Questions & réponses

Réponses

R544. Toute matrice carrée réelle est-elle le produit de deux matrices symétriques réelles ? (J.-B. Hiriart-Urruty)

Solution de P. Lassère.

La solution repose sur la propriété suivante que l'on va ensuite étendre à tout $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: « soit A une matrice carrée réelle cyclique (i.e. semblable à une matrice compagnon). Il existe une matrice symétrique réelle inversible S telle que $A = S\,{}^tAS^{-1}$. »

En effet, soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ddots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$ et $S = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \iddots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ a_{n-1} & 1 & \iddots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Alors $AS = \begin{pmatrix} -a_0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ 0 & a_3 & & \iddots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ \vdots & a_{n-1} & 1 & \iddots & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice symétrique et par conséquent $AS = {}^t(AS) = S\,{}^tA$, donc $A = S\,{}^tAS^{-1}$.

Il en résulte immédiatement que toute matrice de Frobenius (i.e. une matrice constituée de blocs diagonaux cycliques) F admet une matrice de passage à sa transposée S symétrique réelle ($F = S\,{}^tFS^{-1}$).

Vérifions maintenant que cette propriété se généralise à toutes les matrices.

Comme toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est semblable à une matrice de Frobenius (c'est le théorème de décomposition de Frobenius analogue cyclique du théorème de décomposition de Jordan), il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$, $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$ et F matrice de Frobenius, telles que $A = PFP^{-1}$ et $F = S\,{}^tFS^{-1}$.

Ainsi

$$\begin{aligned} A &= P\left(S\,{}^tFS^{-1}\right)P^{-1} = (PS)\left({}^tP\,{}^tP^{-1}\right){}^tF\left({}^tP\,{}^tP^{-1}\right)\left(S^{-1}P^{-1}\right) \\ &= (PS\,{}^tP)\left({}^tP^{-1}\,{}^tF\,{}^tP\right)\left({}^tP^{-1}S^{-1}P^{-1}\right) = (PS\,{}^tP)\,{}^tA\left({}^tP^{-1}S^{-1}P^{-1}\right) \\ &= (PS\,{}^tP)\,{}^tA(PS\,{}^tP)^{-1} = S_1\,{}^tAS_1^{-1}, \end{aligned}$$

où $S_1 = PS\,{}^tP$.

La matrice de passage S_1 est clairement symétrique ; nous avons donc démontré que pour toute matrice carrée réelle A, il existe une matrice de passage symétrique S telle que $A = S\,{}^tAS^{-1}$.
Mais alors, on peut écrire $A = SS'$ où $S' = {}^tAS^{-1}$, et comme ${}^tS' = {}^t\big({}^tAS^{-1}\big) = {}^tS^{-1}A = S^{-1}A = S'$, S' est symérique et le tour est joué puisque $A = SS'$.

Remarque. On peut consulter « The factorisation of a square matrix into two symmetric matrices » Amer.Math.Monthly 1986-6, page 462/64 pour une approche via la décomposition de Jordan. On y apprend aussi que ce résultat est dû à Frobenius.