CONTINUITÉ « RACINES/COEFFICIENTS » D'UN POLYNÔME : UNE APPROCHE COMPACTE

PATRICE LASSÈRE, 20 AOÛT 2019

Résumé. On propose une démonstration de la continuité « racines/coefficients » pour les polynômes à coefficients complexes qui repose sur la compacité du groupe unitaire via les matrices compagnons et l'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

1. Préliminaires

1.1. **Introduction.** Le problème qui nous occupe dans cette note est le suivant : « comment se comportent les racines d'un polynôme si on perturbe légèrement ses coefficients ? » ou un peu plus précisément « sous quelles hypothèses peut-on affirmer que les racines d'un polynôme dépendent continument des ses coefficients ? » Ce genre de question apparait régulièrement en algèbre linéaire.

1.2. **Notations.** On équipe l'espace vectoriel $\mathbb{C}_d[x]$ des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à $d \geq 1$ de la norme

$$\forall\, P = a_0 + a_1 x + \cdots + a_d x^d \in \mathbb{C}_d[x], \qquad \|P\| = \max_{0 \leq j \leq d} |a_k|.$$

Il en résulte que si une suite de polynômes $(P_n = a_{n,0} + a_{n,1}x + \cdots + a_{n,d}x^d)_n$ converge dans $\mathbb{C}_d[x]$ vers $P = a_0 + a_1 x + \cdots + a_d x^d$ (le choix de la norme sur $\mathbb{C}_d[x]$ est sans importance puisqu'elles sont toutes équivalentes) alors

$$\forall\, j \in \{0, \ldots, d\} \ : \qquad \lim_n a_{n,j} = a_j.$$

Enfin, pour $P \in \mathbb{C}_d[x]$ et $\varepsilon > 0$, on désignera par $Z(P)$ l'ensemble $\{a \in \mathbb{C} \ : \ P(a) = 0\}$ des racines de P et par $Z(P) + D(0, \varepsilon) = \{a + z,\ a \in Z(P),\ |z| < \varepsilon\}$ un ε-voisinage des racines de P.

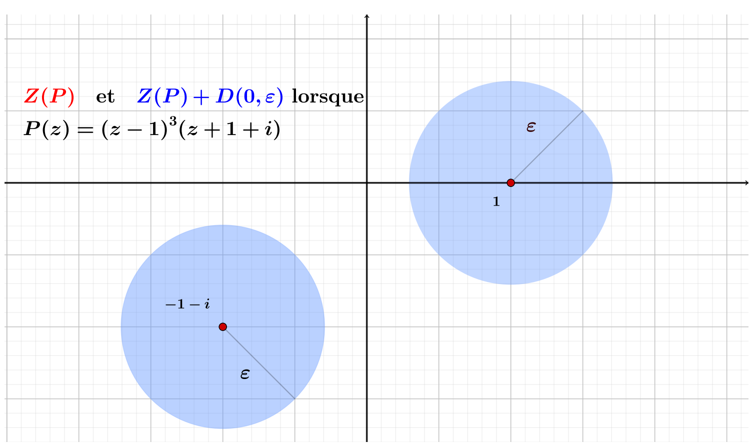

Figure 1. Les ensembles $Z(P)$ et $Z(P) + D(0, \varepsilon)$ sur un exemple.

Enfin, $U_d(\mathbb{C})$ désigne le groupe unitaire des matrices carrées dans $M_d(\mathbb{C})$, autrement dit l'ensemble des matrices $A \in M_d(\mathbb{C})$ qui sont inversibles et telles que $A^{-1} = \overline{A}^T$. C'est un fermé borné de $M_d(\mathbb{C})$ donc un compact.

Nos objectifs sont les suivants :

Théorème 1. *Soit $P \in \mathbb{C}_d[x]$ un polynôme de degré $d \geq 1$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que*

$$\forall\, Q \in \mathbb{C}_d[x],\ \ deg(Q) = d \quad \wedge \quad \|P - Q\| \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad Z(Q) \subset Z(P) + D(0, \varepsilon).$$

Théorème 2. *(racines multiples) Soit $P \in \mathbb{C}_d[x]$ un polynôme de degré $d \geq 1$. On suppose que P possède une racine λ de multiplicité $m_\lambda \geq 2$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que*

$$\forall\, Q \in \mathbb{C}_d[x],\ \ deg(Q) = d \quad \wedge \quad \|P - Q\| \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{card}\,(Z(Q) \cap D(\lambda, \varepsilon)) = m_\lambda.$$

On se propose de donner une preuve assez simple de cette continuité. Les preuves classiques étant souvent délicates (surtout pour la localisation des racines multiples). On pourra sur ces questions, se plonger dans le chapitre XIII du remarquable ouvrage de Frédéric Testard [3].

1.3. **Remarque.** L'hypothèse $\deg(Q) = d$ peut sembler excessive mais elle est incontournable comme on peut l'observer sur l'exemple suivant :

$$P_n(z) = z - \frac{z^2}{n} = z\left(1 - \frac{z}{n}\right), \qquad P(z) = z.$$

En effet la suite $(P_n)_n$ converge vers P car $\|P_n - P\| = 1/n$, toutefois $Z(P_n) = \{0, n\}$ alors que $Z(P) = \{0\}$.

1.4. **Exemple.** La suite de polynômes $(P_n = z^2 + 1/n)_n$ à racines simples converge vers le polynôme $P(z) = z^2$ qui possède la racine double $z = 0$: on observe bien tout voisinage de $z = 0$ contient pour n assez grand, deux racines de P_n.

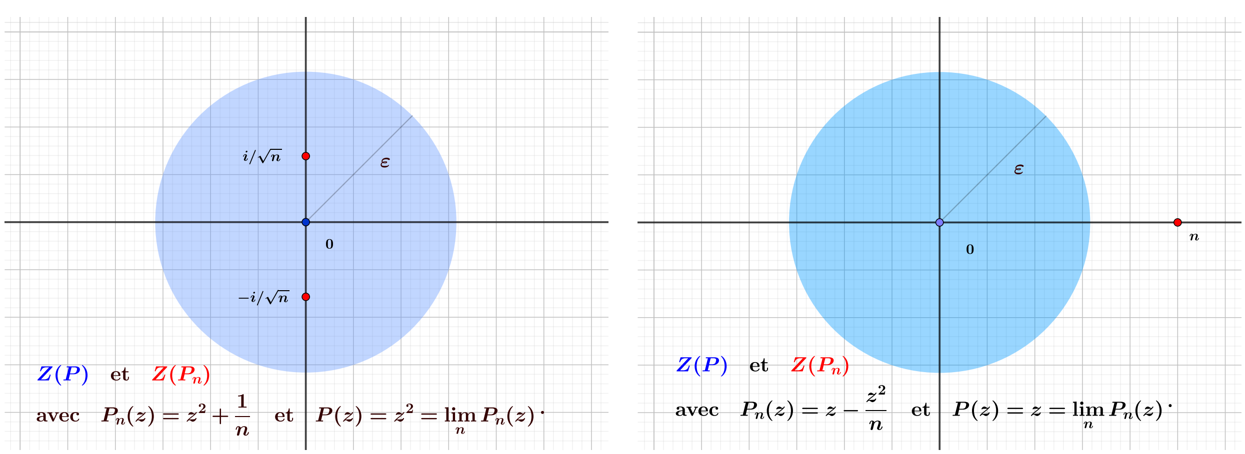

FIGURE 2. Deux exemples.

2. La démonstration

2.1. **Le lemme d'orthotrigonalisation de Schur.** La démonstration repose sur la propriété suivante parfois connue comme le lemme de Schur ([2], théorème 2.3.1, page 79).

Lemme de Schur. *Toute matrice $A \in M_d(\mathbb{C})$ est trigonalisable dans une base orthonormée. Autrement dit :*

$$\forall\, A \in M_d(\mathbb{C}),\ \exists\, Q \in U_d(\mathbb{C})\ :\qquad A = Q\,T\,Q^{-1} = Q\,T\,\overline{Q}^{T}, \tag{$\bigstar$}$$

où $T \in M_d(\mathbb{C})$ est une matrice triangulaire.

Démonstration du lemme : L'argument pour prouver ($\bigstar$) est fort simple : il est bien connu que toute matrice est trigonalisable dans une base, disons $(t_1, \dots, t_d)$ de $\mathbb{C}^d$. Si on orthonormalise cette dernière en une base orthomormée $(h_1, \dots, h_d)$ suivant le procédé de Gram-Schmidt, la matrice T dans cette dernière base sera encore une matrice triangulaire (car Gram-Schmidt nous dit aussi que $\mathrm{Vect}(h_1, \dots, h_k) = \mathrm{Vect}(t_1, \dots, t_k)$ pour tout $k = 1, \dots d$). La matrice de passage Q de la base canonique orthonormale $(e_1, \dots, e_d)$ à la base orthonormée $(h_1, \dots, h_d)$ est donc dans $U_d(\mathbb{C})$ et on a $A = Q\,T\,\overline{Q}^{T}$. ■

Nous sommes maintenant en mesure de passer à la preuve du théorème. L'ingrédient principal étant la compacité du groupe linéaire $U_d(\mathbb{C})$ auquel on va se ramener via le lemme de Schur et les matrices compagnon.

A tout polynôme unitaire $P = x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{C}_d[x]$ on associe sa matrice compagnon

$$C_P := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{d-1} \end{pmatrix} \in M_d(\mathbb{C}).$$

Un calcul élémentaire (en développant par exemple par rapport à la dernière ligne) montre que son polynôme caractéristique χ_{C_P} coïncide avec P :

$$\chi_{C_P}(X) \ :=\ \det(XI_d - C_P) \ =\ P(X),$$

2.2. **La preuve du théorème 1 :** Il suffit bien entendu de travailler avec des polynômes unitaires (factoriser par le coefficient de x^d ne modifie ni les racines ni la convergence dans $\mathbb{C}_d[x]$).
On procède par l'absurde. Il existe alors $\varepsilon_0 > 0$ et une suite $(P_n)_n \subset \mathbb{C}_d[x]$ de polynômes unitaires vérifiant

$$\forall\, n \geq 1\ :\ \|P_n - P\| \leq 1/n \quad \text{et} \quad \exists\, \zeta_n \in Z(P_n)\ :\ \zeta_n \notin Z(P) + D(0, \varepsilon_0).$$

Vu ($\bigstar$), pour tout $n \geq 1$, il existe $Q_n \in U_d(\mathbb{C})$ vérifiant

$$C_{P_n} = Q_n T_n \overline{Q_n}^{T}$$

où T_n est triangulaire supérieure avec sur sa diagonale les racines $\lambda_{n,1}, \dots, \lambda_{n,d}$ de P_n.
Par compacité de $U_d(\mathbb{C})$, il existe une sous-suite $(Q_{\varphi(n)})_n$ convergente vers $Q \in U_d(\mathbb{C})$. On en déduit que

$$\lim_n T_{\varphi(n)} = \lim_n \overline{Q}^{T}_{\varphi(n)} C_{P_{\varphi(n)}} Q_{\varphi(n)} = \overline{Q}^{T} C_P\, Q := T,$$

par continuité de $M \mapsto \overline{M}^T$ et car $\lim_n P_n = P$ implique $\lim_n C_{P\varphi(n)} = C_P$ dans $M_d(\mathbb{C})$. Les matrices $T_{\varphi(n)}$ étant triangulaires, il en est de même de leur limite T et on désignera par $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ les éléments diagonaux de T. En particulier :

$$\forall\, j = 1, \dots, d, \qquad \lim_n \lambda_{\varphi(n),j} = \lambda_j.$$

Enfin, l'égalité $C_P = QT\overline{Q}^t$ nous assure que les coefficients diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ de T sont les valeurs propres de C_P autrement dit les racines de P comptées avec leur multiplicités.

Maintenant, vu le choix des polynômes P_n, pour tout entier n, il existe $j_{\varphi(n)} \in \{1, \dots, d\}$ tel que

$$\zeta_{\varphi(n)} = \lambda_{\varphi(n),\, j_{\varphi(n)}} \in Z(P_{\varphi(n)}) \quad \text{mais} \quad \zeta_{\varphi(n)} \notin Z(P) + D(0, \varepsilon_0).$$

Enfin, par le principe des tiroirs, il existe un entier $1 \leq j_0 \leq d$, tel que la suite $(\lambda_{\varphi(n),\, j_0})_n$ contienne une infinité de $\zeta_{\varphi(n)}$. Notons la : $\zeta_{\psi(n)} = \lambda_{\psi(n)\, j_0}$.
La suite $(\zeta_{\psi(n)} = \lambda_{\psi(n),\, j_0})_n$ est extraite de la suite $(\lambda_{\varphi(n),\, j_0})_n$ qui converge vers λ_{j_0} donc vers une racine de P ce qui contredit le fait que $\zeta_{\psi(n)} \notin Z(P) + D(0, \varepsilon_0)$. Contradiction, d'ou le théorème 1. ■

2.3. **La preuve du théorème 2 :** Dans le cas ou P admet une racine multiple λ, disons de multiplicité $m_\lambda \geq 2$, l'argument développé pour établir le théorème 1 permet encore de conclure.
Sans perdre de généralité, supposons que $m_\lambda = 2$. Si la seconde propriété n'est pas réalisée, alors deux cas sont à envisager :
• S'il existe une suite de polynômes $(P_n)_n$ convergente vers P pour laquelle il existe $\varepsilon_0 > 0$ telle que le cardinal de $Z(P_n) \cap D(\lambda, \varepsilon_0) < 2$. Alors, comme par (1) ce cardinal est au moins un, il est égal à un : il existe un unique zéro z_n de P_n vérifiant $|z_n - \lambda| \leq \varepsilon_0$. Tout cela est absurde, car (comme en (1)), la suite $(C_{P_n})_n$ admet une sous suite convergente vers une limite semblable à C_P donc admettant λ comme valeur propre de multiplicité 2 (les zéros de la sous-suite doivent donc rencontrer $D(\lambda, \varepsilon_0)$ en au moins deux points).
• De même, si le cardinal de $Z(P_n) \cap D(\lambda, \varepsilon) > 2$, disons 3, l'argument précédent assure encore une fois que toutes les valeurs d'adhérence de la suite $(P_n)_n$ admettront λ comme racine de multiplicité 3. ■

Remarque : Bien que toute valeur d'adhérence de la suite $(C_{P_n})_n$ soit semblable à C_P il faut se garder de croire que cette suite converge (la matrice de passage Q dépend à priori de la sous suite convergente). Elle peut même posséder une infinité de valeurs d'adhérence.

Références

[1] **H. Carrieu, M. Fadel, E. Fieux, P. Lassère & F. Rodriguez** *« Autour des matrices Compagnon ou de Frobenius »,* (2006, 31 pages).

[2] **Horn R.A. & Johnson C.R.** *« Matrix analysis ».* Cambridge University Press (1985).

[3] **Testard F.** *« Analyse Mathématique, la maitrise de l'implicite ».* Calvage & Mounet (2012).

Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE. Mèl : lassere@math.univ-toulouse.fr