un sous-espace  $F$  de dimension infinie pour lequel  $\varphi$  n'atteint pas sa borne inférieure sur  $S_2$  (car, dès que  $I$  est majoré, les deux normes sont équivalentes et  $I$  est un segment).

Considérons

$$F = \left\{ f \in C([0, 1], \mathbb{R}) : \int_0^1 f(t) dt = 0 \right\}.$$

On va montrer que  $I = ]1, +\infty[$ . Pour cela, on remarque que :

•  $1 \notin I$ . En effet, sinon, il existerait une fonction  $f$  vérifiant :

$$\int_0^1 f(t) dt = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 f^2(t) dt = 1 = \sup_{x \in [0, 1]} |f(t)|$$

mais les deux dernières égalités entraînent  $f \equiv \pm 1$  ce qui contredit la première.

• Pour tout  $\varepsilon > 0$ , considérons la fonction  $g_\varepsilon$  continue et affine par morceaux qui sur l'intervalle  $[0, 1/2]$  relie les points  $(0, 1 + \varepsilon)$ ,  $(-\varepsilon^2 + 1/2, 1 + \varepsilon)$  et  $(1/2, 0)$  que l'on prolonge continument sur

$[1/2, 1]$  par une symétrie par rapport à la droite  $x = 1/2$ .

Alors la fonction  $f_\varepsilon$  définie sur  $[0, 1]$  par

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} -\sqrt{g_\varepsilon(x)}, & \text{si } x \in [0, 1/2], \\ +\sqrt{g_\varepsilon(x)}, & \text{si } x \in ]1/2, 1] \end{cases}$$

vérifie pour  $\varepsilon$  suffisamment proche de 0

$$\int_0^1 f_\varepsilon(t)dt = 0, \text{ donc } f_\varepsilon \in F,$$

et

$$\|f_\varepsilon\|_\infty = \sqrt{1 + \varepsilon}, \quad \|f_\varepsilon\|_2^2 = \int_0^1 g_\varepsilon(t)dt = 1 + \varepsilon - \varepsilon^2 - \varepsilon^3$$

si bien que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\|f_\varepsilon\|_\infty}{\|f_\varepsilon\|_2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \varepsilon}}{\sqrt{1 + \varepsilon - \varepsilon^2 - \varepsilon^3}} = 1.$$

- Donc  $1 \in \bar{I} \setminus I$  et  $I$  n'est pas fermé.

[Retour à la table des matières](#)

[<]