ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
LVIII.3 (1993)

Bases communes holomorphes: nouvelle extension du théorème de Whittaker

par Nguyen Thanh Van et Patrice Lassere (Toulouse)

Résumé. Soient D un ouvert de $\mathbb{C}$ et E un compact de D. Moyennant une hypothèse assez faible sur D et $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$ on montre que si $\alpha \in]0,1[$ vérifie $\partial D_\alpha \subset D \setminus E$, D_α étant l'ouvert de niveau $\{z \in D : \omega(E, D, z) < \alpha\}$, alors toute base commune de $\mathcal{O}(E)$ et $\mathcal{O}(D)$ est une base de $\mathcal{O}(D_\alpha)$.

0. Introduction. Soient D un ouvert de $\mathbb{C}$ et E un compact dans D. On désigne par $\mathcal{O}(D)$ et $\mathcal{O}(E)$ les espaces de fonctions holomorphes sur D et E respectivement, munis de leur topologies usuelles. $\omega(E, D, z)$ (ou plus simplement ω) sera la fonction sousharmonique extrémale $(0, 1)$ associée au couple (E, D) :

$$\omega(E, D, \cdot) = \operatorname{Reg}\sup[\sup\{u \in \mathcal{SH}(D) : u \le 1, u|_E \le 0\}]$$

(elle est harmonique sur $D \setminus E$). Les bases communes des espaces $\mathcal{O}(D)$ et $\mathcal{O}(E)$ ont été étudiées par de nombreux auteurs (cf. bibliographie), à commencer par les travaux de J. M. Whittaker exposés dans son livre de la collection Borel.

Théorème de Whittaker. *Soient D_0 et D_1 deux disques concentriques. Toute base commune de $\mathcal{O}(D_0)$ et $\mathcal{O}(D_1)$ est une base de $\mathcal{O}(D)$, pour tout disque concentrique intermédiaire D.*

A l'aide de l'important critère de Dynin et Mityagin, il est facile (voir [N], p. 209) de généraliser cet énoncé au cas où le couple (E, D) est régulier :

Si ∂D est régulier pour le problème de Dirichlet et si $\omega|_E \equiv 0$, alors toute base commune de $\mathcal{O}(D)$ et $\mathcal{O}(E)$ est une base de $\mathcal{O}(D_\alpha)$, où $D_\alpha = \{z \in D : \omega(E, D, z) < \alpha\}$, pour tout $\alpha \in]0, 1[$.

1991 *Mathematics Subject Classification*: 30B99, 30H50.
Key words and phrases: spaces of holomorphic functions, Schauder bases.

Nous démontrons ici une nouvelle extension du théorème de Whittaker, avec des hypothèses beaucoup plus générales sur le couple (E, D).

Définition. Un ouvert Ω de $\overline{\mathbb{C}}$ est dit de *type* $(\star)$ lorsque pour tout compact X de Ω et toute suite d'ouverts (Ω_k) vérifiant

$$X \subset \Omega_k \subset \Omega_{k+1}, \qquad \bigcup \Omega_k = \Omega\,,$$

on a

$$\lim_{k\to\infty} \omega(X, \Omega_k, z) = \omega(X, \Omega, z), \qquad \forall z \in \Omega\,.$$

Remarque 0. Il est facile de voir que Ω est de type $(\star)$ s'il vérifie $(\star\star)$: Pour tout compact $X \subset \Omega$ et tout ensemble polaire Y, on a l'égalité $\omega(X, \Omega, \cdot) = \omega(X \setminus Y, \Omega, \cdot)$. $(\star\star)$ est vérifiée lorsque Ω est un ouvert borné de $\mathbb{C}$, par conséquent elle l'est encore lorsque chaque composante connexe de Ω est analytiquement isomorphe à un domaine borné de $\mathbb{C}$.

Convention. Dans ce qui suit, D et $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$ seront supposés de type $(\star)$. Cette hypothèse implique que $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$ et E sont non polaires.

Théorème 1. *Si $\mathcal{O}(D)$ et $\mathcal{O}(E)$ possèdent une base commune (f_n) et si pour un certain $\alpha \in \,]0,1[$, la frontière de l'ouvert $D_\alpha = \{z \in D : \omega(E, D, z) < \alpha\}$ dans $\overline{\mathbb{C}}$ est incluse dans $D \setminus E$ alors (f_n) est une base de $\mathcal{O}(D_\alpha)$.*

A l'aide de ce résultat on prouve

Théorème 2. *On suppose que D est un domaine simplement connexe. Si $\mathcal{O}(D)$ et $\mathcal{O}(E)$ possèdent une base commune (f_n), alors $\omega(E, D, \cdot) \equiv 0$ sur E (et (f_n) est une base de $\mathcal{O}(D_\alpha)$ pour tout $\alpha \in \,]0,1[$).*

Ce théorème est à comparer avec un énoncé de Zakharyuta et Kadampatta (cf. [ZK] et remarque à la fin du paragraphe 2).

1. Démonstration du théorème 1

(1) Proposition. *Soient D et G des ouverts de type $(\star)$ de $\overline{\mathbb{C}}$, E et F des compacts non polaires dans D et G respectivement. Si $\{f_i(z,\xi)\}_{i\in I}$ est une famille de fonctions holomorphes sur $D \times G$ telle que*

$$\forall L \Subset G, \quad \sup_{i\in I} \|f_i\|_{E\times L} < \infty, \qquad \forall K \Subset D, \quad \sup_{i\in I} \|f_i\|_{K\times F} < \infty\,,$$

alors pour tout $\alpha \in \,]0,1[$, $\{f_i\}_{i\in I}$ est une partie bornée de $\mathcal{O}(D_\alpha \times G_{1-\alpha})$, où $D_\alpha = \{z \in D : \omega(E, D, z) < \alpha\}$ et $G_{1-\alpha} = \{\xi \in G : \omega(F, G, \xi) < 1-\alpha\}$. Autrement dit, $\{f_i\}_{i\in I}$ est une partie bornée de $\mathcal{O}(\Omega)$, avec $\Omega = \{(z,\xi) \in D \times G : \omega(E, D, z) + \omega(F, G, \xi) < 1\}$.

P r e u v e d e l a p r o p o s i t i o n. Soient (D_j), (G_j) des suites d'ouverts bornés réguliers de $\mathbb{C}$ tels que

$$E \subset D_j \Subset D, \quad F \subset G_j \Subset G, \quad D_j \nearrow D, \quad G_j \nearrow G\,.$$

Puisque D et G sont de type $(\star)$, la proposition est une conséquence immédiate de l'assertion suivante : Soient pour j fixé

$$\Omega_j = \{(z,\xi) \in D_j \times G_j : \omega(E, D_j, z) + \omega(F, G_j, \xi) < 1\}\,,$$
$$X_j = (E \times G_j) \cup (D_j \times F)\,.$$

Alors pour toute fonction f holomorphe sur un voisinage de $\overline{D}_j \times \overline{G}_j$ on a

$$\|f\|_{X_j} \geq \|f\|_{\Omega_j}\,.$$

En effet, si l'on pose, pour tout k suffisamment grand, $E_k = \{z : \operatorname{dist}(z, E) \leq 1/k\}$ et $F_k = \{\xi : \operatorname{dist}(\xi, F) \leq 1/k\}$, alors d'après un résultat de Siciak ([S], Lemme 6.1)

$$\Omega_{j,k} = \{(z,\xi) \in D_j \times G_j : \omega(E_k, D_j, z) + \omega(F_k, G_j, \xi) < 1\}$$

est l'enveloppe d'holomorphie de $X_{j,k}=(E_k \times G_j) \cup (D_j \times F_k)$. Par conséquent,

$$\|f\|_{X_{j,k}} \geq \|f\|_{\Omega_{j,k}};$$

l'assertion en découle en faisant tendre k vers ∞. ∎

R e m a r q u e. Notre première preuve de cette proposition est plus sophistiquée. Celle-ci nous a été communiquée par J. Siciak.

(2) Rappelons le théorème de dualité de Köthe–Grothendieck. Pour toute partie Ω de $\mathbb{C}$ le dual fort de $\mathcal{O}(\Omega)$ est isomorphe topologiquement à $\mathcal{O}_0(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega)$, espace des fonctions holomorphes sur $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ telles que $f(\infty) = 0$, de la manière suivante :

A toute forme linéaire continue $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{O}(\Omega)$ correspond un unique élément $\Phi_{\mathcal{L}}$ de $\mathcal{O}_0(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega)$ défini par

$$\Phi_{\mathcal{L}}(\xi) = \mathcal{L}\left(z \to \frac{1}{z - \xi}\right)$$

et pour toute fonction f de $\mathcal{O}(\Omega)$ on a

$$\mathcal{L}(f) \;= \langle \Phi_{\mathcal{L}}, f\rangle = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(\xi)\Phi_{\mathcal{L}}(\xi)\, d\xi$$

où γ est un cycle convenablement choisi. Soit maintenant (f_n) une base commune de $\mathcal{O}(D)$ et $\mathcal{O}(E)$. Désignons par (φ_n) la base duale de (f_n) dans la dualité $(\mathcal{O}(E), \mathcal{O}_0(\overline{\mathbb{C}} \setminus E))$; elle l'est aussi dans la dualité $(\mathcal{O}(D), \mathcal{O}_0(\overline{\mathbb{C}} \setminus D))$.

LEMME. *Soient $\mathcal{W}$ un ouvert* (*ou un compact*) *de $\mathbb{C}$ et (f_n, φ_n) un système biorthogonal dans $\mathcal{O}(\mathcal{W}) \times \mathcal{O}_0(\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{W})$. Alors (f_n) est une base de $\mathcal{O}(\mathcal{W})$ si et seulement si :*

(i) (f_n) *est totale dans* $\mathcal{O}(\mathcal{W})$.

(ii) $\{f_n(z)\varphi_n(\xi)\}$ *est une partie bornée de* $\mathcal{O}(\mathcal{W}\times(\overline{\mathbb{C}}\setminus\mathcal{W}))$.

C'est une conséquence immédiate de l'important critère de Dynin et Mityagin ([M], Th. 9).

(3) Maintenant on va utiliser la proposition avec D, E comme dans l'énoncé du théorème 1 et $G=\overline{\mathbb{C}}\setminus E$, $F=\overline{\mathbb{C}}\setminus D$. Il résulte de la proposition et du lemme précédent que $\{f_n(z)\varphi_n(\xi)\}$ est une partie bornée de $\mathcal{O}(\Omega)$, où $\Omega=\{(z,\xi)\in D\times G:\omega(E,D,z)+\omega(F,G,\xi)<1\}$.

Pour plus de clarté, ω (resp. $\widetilde{\omega}$) représentera dorénavant la fonction extrémale associée au couple (E,D) (resp. (F,G)).

Soit $\alpha\in]0,1[$ tel que $\partial D_\alpha\subset D\setminus E$; montrons que $D_\alpha\times(\overline{\mathbb{C}}\setminus D_\alpha)\subset\Omega$.

($\bullet$) Sur $D\setminus E$, $\omega+\widetilde{\omega}\equiv 1$.

En effet, il est facile de voir que la fonction $\omega+\widetilde{\omega}$, harmonique sur $D\setminus E$, admet 1 comme valeur frontière quasi-partout sur $\partial(D\setminus E)$. C'est donc la constante 1.

($\bullet\bullet$) Si $\partial D_\alpha\subset D\setminus E$, alors $\partial D_\alpha\subset\Gamma_\alpha:=\{z\in D:\omega(z)=\alpha\}$.

Soit $a\in\partial D_\alpha$; il est évident que $\omega(a)\ge\alpha$. Supposons $\omega(a)>\alpha$. Par continuité de ω sur $D\setminus E$ il existe alors un voisinage de a sur lequel $\omega(z)>\alpha$, c'est donc un voisinage de $a\in\overline{D}_\alpha$ qui ne rencontre pas D_α, ce qui est absurde et par conséquent $\omega(a)=\alpha$.

Fixons maintenant α tel que $\partial D_\alpha\subset D\setminus E$ et soit $(z,\xi)\in D_\alpha\times(\overline{\mathbb{C}}\setminus D_\alpha)$. On a par le principe du maximum

$$\widetilde{\omega}(\xi)\ \le\ \sup_{\xi\in\partial D_\alpha}\widetilde{\omega}(\xi)\,.$$

En raison de ($\bullet$) et ($\bullet\bullet$) le second membre est égal à $1-\alpha$. Donc $\omega(z)+\widetilde{\omega}(\xi)<\alpha+1-\alpha=1$, d'où la relation $D_\alpha\times(\overline{\mathbb{C}}\setminus D_\alpha)\subset\Omega$.

$\{f_n\varphi_n\}$ étant une partie bornée de $\mathcal{O}(\Omega)$, est donc une partie bornée de $\mathcal{O}(D_\alpha\times(\mathbb{C}\setminus D_\alpha))$. En outre, il est facile de voir que $\widehat{\mathcal{K}}_{\mathcal{SH}(D)}\Subset D_\alpha$ pour tout compact $\mathcal{K}$ de D_α ($\widehat{\mathcal{K}}_{\mathcal{SH}(D)}$ désignant l'enveloppe de $\mathcal{K}$ par rapport aux fonctions sousharmoniques sur D); D_α est donc $\mathcal{O}(D)$-convexe et forme une paire de Runge avec D, donc (f_n) est totale dans $\mathcal{O}(D_\alpha)$, ce qui achève la démonstration. ∎

COROLLAIRE (du théorème 1). *Si l'on suppose en plus que D soit à bord régulier pour le problème de Dirichlet, alors toute base commune (f_n) de $\mathcal{O}(D)$ et $\mathcal{O}(E)$ est une base de $\mathcal{O}(D_\alpha)$ et $\mathcal{O}(\overline{D}_\alpha)$, pour tout $\alpha\in]\alpha_0,1[$, avec $\alpha_0=\sup_E\omega$.*

Démonstration. Remarquons que $\alpha_0<1$ et $D_\alpha\Subset D$, $\forall\alpha<1$ (E compact non polaire dans D régulier). Soit $\alpha\in]\alpha_0,1[$.

(i) $\partial D_\alpha \subset D \setminus E$.

Supposons $\partial D_\alpha \not\subset D \setminus E$. Alors $\partial D_\alpha \cap \partial(D \setminus E) \neq \emptyset$; on a donc $\partial D_\alpha \cap E \neq \emptyset$, car $D_\alpha \Subset D$. Soit $a \in \partial D_\alpha \cap E$. On a $\omega(a) \leq \alpha_0 < \alpha$: impossible, car $\partial D_\alpha \cap D_\alpha = \emptyset$. D'où (i).

(ii) $\partial D_\alpha = \Gamma_\alpha := \{z \in D : \omega(z) = \alpha\}$.

D'après la preuve du théorème 1, (i) implique $\partial D_\alpha \subset \Gamma_\alpha$. Pour l'inclusion inverse, il suffit de prouver que tout point $a \in \Gamma_\alpha$ est adhérent à D_α. Soit Δ une boule arbitraire de centre a. Prouvons que $\Delta \cap D_\alpha \neq \emptyset$. On peut supposer $\Delta \subset D \setminus E$; si $\Delta \cap D_\alpha = \emptyset$, ω serait $\geq \alpha$ sur Δ et $\omega(a) = \alpha$, elle serait donc constante sur la composante connexe $\mathcal{C}$ de $D \setminus E$ contenant a. Puisque (E, D) est une paire de Runge, $\partial\mathcal{C} \cap \partial D$ est non vide. En un point $b \in \partial\mathcal{C} \cap \partial D$ on a

$$\lim_{\substack{\xi \to b \\ \xi \in D}} \omega(\xi) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{\xi \to b \\ \xi \in \mathcal{C}}} \omega(\xi) = \alpha < 1\,,$$

ce qui est absurde, d'où (ii).

(iii) (f_n) est bien une base de $\mathcal{O}(D_\alpha)$, d'après le théorème 1 et (i). Il est plus facile de voir, en raison de (ii), que la famille $\{D_\beta\}_{\beta > \alpha}$ forme une base de voisinages ouverts de $\overline{D}_\alpha$ dans D; (f_n) étant une base de $\mathcal{O}(D_\beta)$ pour tout $\beta \in \,]\alpha, 1[$, est encore une base de $\mathcal{O}(\overline{D}_\alpha) = \lim\operatorname{ind}_{\beta \to \alpha,\, \beta > \alpha} \mathcal{O}(D_\beta)$. ■

2. Démonstration du théorème 2. En raison de la convention faite dans l'introduction, D est un domaine simplement connexe $\neq \mathbb{C}$ et E est un compact non polaire dans D. Supposons que $\omega \not\equiv 0$ sur E; alors $\lambda := \alpha_0 = \sup_E \omega \in \,]0, 1[$. Soit a un point frontière de E tel que $\omega(a) = \lambda$. E est régulier en au moins un point b de sa frontière; puisque $\lambda > \omega(b) = 0$, on peut trouver un disque ouvert $\mathcal{U}$ centré en b suffisamment petit pour que

$$\omega(z) < \lambda, \qquad \forall z \in \mathcal{U}\,.$$

Soit $f \in \mathcal{O}(E)$; il existe donc un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de E sur lequel f est holomorphe, et puisque (f_n) est une base de $\mathcal{O}(E)$ et donc une base absolue (cf. Mityagin [M]), on peut trouver une suite de scalaires (b_n) telle que la série $\sum b_n f_n$ converge normalement sur un voisinage ouvert $\mathcal{W}$ de E ($\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$) et a pour somme f sur $\mathcal{W}$. On peut donc choisir $\mu \in \,]\lambda, 1[$ suffisamment proche de λ pour que $(D \setminus \overline{D}_\mu) \cap \mathcal{W}$ soit non vide. D'après le corollaire du théorème 1, (f_n) est une base commune aux espaces $\mathcal{O}(\overline{D}_\mu)$ et $\mathcal{O}(D)$. Comme nous l'avons remarqué dans la démonstration du corollaire, $\Gamma_\mu = \partial D_\mu$; la frontière de $\overline{D}_\mu$ est donc analytique réelle, et le couple $(\overline{D}_\mu, D)$ est régulier. De plus, $\overline{D}_\mu$ est polynomialement convexe car la paire $(\overline{D}_\mu, D)$ est de Runge et D est un domaine simplement connexe : $D \setminus \overline{D}_\mu$ est donc connexe. Nous sommes donc en mesure d'appliquer les résultats de Dragilev et Nguyen Thanh Van ([N], pp. 227–229).

($\mathcal{A}$) *Si l'on pose* $\varrho = \exp(1/\Phi)$ *où* Φ *est le flux de la fonction* $h = \omega(\overline{D}_\mu, D, \cdot)$ *à travers tout contour séparant* $\overline{D}_\mu$ *et* $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$, *alors il existe une suite* (λ_n) *de nombres* > 0 *et une bijection* π *de* $\mathbb{N}$ *sur* $\mathbb{N}$ *telle que la suite* $g_n = \lambda_n f_{\pi(n)}$ *possède les propriétés suivantes* :

(i) $\lim_{n\to\infty} \|g_n\|_{\widetilde{D}_\alpha}^{1/n} = \varrho^\alpha$, *avec* $\widetilde{D}_\alpha := \{z \in D : h(z) < \alpha\}$,

(ii) $\lim_{n\to\infty} \|g_n\|_{\Delta}^{1/n} = \varrho^{\alpha(\Delta)}$, *pour tout disque* $\Delta \Subset D \setminus \overline{D}_\mu$, *avec*

$$\alpha(\Delta) := \sup_{\Delta} h\,.$$

Revenons maintenant à notre série $\sum b_n f_n$. Puisqu'elle converge normalement sur un voisinage ouvert $\mathcal{W}$ de E et a pour somme f, il en est de même pour la série $\sum a_n g_n$ avec $a_n = b_{\pi(n)/\lambda_n}$. Choisissons un disque $\Delta \Subset (D \setminus D_\mu) \cap \mathcal{W}$. On a

$$|a_n| \cdot \|g_n\|_\Delta \le M, \qquad \forall n \in \mathbb{N}\ (M = C^{te})\,,$$

donc d'après (ii),

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\|g_n\|_\Delta^{1/n}} = \varrho^{-\alpha(\Delta)}\,.$$

Choisissons alors β dans $]0, \alpha(\Delta)[$. L'inégalité précédente et (i) entraînent la normale convergence de la série $\sum a_n g_n$ sur $\widetilde{D}_\beta$ qui contient $\mathcal{U}$ (rappelons que $\sup_{\mathcal{U}} \omega < \lambda$; ceci entraîne $\mathcal{U} \subset D_\mu$ et d'autre part $\widetilde{D}_\beta$ est un voisinage de $\overline{D}_\mu$). Ainsi $\sum a_n g_n$ est normalement convergente sur $\mathcal{U}$, f est donc analytiquement prolongeable à $\mathcal{U}$.

On a donc démontré que toute fonction de $\mathcal{O}(E)$ est analytiquement prolongeable à $\mathcal{U}$, ce qui est impossible. ∎

Remarques. (i) Notre démonstration s'appuie sur le corollaire du théorème 1 et la démarche du chapitre 4 de [N], inspirée elle-même par un travail de Dragilev [D]. L'énoncé ($\mathcal{A}$) est le cas particulier du

Théorème. *Soient* Ω *un domaine de* $\mathbb{C}$, $\mathcal{X}$ *un compact dans* Ω *tel que le couple* $(\mathcal{X}, \Omega)$ *soit régulier et que* $\Omega \setminus \mathcal{X}$ *soit connexe. Soit* Φ *le flux de* $\omega(\mathcal{X}, \Omega, \cdot)$ *à travers tout contour séparant* $\mathcal{X}$ *et* $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$. *Alors si* $\mathcal{O}(\mathcal{X})$ *et* $\mathcal{O}(\Omega)$ *possèdent une base commune* (f_n), *il existe une suite* (λ_n) *de nombres* > 0 *et une bijection* π *de* $\mathbb{N}$ *sur lui-même telle que la suite de terme général* $g_n = \lambda_n f_{\pi(n)}$ *vérifie, pour tout disque* $\Delta \Subset \Omega \setminus \mathcal{X}$,

$$\lim_{n\to\infty} \|g_n\|_\Delta^{1/n} = R^{\alpha(\Delta)}\,,$$

avec $R = \exp(1/\Phi)$ *et* $\alpha(\Delta) := \sup_\Delta \omega(\mathcal{X}, \Omega, \cdot)$ (pour la démonstration cf. [N], pp. 227–229).

En conséquence on voit que le théorème 2 reste valable sous une hypothèse moins restrictive : Au lieu de supposer D domaine simplement connexe $\neq \mathbb{C}$, on peut supposer :

• D domaine régulier,

• il existe $\mu_0 \in]\lambda, 1]$ tel que $D_{\mu_0} \setminus \overline{D}_\mu$ soit connexe pour des valeurs de $\mu > \lambda$ aussi proches de λ que l'on veut ($\lambda := \sup_E \omega(E, D, \cdot)$).

(ii) Le théorème 2 n'est apparemment pas nouveau. On trouve dans l'article de Zakharyuta et Kadampatta [ZK] l'énoncé suivant plus général :

[ZK] *Soient D un ouvert régulier de $\mathbb{C}$ et E un compact de D. Si $\mathcal{O}(E)$ et $\mathcal{O}(D)$ possèdent une base commune et, si pour une composante connexe $\varDelta$ de D, $\widetilde{E} = \varDelta \cap E$ est non polaire, alors $\omega(E, D, \cdot) \equiv 0$ sur $\widetilde{E}$.*

En raison de coupures draconniennes (pour raccourcir), ce travail est très difficile à lire. Il est basé sur l'assertion suivante : Si (f_n) est une base commune de $\mathcal{O}(E)$ et $\mathcal{O}(D)$, alors il existe des espaces Hilbertiens $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_1$ tels que :

(a) $\mathcal{OC}(\overline{\mathbb{C}} \setminus D) \to \mathcal{H}_1 \to \mathcal{O}(D) \to \mathcal{O}(E) \to \mathcal{H}_0 \to \mathcal{OC}(E)$ (la flèche $\to$ signifie injection linéaire continue, la dernière n'est pas nécessairement injective),

(b) (f_n) est une base orthogonale de $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_1$.

D'après V. P. Zakharyuta (communication orale), cette assertion peut être prouvée par des considérations de nucléarité. (a) résulte de ([M], Prop. 3a), cependant (b) nous paraît être un résultat fort qui mériterait une preuve.

Au cours de la démonstration de l'énoncé [ZK] ci-dessus, les auteurs semblent supposer que pour un certain $\beta > 0$, valeur prise par ω en un point irrégulier de E, $\varDelta \setminus \overline{\varDelta}_\beta$ est connexe, où

$$\varDelta_\beta = \text{Intérieur de } [\widetilde{E} \cup \{z \in \varDelta : \omega(E, D, \cdot) < \beta\}] .$$

Bibliographie

Outre les références citées dans le texte, on signale le travail de pionnier de V. D. Erokhin ([E1], développé dans [E2]) et celui de T. Bagby où figure implicitement la première démonstration de l'existence d'une base commune pour $\mathcal{O}(D)$ et $\mathcal{O}(E)$ lorsque (E, D) est une paire de Runge régulière.

[B] T. Bagby, *Interpolation by rational functions*, Duke Math. J. 36 (1969), 95–104.

[D] M. M. Dragilev, *Extendable bases of analytic functions*, Amer. Math. Soc. Transl. (2) 43 (1964), 267–280.

[E1] V. D. Erokhin, *Sur les transformations conformes de couronnes et la base fondamentale de l'espace des fonctions analytiques sur un voisinage élémentaire d'un continuum arbitraire*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 120 (1958), 689–692.

[E2] —, *Best linear approximation of functions analytically continuable from a continuum to a given region*, Russian Math. Surveys 23 (1968), 96–122.

[M] B. S. Mityagin, *Approximative dimension and bases in nuclear Fréchet spaces*, Russian Math. Surveys 16 (1961), 59–127.

[N] Nguyen Thanh Van, *Bases de Schauder dans certains espaces de fonctions holomorphes*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 22 (2) (1972), 169–253.

[NS] Nguyen Thanh Van and J. Siciak, *Fonctions plurisousharmoniques extrémales et systèmes doublement orthogonaux de fonctions analytiques*, Bull. Sci. Math. 115 (1991), 235–244.

[NZ] Nguyen Thanh Van and A. Zeriahi, *Une extension du Théorème de Hartogs sur les fonctions séparément analytiques*, dans : Analyse Complexe Multivariable, récents développements, A. Meril (éd.), Editel s.n.c, Rende, 1991, 185–194.

[S] J. Siciak, *Separately analytic functions and envelopes of holomorphy of some lower-dimensional subsets of* $\mathbb{C}^n$, Ann. Polon. Math. 22 (1969), 145–171.

[W] J. M. Whittaker, *Leçons sur les séries de base de polynomes quelconques*, Collection Borel 39, Gauthier-Villars, Paris, 1949.

[Z] V. P. Zakharyuta, *Continuable bases in spaces of analytic functions of one and several complex variables*, Siberian Math. J. 8 (1967), 204–216.

[ZK] V. P. Zakharyuta and S. N. Kadampatta, *Existence of continuable bases in spaces of functions analytic in compacta*, Math. Notes 27 (1980), 334–340.

LABORATOIRE D'ANALYSE
U.F.R. MIG
UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
118, ROUTE DE NARBONNE
31062 TOULOUSE CEDEX, FRANCE
E-mail: LASSERE@CIX.CICT.FR

Reçu par la Rédaction le 3.3.1993