

La règle de dérivation $(\sin)'(x) = \cos(x)$ sans se prendre la tête

par Jean-Baptiste HIRIART-URRUTY et Patrice LASSÈRE*

Résumé.

Dans cette note, notre objectif est de démontrer - avec les seules connaissances mathématiques acquises au lycée - la dérivabilité des fonctions trigonométriques usuelles *sinus* et *cosinus* et de calculer leurs dérivées. Il ne faut pas rater une occasion, lorsque cela est possible, de « démontrer »¹ les choses, dans les environnements tels que ceux de l'enseignement secondaire notamment.

I Comment vous avez échappé à la triangulométrie

C'est habituellement lors d'enseignements de mathématiques dans le secondaire que les adolescents sont confrontés à ce que sont le sinus et le cosinus d'un angle. C'est en étudiant le triangle (qu'on pourrait d'ailleurs appeler aussi trigone) qu'ils y sont conduits², d'où l'appellation qui s'ensuit de *fonctions trigonométriques*. L'appellation de *trigone* fait référence à la racine grecque de « trois coins », alors que celle de *triangle* indique bien qu'on se réfère à une figure avec trois angles. Bref, vous avez la trigonométrie, vous avez échappé à la triangulométrie... La visualisation sur un cercle-unité (c'est-à-dire de centre l'origine O et de rayon 1) de ce que représente l'angle θ (qui, si exprimé en radians, est aussi la longueur du morceau de cercle vu sous cet angle) et la valeur

$\sin(\theta)$ sont ensuite au coeur du dispositif d'apprentissage et de mémorisation de ces notions. Explicitons cela : pour $\theta \in]-\pi, \pi]$, on désigne par M_θ l'unique point du cercle-unité $C(O, 1)$ vérifiant $\angle(O_x, \overrightarrow{OM_\theta}) = \theta$; le point $M_\theta = (x_\theta, y_\theta)$ étant ainsi défini, on pose $x_\theta = \cos(\theta), y_\theta = \sin(\theta)$. On prolonge ensuite ces deux fonctions sur toute la droite réelle \mathbb{R} par 2π -périodicité.

Il en résulte en particulier la parité des fonctions \sin et \cos :

$$\sin(-\theta) = -\sin(\theta), \quad \cos(-\theta) = \cos(\theta) \text{ pour tout } \theta \in \mathbb{R},$$

ainsi que leur comportement à l'origine :

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \sin(\theta) = \sin(0) = 0, \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \cos(\theta) = \cos(0) = 1,$$

la figure ci-dessous faisant ici largement office de démonstration...

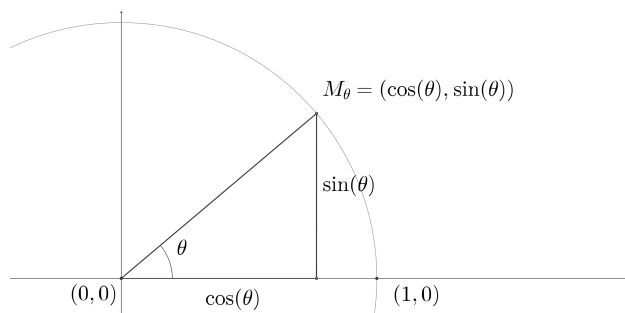


Figure 1. Définitions de sinus et cosinus

* Département de Mathématiques Université Paul Sabatier de Toulouse, 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex 09.

1. Nous utilisons les vocables *démontrer* et *démonstration* plutôt que *prouver* et *preuve* ; ces derniers sont largement utilisés et acceptés, mais ce sont avant tout des anglicismes (de *to prove*, *proof*).

2. Il serait d'ailleurs assez étrange de faire autrement ; par exemple, définir ces fonctions comme sommes de séries entières (à un niveau post-Bac) demande des contorsions acrobatiques pour retrouver leur interprétation géométrique, laquelle est plus naturelle (et, comme on le verra plus loin, conduit facilement à leurs développements en séries entières). C'est une maladresse que l'on retrouve fréquemment lors de préparations aux oraux de concours d'enseignement.

II Une première clé est le calcul de $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(\theta)}{\theta}$

Le point clé de la démonstration qui va suivre est la limite suivante, « incontournable » comme diraient les journalistes :

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(\theta)}{\theta} = 1.$$

Pour la démontrer, on commence par réduire le calcul en ne considérant que la limite à droite. En effet, pour $\theta < 0$, comme on a observé que la fonction sinus est impaire,

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^-} \frac{\sin(\theta)}{\theta} = \lim_{(u=-\theta) \ u \rightarrow 0^+} \frac{\sin(-u)}{-u} \quad (1)$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{-\sin(u)}{-u} \quad (2)$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\sin(u)}{u}. \quad (1)$$

Suivons à présent le cheminement de la démonstration sur la Figure 2. Soit donc θ strictement compris entre 0 et $\pi/2$. L'arc de cercle de rayon OB , où $B = (\cos(\theta), 0)$ coupe le segment OM_θ en C .

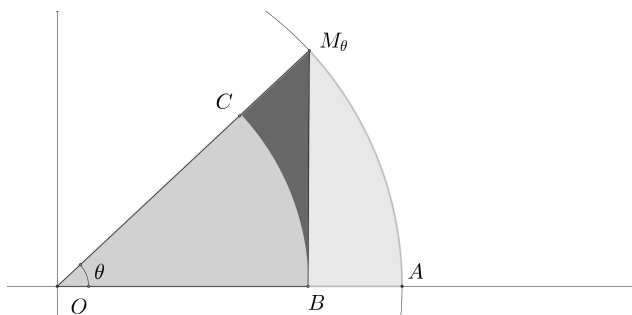


Figure 2. Comparaison des aires

Il nous faut comparer les aires d'un triangle et de deux « secteurs angulaires ». Le lecteur ou l'élève aura mieux compris ce que sont ces derniers objets si l'on parle plutôt de « morceaux de pizzas ». On observe alors que le secteur angulaire ou morceau de pizza (OBC) est contenu dans le triangle (OBM_θ), qui lui même est inclus dans secteur angulaire ou morceau de pizza (OAM_θ). Il en résulte les inégalités correspondantes entre les aires de ces figures géométriques :

$$\begin{aligned} \text{aire du secteur angulaire } (OBC) \\ \leq \text{aire du triangle } (OBM_\theta), \quad (2.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{aire du triangle } (OBM_\theta) \\ \leq \text{aire du secteur angulaire } (OAM_\theta). \quad (2.2) \end{aligned}$$

Pour aller plus loin, il faut connaître l'aire d'un secteur angulaire. Là encore, il est tout à fait possible de

« démontrer » la formule à un lycéen : l'aire d'un secteur angulaire d'angle $0 < \theta \leq 2\pi$ et de rayon r vaut $\theta r^2/2$ (voir Figure 3). En effet, en se souvenant de la règle de proportionnalité (ou règle de trois), l'aire \mathcal{A} d'un tel secteur est à l'aire totale πr^2 du disque ce que l'angle θ est à l'angle total 2π du disque :

$$\frac{\mathcal{A}}{\pi r^2} = \frac{\theta}{2\pi}.$$

Ainsi, l'aire \mathcal{A} vaut $\theta r^2/2$.



Figure 3. Aire d'un morceau de pizza

Les inégalités précédentes (2-1) et (2-2) s'écrivent alors :

$$\frac{\theta \cos^2(\theta)}{2} \leq \frac{\sin(\theta) \cos(\theta)}{2} \leq \frac{\theta}{2},$$

soit, en divisant par $\theta \cos(\theta)/2$ (qui est bien strictement positif vu que $\theta \in]0, \pi/2[$) :

$$\cos(\theta) \leq \frac{\sin(\theta)}{\theta} \leq \frac{1}{\cos(\theta)} \text{ pour } 0 < \theta < \pi/2. \quad (\mathcal{I})$$

C'est une très jolie double inégalité pour laquelle, lorsque l'on fait tendre θ vers 0 par valeurs supérieures (et comme $\cos(\theta)$ tend vers 1), le théorème dit « des gendarmes »³ assure que

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\theta)}{\theta} = 1. \quad (3)$$

Avec la remarque plus haut (explicitée en (1)), il en est de même pour la limite en 0_- . Ainsi, $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(\theta)}{\theta} = 1$, que l'on peut aussi écrire sous la forme : $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(\theta) - \sin(0)}{\theta - 0} = 1$: la fonction sinus est donc dérivable en l'origine avec $(\sin)'(0) = 1$.

III Avec la clé, intervient le serrurier

Avant de s'occuper de la dérivabilité de la fonction sinus en dehors de l'origine, on commence par déduire

3. Ah ce fameux « théorème des gendarmes » ! Combien de fois ne l'a-t-on vu évoqué dans des copies d'examen ou de concours... L'appellation apparaît même à présent dans les programmes officiels. On peut imaginer que c'est parce qu'un délinquant, coincé entre deux gendarmes qui vont au poste, est forcé d'aller également au poste... D'autres appellations pour ce résultat, toutes aussi fleuries, existent dans d'autres pays.

Un encadrement d'un type un peu différent peut être obtenu avec d'autres triangles, cela figure explicitement dans certains livres d'enseignement ; mais il faut pour cela savoir ce qu'est la tangente d'un angle θ et savoir la reconnaître sur la Figure 1 et la Figure 2, ce que nous avons voulu éviter ici.

de (3) :

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\theta)}{\theta} = 0. \quad (4)$$

Pour s'en convaincre, écrivons :

$$\frac{1 - \cos(\theta)}{\theta} = \frac{2 \sin^2(\theta/2)}{\theta} = \frac{\sin(\theta/2)}{\theta/2} \times \sin(\theta/2).$$

Il est alors clair – même si l'on n'est pas complètement au fait de la théorie des limites – que comme $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(\theta/2)}{\theta/2} = 1$ (cela, c'est (3)) et $\lim_{\theta \rightarrow 0} \sin(\theta/2) = 0$, on aura bien :

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\theta)}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(\theta/2)}{\theta/2} \times \sin(\theta/2) = 1 \times 0 = 0.$$

C'est exactement (4).

Nous sommes maintenant en mesure d'établir la dérivabilité de la fonction sinus en tout point $a \in \mathbb{R}$. On étudie donc la limite (éventuelle)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x) - \sin(a)}{x - a} = \lim_{(x=a+h) \ h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h) - \sin(a)}{h};$$

on s'est ramené à une limite en 0 en posant $x = a + h$. La formule classique $\sin(a+h) = \sin(a)\cos(h) + \sin(h)\cos(a)$ (pour une démonstration autonome de ce développement, voir l'annexe à la fin) donne alors :

$$\begin{aligned} & \frac{\sin(a+h) - \sin(a)}{h} \\ &= \frac{\sin(a)\cos(h) + \sin(h)\cos(a) - \sin(a)}{h} \\ &= \sin(a) \times \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(a) \times \frac{\sin(h)}{h}. \end{aligned}$$

Sous cette forme, les formules (3) et (4) assurent que le dernier terme tend bien vers $\sin(a) \times 0 + \cos(a) \times 1 = \cos(a)$. La fonction sinus est bien dérivable sur \mathbb{R} et

$$(\sin)'(a) = \cos(a) \text{ pour tout } a \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Comme pour la fonction sinus, on en déduit de la même manière que la fonction cosinus est dérivable sur \mathbb{R} avec

$$(\cos)'(a) = -\sin(a), \text{ pour tout } a \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

On peut démontrer cette dernière plus simplement en observant que

$$\cos(a) = \sin(\pi/2 - a),$$

si bien qu'avec le théorème sur la dérivée des fonctions composées (sous sa forme la plus simple !) et les propriétés géométriques des fonctions trigonométriques, on arrive à :

$$\begin{aligned} (\cos)'(a) &= (\sin(\pi/2 - a))' \\ &= -(\sin)'(\pi/2 - a) \\ &= -\cos(\pi/2 - a) \\ &= -\sin(a). \end{aligned}$$

IV Une « démo sans les mots »

Par cette appellation, traduction libre de « proof without words » utilisée dans la littérature anglo-saxonne, nous entendons une illustration graphique de la formule qui doit être démontrée ; cela ne remplace pas une démonstration mais aide à la comprendre et même parfois à la conduire. Ici, avec la Figure 4 ci-dessous, nous illustrons le fait que

$$d(\sin \theta) = \cos \theta \times d\theta, \quad (\mathcal{D})$$

ce qui doit conduire à

$$(\sin)'(\theta) = \frac{d(\sin \theta)}{d\theta} = \cos \theta.$$

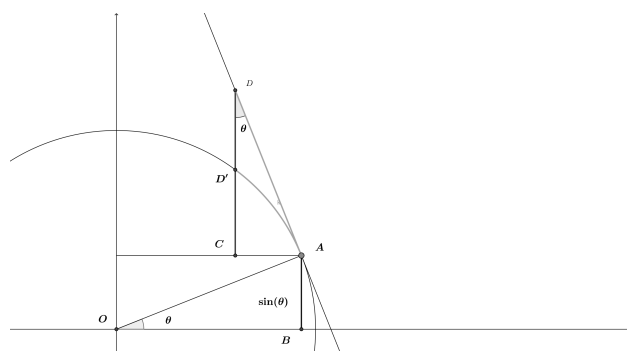


Figure 4.

On observe :

- Les triangles OBA et DCA sont semblables ;
- « L'accroissement » $d(\sin \theta)$ est DC ;
- « L'accroissement » vrai de θ est $d\theta = AD'$, approximé au premier ordre par AD (les deux sont marqués en orange sur la Figure 4).

Or, $DA \times \cos \theta = DC$, soit exactement le développement « infinitésimal » (\mathcal{D}) voulu.

V En route, à moindre coût, vers les développements en séries entières

Lorsque l'on a établi la dérivabilité des fonctions sinus et cosinus, il en résulte aussitôt que ces fonctions sont indéfiniment dérivables sur \mathbb{R} et

$$\sin^{(2n)}(x) = (-1)^n \sin(x), \quad \sin^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cos(x).$$

(*mutatis mutandis* pour la fonction cosinus). Mais plus intéressant est que l'on en déduit aussi qu'elle sont développables « en séries entières » (on dit aussi « en séries de puissances ») sur tout \mathbb{R} (ceci pour un étudiant de première ou deuxième année post-Bac cette

fois). Pour ce faire, on applique à la fonction sinus la formule TAYLOR-LAGRANGE à l'ordre $2n + 1$ à l'origine :

$$\begin{aligned} \sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &\quad + \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \sin^{(2n+2)}(\zeta_x) \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &\quad + \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} (-1)^n \sin(\zeta_x), \end{aligned}$$

où ζ_x est compris entre 0 et x . Donc

$$\left| \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} (-1)^n \sin(\zeta_x) \right| \leq \left| \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

(idem pour l'ordre $2n$). La fonction sinus est donc développable en séries entières à l'origine sur \mathbb{R} et son expression développée est :

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

VI En guise de conclusion

La trigonométrie, partie très ancienne des mathématiques mais fort utilisée dans les applications (en Physique, Mécanique, Sciences de l'ingénieur), peut donner lieu à des approches astucieuses pour démontrer ou illustrer les nombreuses propriétés qu'elle contient, témoin les deux publications [1] et [2]. L'importance des fonctions trigonométriques et leurs interventions dans tous les domaines de l'Analyse mathématique sont illustrées dans les nombreux exercices utilisés lors de préparations aux concours d'enseignement (cf. le recueil [3] par exemple). Dans la présente note, nous avons voulu insister sur l'importance de faire des démonstrations lorsque cela est possible ; l'absence généralisée de démonstrations dans une formation en mathématiques peut engendrer de la confusion et un manque de repères sur la nature même des mathématiques.

Annexe

Comme promis, voici, encore « sans se prendre la tête », une démonstration de la formule classique de duplication du sinus :

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a).$$

Notre démonstration repose sur la formule donnant l'aire d'un triangle :

$$\mathcal{A} = \frac{\alpha\beta \sin(\theta)}{2}, \quad (8)$$

où θ est la mesure d'un de ses angles et α, β sont les longueurs des deux côtés adjacents à cet angle (elle se démontre facilement par un lycéen via la loi des sinus et la formule plus classique « base \times hauteur / 2 » pour l'aire d'un triangle).

On considère alors le triangle formaté comme ci-dessous :

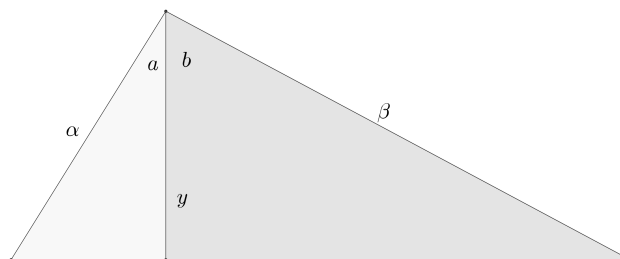


Figure 5.

Avec (8), son aire vaut

$$\mathcal{A} = \frac{\alpha\beta \sin(a+b)}{2}.$$

Mais son aire est aussi la somme des aires des deux triangles, l'un jaune et l'autre bleu, soit toujours avec (8) :

$$\mathcal{A} = \frac{\alpha y \sin(a)}{2} + \frac{\beta y \sin(b)}{2} = \frac{\alpha\beta \sin(a+b)}{2}.$$

On termine alors facilement en se rappelant les définitions basiques dans le triangle :

$$\cos(a) = y/\alpha, \quad \cos(\beta) = y/\beta.$$

Références

- [1] Hiriart-Urruty J.-B., *Les formules de trigonométrie sans pleurs*. Bulletin de l'APMEP, n° 515, 407-410 (2015).
- [2] Hiriart-Urruty J.-B. & Qiu Y., *The hexagon of trigonometric functions*. Note interne, Département de mathématiques de l'université Paul Sabatier (2015).
- [3] Lassère P., « *Petit* » *bestiaire d'exercices de mathématiques avec leur corrigé, à l'usage de l'oral voire de l'écrit de certains concours (Agrégation externe, interne & CAPES)*. Publication interne de l'université Paul Sabatier (2008).