Quadrature n° 133 (2024) 1-8

Des Fonctions très Spéciales : Thomae & Volterra versus Baire

par Jean-Baptiste HIRIART-URRUTY* et Patrice LASSÈRE

I Introduction

On se propose d'étudier quelques exemples fonctions « pathologiques » autour de la continuité ; des exemples parfois bien utiles pour illustrer un exposé d'oral sans être trop techniquement compliqués.

Lors du premier contact avec la notion de continuité, on dit souvent pour une fonction continue sur un intervalle « qu'on peut parcourir son graphe avec le crayon sans le lever... », c'est une bonne description, (encore que le chemin pourrait être long vu qu'il existe des fonctions continues sur un segment à longueur de graphe infini...)

Le point qui nous occupe aujourd'hui est le domaine de continuité $\mathscr{C}_f$ d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et plus précisément quelle peut être sa forme ? peut-on choisir n'importe quelle partie de $\mathbb{R}$?

• Commençons par l'ensemble vide : si on cherche une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ partout discontinue, l'exemple canonique est la fonction de Dirichlet :

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Par contre, voici une observation amusante :

« Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, il existe au moins un réel x et une suite $(x_n)_n$ dans $\mathbb{R} \setminus \{x\}$ convergente de limite x et telle que $\lim_n f(x_n) = f(x)$. *»*

Autrement dit : on ne peut pas demander à une fonction discontinue sur un intervalle I d'être discontinue au point que pour tout $x \in I$ et toute suite $(x_n)_n$ convergente et de limite x la suite $(f(x_n))_n$ ne converge pas vers $f(x)$.

Voici l'idée de la preuve : associons à toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son graphe $\mathscr{A}_f = \{(x, f(x)),\ x \in \mathbb{R}\}$. $\mathscr{A}_f$ est une partie non dénombrable de $\mathbb{R}^2$ et par conséquent admet au moins un point d'accumulation $(a, f(a))$ dans $\mathbb{R}^2$: il existe donc une suite $(x_n)_n$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\lim_n (x_n, f(x_n)) = (a, f(a))$ soit : $\lim_n x_n = a$ et $\lim_n f(x_n) = f(a)$. En remplaçant $\mathbb{R}$ par un intervalle I on en déduit que cette propriété est même vraie sur un ensemble dense dans $\mathbb{R}$.

On en déduit aussi que pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, il existe une partie dense $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$ telle que la restriction $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ soit continue sur $\mathscr{D}$.

• Pour la continuité en un unique point : existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\mathscr{C}_f = \{0\}$ (ou $\mathscr{C}_f = \{a\}$, $a \in \mathbb{R}$ en remplaçant $f(x)$ par $f(x+a)$) ? En voici deux :

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

La fonction h est intéressante à plus d'un titre car elle est continue et dérivable uniquement en $x = 0$, nulle part deux fois dérivable mais toutefois h admet en $x = 0$ un développement limité à tout ordre [1].

• Avec l'exemple précédent, on en déduit facilement l'existence de fonctions continues en seulement un nombre fini de points i.e. $\mathscr{C}_f = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

La question naturelle qui suit est : « et si $\mathscr{C}_f$ est infini ? » par exemple $\mathscr{C}_f = \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$? (nous laissons au lecteur le soin de trouver une fonction f convenable pour laquelle $\mathscr{C}_f$ soit un intervalle donné). Les cas $\mathscr{C}_f = \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont précisément l'objet des prochains paragraphes.

* Département de Mathématiques, Université Paul Sabatier de Toulouse, 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex 09.

1. En effet $h(x) = o(x^n)$ pour tout entier n, admet donc en $x = 0$ un développement limité à l'ordre n dont la partie principale est donc le polynôme nul. A ce propos il faut se souvenir que si une fonction est n fois dérivable à l'origine, alors elle admet un développement limité à l'ordre n (c'est Taylor-Young) mais la réciproque est fausse dès que $n \geq 2$.

II La Fonction de Thomae : $\mathscr{C}_f = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Figure 1. Carl Johannes Thomae (1840-1921)

C'est en 1881 que le mathématicien allemand Carl Johannes Thomae (1840-1921) propose l'exemple d'une fonction $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mais discontinue sur $\mathbb{Q}$:

$$T(x) = \begin{cases} 1/q, \text{ si } x = \frac{p}{q}, \text{ avec } p \wedge q = 1 \\ \qquad (\text{i.e. } p \text{ et } q \text{ premiers entre eux}), \\ 1, \text{ si } x = 0, \\ 0, \text{ si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Et voici le programme Python rédigé par notre collègue Hervé Carrieu (Aix-en-Provence) pour réaliser la figure 2.

```
import math as m
import matplotlib.pyplot as plt
def fct_thomae(q):
X=[p/q for p in range(1,q+1)]
Y=[1/(q/m.gcd(p,q)) for p in
range(1,q+1)]
plt.plot(X,Y,'bo',markersize=1)
plt.axis([0,1,0,0.5])
plt.show()
```

La fonction de Thomae est aussi connue comme la « fonction popcorn », ce qui est clairement justifié vu l'esquisse de son graphe ci dessous.

La fonction de Thomae répond à notre question mais possède aussi d'autres propriétés singulières résumées ci-dessous :

Théorème 1. *L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de Thomae est définie par :*

$$T(x) = \begin{cases} 1/q, \textit{ si } x = \frac{p}{q}, \textit{ avec } p \wedge q = 1 \\ \qquad (\textit{i.e. } p \textit{ et } q \textit{ premiers entre eux}), \\ 1, \textit{ si } x = 0, \\ 0, \textit{ si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Alors

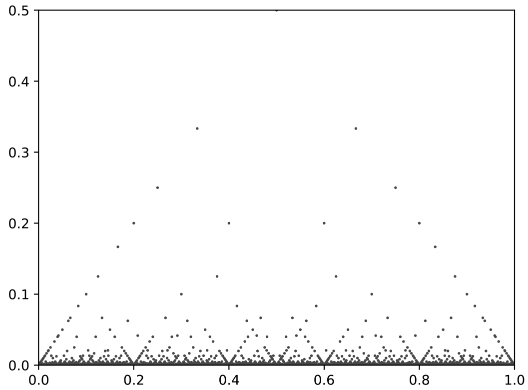


Figure 2. La fonction de Thomae ou « popcorn » sur l'intervalle $[0,1]$.

1. *T est 1-périodique.*
2. *T est discontinue sur $\mathbb{Q}$.*
3. *T est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.*
4. *T est nulle part dérivable.*
5. *Pour tout réel x : $\lim_{x \neq y \to x} T(y) = 0$; en particulier, T est semi-continue supérieurement sur $\mathbb{R}$.*
6. *T présente en tout $x \in \mathbb{Q}$ un maximum local strict et en tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ un minimum global (non strict).*

Démonstration.

1. Si x est irrationnel il en est de même pour $x+1$ donc $T(x) = T(x+1) = 0$. Si $x = p/q$ avec $p \wedge q = 1$ alors $x+1 = (p+q)/q$ et comme $(p+q) \wedge q = p \wedge q = 1$ on aura encore $T(x+1) = T(x)$. Enfin $T(n) = 1 = T(0)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. f est donc bien périodique de période 1.
2. Si $x \in \mathbb{Q}^\star$, $x = p/q$ avec $p \wedge q = 1$ alors $T(x) = 1/q > 0$; mais par densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ il existe aussi une suite $(x_n)_n$ de nombre irrationnels qui converge vers x (par exemple $x_n = 10^{-n}\mathrm{E}(10^n x) + \sqrt{2}/n$) : par définition de T, la suite $(T(x_n))_n$ est identiquement nulle et ne peut donc converger vers $T(x) > 0$. Le même argument marche pour $x = 0$ puisque $T(x) = 1 > 0$. T est bien discontinue sur $\mathbb{Q}$.
3. Pour la continuité sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on peut se contenter de travailler sur $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$ vu (1).

   On propose trois démonstrations chacune reposant sur l'une des trois caractérisations de la continuité (epsilonesque, par les suites et enfin les images réciproques d'ouverts) :

   • **Avec les suites :** Soit $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$, par la caractérisation séquentielle de la continuité il faut montrer que pour toute suite de réels $(x_n)_n$ de limite x, la suite $(T(x_n))_n$ converge vers $T(x) = 0$. Mais T est identiquement nulle sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, il est donc suffisant de supposer que la suite $(x_n)_n$ est constituée de rationnels, disons $x_n = p_n/q_n$ (avec $p_n \wedge q_n = 1$). Alors

$$\lim_{n\to+\infty} T(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{q_n} = 0 = T(x).$$

• **Preuve « epsilonesque » :** Soit $x \in [0,1]\setminus\mathbb{Q}$, pour $\varepsilon > 0$ posons $S_\varepsilon := \{p/q \in [x-1,x+1]\cap[0,1] : q \in \{1,2,\dots,E(\varepsilon^{-1})\}\}$. Cet ensemble est fini, il existe donc un voisinage $]x-\delta,x+\delta[$ de x tel que $]x-\delta,x+\delta[\cap S_\varepsilon = \emptyset$. Montrons que $|x-y| < \delta$ implique $|T(x)-T(y)| < \varepsilon$: si $y \in]x-\delta,x+\delta[\setminus\mathbb{Q}$ alors $|T(x)-T(y)| = 0 < \varepsilon$; si $y = p/q,\ p\wedge q = 1$ alors comme $y \notin \{1,2,\dots,E(\varepsilon^{-1})\}$ nécessairement $q > E(\varepsilon^{-1}) > \varepsilon^{-1}$ soit $|T(x)-T(y)| = 1/q < \varepsilon$.

• **Avec les voisinages :** T sera continue au point $x \in [0,1]\setminus\mathbb{Q}$ si et seulement si l'image réciproque de tout voisinage de $T(x)$ contient un voisinage de x (ce n'est rien d'autre que la traduction en terme de voisinages de la définition epsilonesque et idem pour la preuve). Comme on l'a observé dans l'argument epsilonesque l'ensemble des rationnels $r = p/q$ avec $q < 1/\varepsilon$ (et $p\wedge q = 1$) est fini, par conséquent il existe $\delta > 0$ tel que $|y-x| \le \delta$ implique $|T(y)-T(x)| \le \varepsilon$ soit $T^{-1}([T(x)-\varepsilon, T(x)+\varepsilon]) \ni [x-\delta, x+\delta]$.

4. Il reste à montrer que T n'est nulle part dérivable : T n'étant déjà pas continue sur $\mathbb{Q}$, seule la dérivabilité en les points irrationnels est douteuse. Soit donc $x \in [0,1]\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$, comme $\alpha_n := x + n^{-1} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ on aura $\frac{T(\alpha_n)-T(x)}{\alpha_n - x} = 0$ quel que soit $n \in \mathbb{N}^\star$, par conséquent si T est dérivable au point x la seule alternative est que $T'(x) = 0$.

   Mais pour tout entier $n \ge 1$ il existe $x_n \in \mathbb{Z}$ vérifiant $|\frac{x_n}{n} - x| \le \frac{1}{n}$ (il en existe forcément au moins un). Alors par définition de T on a $T\left(\frac{x_n}{n}\right) \ge \frac{1}{n}$ et par suite

$$\left|\frac{T\left(\frac{x_n}{n}\right) - T(x)}{\frac{x_n}{n} - x}\right| = \frac{T\left(\frac{x_n}{n}\right)}{\left|\frac{x_n}{n} - x\right|} \ge 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^\star,$$

   rendant $T'(x) = 0$ impossible. T n'est bien nulle part dérivable.

5. • Si x est irrationnel c'est évident vu que T est continue au point x avec $T(0) = 0$ (c'est (3)).

   • Si x est rationnel, disons $x = p/q$ avec $p\wedge q = 1$, alors $T(x) = 1/q > 0$. En reprenant la preuve « epsilonesque » de (3) on a en fait démontré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $0 < |y-x| < \delta$ implique

$$|T(y)| = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad y \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, \\ 1/n < \varepsilon, & \text{si} \quad y = m/n \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

   (car dans tout voisinage de x, il n'existe qu'un nombre fini de rationnels m/n avec $1 \le n \le 1/\varepsilon$). Ainsi pour tout réel x :

$$\lim_{y<x,\ y\to x} T(y) = 0 = \lim_{y>x,\ y\to x} T(y).$$

6. Tout nombre irrationnel est un minimum global pour T et pour $a \in \mathbb{Q}$, $T(a) > 0$ mais, vu (5), il existe $\delta > 0$ tel que $0 \le T(x) < T(a)/2$ pour tout $x \in [x-\delta, x+\delta]\setminus\{a\}$: a est bien un maximum local. CQFD. □

Remarques.

• *On a donc pour tout réel a*

$$\lim_{\substack{t\to a \\ t\neq a}} T(x) = \begin{cases} 0 = T(a), & \text{si} \quad a \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, \\ 0 \neq T(a) > 0, & \text{si} \quad a \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

• *La dernière propriété est à rapprocher de l'exercice assez classique (voir par exemple [7], exercice 4.32 page 259 ou [1]) : « une fonction continue présentant en tout point un extremum local est constante »*

• *Dans [12], Zoltán Kánnai modifie légèrement f pour un exemple injectif avec même $T(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ (attention : $\widetilde{T}(x) := x + T(x)$ semble être un bon candidat mais elle n'est pas injective : $\widetilde{T}(1/4) = \widetilde{T}(3/8)$!).*

• *Dans le même esprit la fonction $h(x) = x + \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$ donne l'exemple d'une bijection $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ partout discontinue.*

La fonction de Thomae est bien connue et figure dans nombreux ouvrages. Moins connue est l'application qu'en fait Volterra ci-dessous pour montrer qu'il n'existe pas de fonction $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\mathscr{C}_V = \mathbb{Q}$, objet du prochain paragraphe.

III Le Théorème de Volterra : $\mathscr{C}_f \neq \mathbb{Q}$

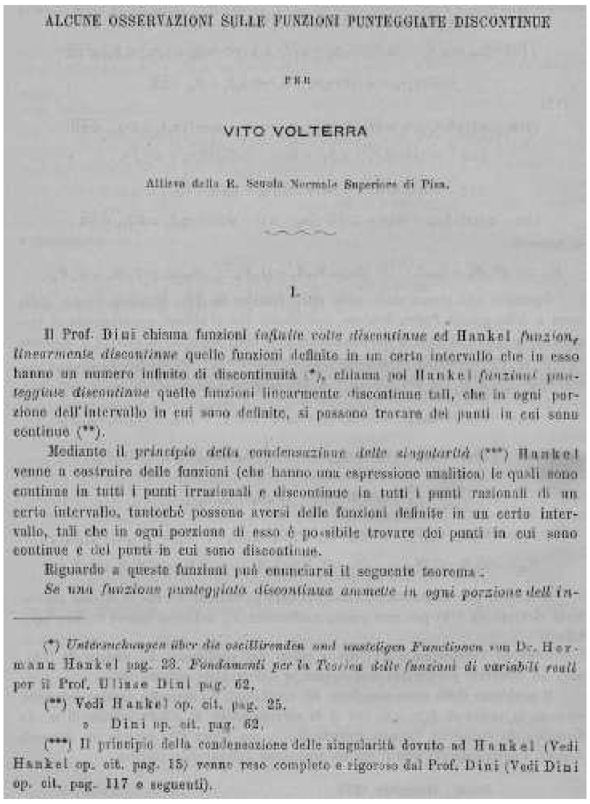
La question naturelle qu'on doit alors se poser est : existe-t-il aussi une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ discontinue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ mais continue sur $\mathbb{Q}$?

La réponse est cette fois négative et (surprise !) la fonction de Thomae est la clef de la solution due au mathématicien italien Vito Volterra [2] (1860-1940).

Théorème 2 (V. Volterra, 1881). *Il n'existe pas de fonction $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui soit discontinue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ mais continue sur $\mathbb{Q}$ (autrement dit, l'équation $\mathscr{C}_V = \mathbb{Q}$ n'admet pas de solution V).*

2. Sources des images : Wikipedia et https://www.deutsche-digitale-bibliothek.de/item/TSZGU2VLU7DQ6AAGMT3VTIAPURWGEDJ4

Figure 3. Vito Volterra (1860-1940).



ALCUNE OSSERVAZIONI SULLE FUNZIONI PUNTEGGIATE DISCONTINUE

PER

VITO VOLTERRA

Allievo della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

I.

Il Prof. Dini chiama funzioni *infinite volte discontinue* ed Hankel *funzioni linearmente discontinue* quelle funzioni definite in un certo intervallo che in esso hanno un numero infinito di discontinuità (*), chiama poi Hankel *funzioni punteggiate discontinue* quelle funzioni linearmente discontinue tali, che in ogni porzione dell'intervallo in cui sono definite, si possono trovare dei punti in cui sono continue (**).

Mediante il *principio della condensazione delle singolarità* (***) Hankel venne a costruire delle funzioni (che hanno una espressione analitica) le quali sono continue in tutti i punti irrazionali e discontinue in tutti i punti razionali di un certo intervallo, tantochè possono aversi delle funzioni definite in un certo intervallo, tali che in ogni porzione di esso è possibile trovare dei punti in cui sono continue e dei punti in cui sono discontinue.

Riguardo a queste funzioni può enunciarsi il seguente teorema:

Se una funzione punteggiata discontinua ammette in ogni porzione dell'in-

(*) *Untersuchungen über die oscillirenden und unstetigen Functionen* von Dr. Hermann Hankel pag. 23. *Fondamenti per la Teorica delle funzioni di variabili reali* per il Prof. Ulisse Dini pag. 62.

(**) Vedi Hankel op. cit. pag. 25.
» Dini op. cit. pag. 62.

(***) Il principio della condensazione delle singularità dovuto ad Hankel (Vedi Hankel op. cit. pag. 15) venne reso completo e rigoroso dal Prof. Dini (Vedi Dini op. cit. pag. 117 e seguenti).

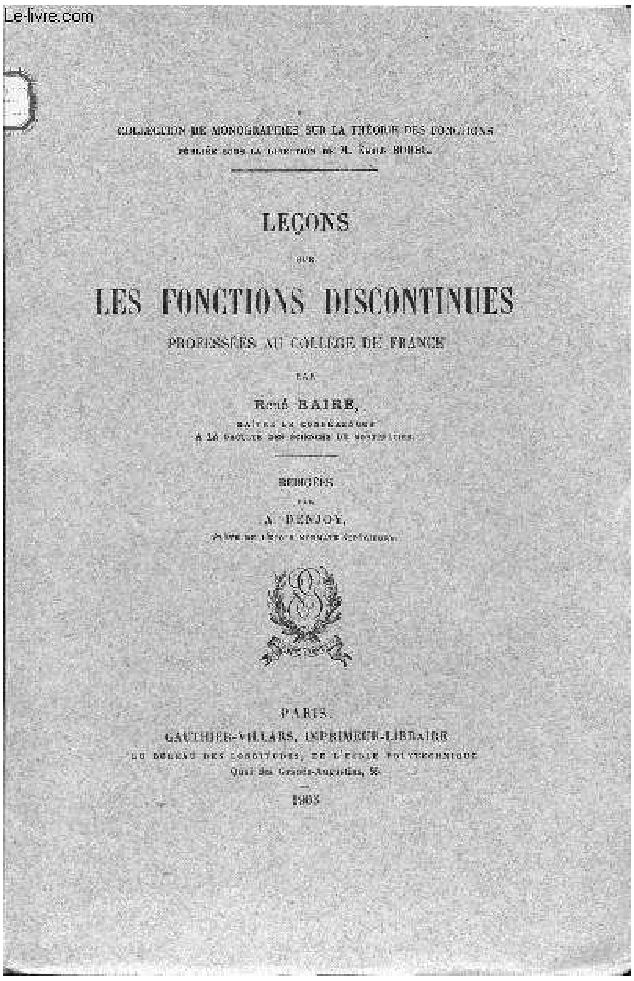
Figure 4. La note de Volterra [16] qui nous intéresse.

Remarque. *Il existe bien entendu un argument reposant sur le théorème de Baire qui interdit l'existence d'une telle fonction (on y reviendra en guise d'appendice). L'élégance de la preuve de Volterra est justement son caractère élémentaire : elle repose uniquement sur la définition de la continuité et le théorème des segments emboités via la fonction de Thomae (elle est outre antérieure au résultat de Baire).*

Il faut toutefois raison garder, l'argument de Volterra n'explique pas pourquoi une telle fonction ne peut exister alors que la théorie de Baire explique tout ; on consultera avec grand profit l'opus de Gilles Godefroy « Introduction aux méthodes de Baire » [9] qui sur 700 pages nous présente ses innombrables applications.

Il n'est pas surprenant de trouver le couple Baire-Volterra dans cette histoire : lorsque Volterra publie

Figure 5. René Baire (1874-1932).



COLLECTION DE MONOGRAPHIES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS

LEÇONS

SUR

LES FONCTIONS DISCONTINUES

PROFESSÉES AU COLLÈGE DE FRANCE

PAR

René BAIRE,

RÉDIGÉES

PAR

A. DENJOY,

PARIS.

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

Figure 6. La thèse de Baire sur les fonctions discontinues.

son article, René Baire (1874-1932) est encore un enfant mais c'est à la fin des années 1890, lors de la rédaction de sa thèse que les deux hommes se rapprochent autour de ce thème. En effet c'est dans sa thèse « Sur les fonctions de variables réelles » (soutenue en 1899) sur la compréhension de la notion de continuité (il étudie par exemple les problèmes suivants : « que dire de l'ensemble des points de continuité d'une limite simple de fonctions continues ou d'une fonction de deux variables séparément continue ») que Baire combinant théorie des ensembles et analyse introduit pour la première fois la notion d'ensemble rare (réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide) pour son fameux théorème et ses multiples applications. D'ailleurs en 1898 Baire rencontre Volterra à Turin, et on peut lire dans l'article de Dugac [5] leur correspondance autour de ce thème.

Démonstration ([16], [14]). Pour la démonstration sans argument topologique, le sésame est la fonction T de Thomae. L'idée de la preuve est la suivante : supposons qu'une telle fonction $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existe, on va montrer qu'alors il existe un réel $\alpha \in \mathbb{R}$ en lequel T et V sont continues ce qui est absurde vu que $\mathscr{C}_V \cap \mathscr{C}_T = \emptyset$.

Soit $r \in \mathbb{Q}$, V étant continue au point r, il existe $0 < \delta < 1/2$ tel que

$$|V(x) - V(r)| < 1/2, \qquad \forall x \in [r-\delta, r+\delta].$$

En particulier

$$\begin{aligned}|V(x)-V(y)| &\leq |V(x)-V(r)| + |V(r)-V(y)| \\ &< 1/2+1/2 = 1, \quad \forall x,y \in [r-\delta, r+\delta].\end{aligned}$$

Mais par densité de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, il existe aussi un nombre irrationnel $\zeta \in [r-\delta, r+\delta]$ et par continuité de T en ζ, le même argument que celui appliqué à V nous assure qu'il existe deux réels $a_1 < b_1$ tels que $[a_1, b_1] \subset [r-\delta, r+\delta]$ et

$$|T(x) - T(y)| < 1, \qquad \forall x,y \in [a_1, b_1].$$

En résumé, il existe donc $a_1 < b_1$ tels que $0 < b_1 - a_1 < 1$ et

$$\begin{aligned}&|V(x)-V(y)| < 1 \\ &\qquad \text{et} \quad |T(x)-T(y)| < 1, \qquad \forall x,y \in [a_1,b_1].\end{aligned}$$

Si l'on reprend ce même argument on est assuré qu'il existe deux réels $a_2 < b_2$ tels que $0 < b_2 - a_2 < 1/2$ et

$$\begin{aligned}&|V(x)-V(y)| < 1/2 \\ &\text{et} \quad |T(x)-T(y)| < 1/2, \qquad \forall x,y \in [a_2,b_2] \subset]a_1,b_1[.\end{aligned}$$

On réitère alors ce processus pour construire une suite décroissante d'intervalles $([a_n,b_n])_n$ vérifiant

$$\begin{aligned}&b_n - a_n < 2^{-n+1}, \quad |V(x)-V(y)| < 2^{-n+1} \\ &\qquad \text{et} \quad |T(x)-T(y)| < 2^{-n+1}, \qquad \forall x,y \in [a_n,b_n].\end{aligned}$$

On en déduit immédiatement qu'il existe (c'est le théorème des segments emboités) un réel α tel que $\{\alpha\} = \bigcap_n [a_n, b_n]$. Alors les inégalités $|V(x) - V(y)| < 2^{-n+1}$ et $|T(x) - T(y)| < 2^{-n+1}$, $\forall x,y \in [a_n,b_n]$ nous assurent facilement la continuité de T et V au point α. Contradiction ! CQFD. □

Remarques.

• *Pour la dérivabilité c'est plus délicat : dans [13], Marc Lynch construit une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est continue sur tout $\mathbb{R}$ mais dérivable exactement sur $\mathbb{Q}$.*

• *On trouve dans la littérature de nombreux exemples de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et nulle part dérivables (par exemple [4], [15]).*

IV Plus sur les fonctions de type Thomae

Souvenons nous, que la fonction de Thomae

$$T(x) = \begin{cases} 1/q, & \text{si } x = \dfrac{p}{q}, \text{ avec } p \wedge q = 1, \\ 1, & \text{si } x = 0, \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

n'est dérivable en aucun point de $\mathscr{C}_T = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ (les seuls candidats possibles). Dans [2] les auteurs tentent de modifier T légèrement sur les rationnels pour la rendre dérivable.

Ils considèrent la version modifiée de la fonction de Thomae suivante :

$$\widetilde{T}_a(x) = \begin{cases} a_q, & \text{si } x = \dfrac{p}{q}, \text{ avec } p \wedge q = 1, \\ 1, & \text{si } x = 0, \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

où $a = (a_q)_q$ est une suite de réels décroissante de limite nulle (pour $a_q = 1/q$ on retrouve la fonction de Thomae). Alors on a les résultats remarquables :

Théorème 3 ([2]). *Soit $a = (a_q)_q$ une suite de réels strictement positifs de limite nulle . Alors*

1. *$\widetilde{T}_a$ n'est pas dérivable sur une partie dense non dénombrable de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.*
2. *Pour toute famille dénombrable d'irrationels $\{\alpha_i, i \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ il existe une fonction $\widetilde{T}_a$ qui est dérivable sur $\{\alpha_i, i \in \mathbb{N}\}$.*
3. *Soit $a = (a_n)_n$ une suite décroissante vers 0 de réels telle que $\liminf_n n^2 a_n > 0$ alors $\widetilde{T}_a$ n'est nulle part dérivable.*

Démonstration. Soit donc $a = (a_q)_q$ une suite de réels strictement positifs et T_a la fonction de Thomae associée ; suivons à la lettre [2]

1. • $(r_n)_n$ est une énumération de $\mathbb{Q}$. On se donne un nombre rationnel que l'on note x_1.
Comme $x_1 \in \mathbb{Q} : f(x_1) > 0$, il existe donc un segment I_1 de longueur $\ell(I_1)$ strictement inférieure à 1 tel que

$$r_0 \notin I_1,\ x_1 \in I_1 \quad \text{et} \quad f(x_1) \geq |x_1 - x|, \quad \forall x \in I_1.$$

On continue : il existe un segment I_2 et un rationnel x_2 vérifiant

$$I_2 \subset I_1, \quad \ell(I_2) < 1/2, \quad x_2 \in I_2, \quad r_0, r_1 \notin I_2 \quad \text{et} \quad f(x_2) \geq |x_2 - x|, \quad \forall x \in I_2.$$

En réitérant ce processus on obtient une suite de rationnels $(x_n)_n$ et une suite de segments $(I_n)_n$ vérifiant pour tout entier n :

- $I_{n+1} \subset I_n$ et $\ell(I_{n+1}) < 1/2^n$,
- $x_{n+1} \in I_{n+1} \cap \mathbb{Q}$ et $f(x_{n+1}) \geq |x_{n+1} - x|$, $\forall x \in I_{n+1}$,
- $r_0, r_1, \dots r_n \notin I_{n+1}$.

Par le théorème des segments emboités, il existe un réel α tel que

$$\bigcap_{n \geq 0} I_n = \{\alpha\} \quad \text{et} \quad \alpha = \lim_n x_n.$$

Alors $\alpha \notin \mathbb{Q}$ (sinon, il existerait un entier $i_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha = r_{i_0}$ et ceci est absurde car par construction $r_0, r_1, \dots r_n \notin I_{n+1}$ pour tout entier n et donc $r_{i_0} \notin I_n$, $\forall n > i_0$).
Montrons maintenant que $\widetilde{T}_a$ n'est pas dérivable en α. Comme pour la fonction de Thomae, la seule alternative si $\widetilde{T}_a$ est dérivable au point α est $\widetilde{T}_a{}'(\alpha) = 0$. Mais ceci est impossible : en effet, sinon comme $\alpha = \lim_n x_n$ on aurait

$$\lim_n \frac{\widetilde{T}_a(x_n) - \widetilde{T}_a(\alpha)}{x_n - \alpha} = \widetilde{T}_a{}'(\alpha) = 0$$

Mais $\alpha \in I_n$ pour tout entier n et donc par construction

$$\left| \frac{\widetilde{T}_a(x_n) - \widetilde{T}_a(\alpha)}{x_n - \alpha} \right| = \frac{\widetilde{T}_a(x_n)}{|x_n - \alpha|} \geq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

Contradiction : $\widetilde{T}_a$ est bien non dérivable en l'irrationnel α.

• Si l'on observe la construction précédente, on a en fait montré que pour tout intervalle I non réduit à un point, il existe un irrationnel α en lequel $\widetilde{T}_a$ n'est pas dérivable. On a donc en fait montré qu'il existe une partie dense $\mathscr{E}$ de nombres irrationnels sur laquelle $\widetilde{T}_a$ n'est pas dérivable.

• Il reste à montrer que $\mathscr{E}$ n'est pas dénombrable. Supposons $\mathscr{E}$, dénombrable et soit $(b_n)_n$ une énumération de $\mathscr{E}$, alors, en reprenant la construction précédente de nos suites $(x_n)_n$ et $(I_n)_n$:

- $I_{n+1} \subset I_n$ et $\ell(I_{n+1}) < 1/2^n$,
- $x_{n+1} \in I_{n+1} \cap \mathbb{Q}$ et $f(x_{n+1}) \geq |x_{n+1} - x|$, $\forall x \in I_{n+1}$,
- $r_0, r_1, \dots r_n \notin I_{n+1}$,
  mais en rajoutant aussi la condition :
- $b_0, b_1, \dots b_n \notin I_{n+1}$

on produit alors un irrationnel $\alpha \notin \mathscr{E}$ en lequel $\widetilde{T}_a$ n'est pas dérivable ce qui contredit la définition de $\mathscr{E}$. CQFD.

2. Soit $\{\alpha_i,\ i \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Pour tout entier i, on définit l'application $g_i\ :\ \mathbb{N}^\star \to \mathbb{R}_+^\star$ par

$$g_i(n) = \min \left\{ \left| \frac{m}{n} - \alpha_i \right|, \quad n \wedge m = 1 \right\}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star$$

et $g\ :\ \mathbb{N}^\star \to \mathbb{R}_+^\star$ définie par

$$g(n) = \min_{1 \leq i \leq n} g_i(n).$$

Alors la fonction de Thomae $\widetilde{T}$ associée à la suite $(g(n)^2)_n$:

$$\widetilde{T}(x) = \begin{cases} g(n)^2, & \text{si } x = \dfrac{m}{n}, \text{ avec } m \wedge n = 1, \\ 1, & \text{si } x = 0, \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

répond à notre question : elle est bien dérivable en tous les α_i.
En effet, pour $i \geq 1$ et m, n premiers entre eux, pour $n \geq i$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\widetilde{T}(m/n) - \widetilde{T}(\alpha_i)}{m/n - \alpha_i} \right| &= \frac{g(n)^2}{|m/n - \alpha_i|} \\ &\leq \frac{g_i(n)^2}{|m/n - \alpha_i|} \\ &\leq \frac{g_i(n)^2}{g_i(n)} = g_i(n) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0. \end{aligned}$$

(en effet comme on l'a observé pour la fonction de Thomae il est suffisant de se concentrer sur les suites de rationnels $(m_k/n_k)_k$ convergeant vers α_i et de se souvenir que comme α_i n'est pas rationnel on a forcément $\lim_k n_k = +\infty$, enfin $\lim_n g_i(n) = 0$ vu l'inégalité évidente $0 < g_i(n) < 1/n$). CQFD.

$$\mu(a) = \sup \left\{ d > 0\ :\ 0 < \left| \frac{m}{n} - a \right| < \frac{1}{n^d} \quad \text{admette une infinité de solutions } m/n \right\}.$$

Ou bien $\mu(a)$ est la borne inférieure des réels $d > 0$ pour lesquels il existe $A > 0$ tel que $\left| \frac{m}{n} - a \right| \geq \frac{1}{n^d}$ pour tout $m/n \neq a$ (autrement dit, l'équation $0 <$

$\left|\frac{m}{n}-a\right|<\frac{1}{n^d}$ n'admet qu'un nombre fini de solutions).

Un théorème de Lagrange ([10], Théorème 187, page 202) nous assure que pour tout nombre irrationnel $a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$: $\mu(a)\geq 2$ [3] (pour un nombre rationnel il n'est pas difficile de montrer que $\mu(a)=1$).

Soit $a=(a_n)_n$ une suite décroissante vers 0 de réels telle que $\liminf_n n^2a_n>0$ et $\widetilde{T}_a$ la fonction de Thomae associée.

Pour $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, souvenons nous que $\widetilde{T}_a$ sera dérivable en α si et seulement si pour toute suite $(p_n/q_n)_n$ de rationnels convergente vers α on a

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\widetilde{T}_a(p_n/q_n)-\widetilde{T}_a(\alpha)}{p_n/q_n-\alpha}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\widetilde{T}_a(p_n/q_n)}{p_n/q_n-\alpha}\right|\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{a_{q_n}}{|p_n/q_n-\alpha|}=0.\end{aligned}$$

Mais cette dernière limite est impossible car en vertu du théorème de Lagrange $|p_n/q_n-\alpha|\geq q_n^2a_{q_n}$ pour une infinité d'entiers q_n et par $\liminf_n n^2a_n>0$ la limite du taux d'accroissement ne peut être nulle. □

Remarques. *Le premier assure seulement que T n'est pas dérivable sur une partie dense non dénombrable de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ alors que le troisième nous assure que la fonction de Thomae mais aussi, par exemple,*

$$\widetilde{T}_{(1/q^2)_q}(x)=\begin{cases}1/q^2, & si\ \ x=\dfrac{p}{q},\ avec\ p\wedge q=1,\\ 1, & si\ \ x=0,\\ 0, & si\ \ x\notin\mathbb{Q},\end{cases}$$

ne sont nulle part dérivables (car par exemple pour la seconde : $\liminf_q q^2a_q=\lim_q q^2\cdot q^{-2}=1>0$*).*

V Appendice à propos de Baire

Qu'il n'existe pas de fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ discontinue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ mais continue sur $\mathbb{Q}$ est une application classique du théorème de Baire et se trouve dans tout honnête ouvrage d'analyse fonctionnelle (voir par exemple [11] exercice 6, page 20).

Sans plus entrer dans les détails, en voici les grandes lignes : le théorème de Baire nous dit que dans un espace métrique complet toute intersection dénombrable d'ouverts denses est encore dense ou en passant au complémentaire que toute réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide (on dit maigre) est d'intérieur vide. C'est le cas pour l'espace normé $\mathbb{R}$, donc $\mathbb{Q}$ est maigre dans $\mathbb{R}$ comme réunion dénombrable de ses singletons qui sont fermés d'intérieur vide. Comme la réunion (au plus dénombrable) d'ensembles maigres est maigre, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ n'est pas maigre (sinon $\mathbb{R}=(\mathbb{Q})\cup(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ serait maigre contredisant le théorème de Baire). Mais d'un autre coté, pour tout fonction fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ il n'est pas difficile (en utilisant la notion d'oscillation d'une fonction) de montrer que l'ensemble des ses points de discontinuité $\mathscr{D}_f$ est toujours réunion dénombrable de fermés. En particulier si $\mathscr{D}_f=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ alors il est d'intérieur vide donc maigre. Contradiction et CQFD.

3. Autrement dit, si a est irrationnel, il existe une infinité de couples $(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^\star$ tels que $0<\left|\frac{m}{n}-a\right|<\frac{1}{n^2}$

Références

[1] Behrends E., Geschke S. & Natkaniec T. « *Functions for which all points are local minimum or maximum* », Real Analysis Exchange 33(2), 467-470 (2007/2008).

[2] Beanland K., Roberts J.W. & Stevenson C. « *Modifications of Thomae's Function and Differentiability* », The American Mathematical Monthly, 116:6, pp. 531-535, (2009).

[3] Bourchtein A. & Bourchtein L. « *CounterExamples : From Elementary Calculus to the Beginnings of Analysis.* », TextBooks in Mathematics, CRC Press, (2015).

[4] Delahaye J.P. « *Des fonctions monstrueuses mais utiles* », Pour la Science no 51, pp. 80-85 (2020).

[5] Dugac P. « *Notes et documents sur la vie et l'oeuvre de René Baire* », Archive for History of Exact Sciences Vol. 15, No. 4 (23.VIII), pp. 297-383 (1976).

[6] William Dunham. « *A Historical Gem from Vito Volterra* », Mathematics Magazine, 63:4, pp. 234-237, (1990).

[7] Francinou S. Gianella H. & Nicolas S. « *Exercices de Mathématiques, Oraux X-ENS, analyse 1* », Cassini (2014).

[8] Gelbaum Bernard R. & Olmsted John M. H. « *Counterexamples in Analysis* ». Dover, (1992).

[9] Godefroy G. « *Introduction aux méthodes de Baire* ». Calvage & Mounet, (2022).

[10] Hardy G.H. & Wright E.M. « *Introduction à la Théorie des Nombres* », Vuibert-Springer (2007).

[11] Hirsch F. & Lacombe G. « *Éléments d'Analyse Fonctionnelle* », Masson (1997).

[12] Kánnai Z. « *A One-to-One Popcorn Function* », The American Mathematical Monthly, 124-8, pp. 746-748 (2017).

[13] Lynch M. « *A Continuous Function That Is Differentiable Only at the Rationals* », Mathematics Magazine, 86-2, pp. 132-135 (2013).

[14] Rajwade A.R. & Bhandari A.K. « *Surprises and Counterexamples in Real Function Theory* », Texts and Readings in Mathematics Vol.42, Hindustan Book Agency, (2007).

[15] Thim J. *« Continuous Nowhere Differentiable Functions »* , Master Thesis, Luleå University (2003).

[16] Volterra V. « *Alcune osservasioni sulle funzioni punteggiate discontinue* », Gionwle eli Matematiche 19, 76-86 (1881).