Agrégation Interne – Séries. 26 mai 2017

Exercice 1. *(les grands classiques).*

(1) *Nature (convergence, convergence absolue) de la série* $\sum_{n\geq 2} u_n$ *de terme général* $u_n = \frac{(-1)^n}{(-1)^n+n^\alpha}$ *où* $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

(2) *Nature de la série de terme général* $u_n = \frac{f(n)}{n^2}$ *où* $f\ :\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *est une application injective.*

(3) *Quelle est la nature de la série de terme général* $u_n = \sin\left(\pi(2+\sqrt{3})^n\right)$ *?*

(4) *Quelle est la nature des séries de terme général* $a_n = \sin(\pi e n!)$, $b_n = \sin(2\pi n! e^{-1})$ *?*

(5) *Quelle est la nature de la série de terme général* $u_n = \frac{1}{n^{\tan(\pi/4+1/n)}}$ *?*

(6) *Pour quels réels* a, b, c *la série de terme général* $a_n = a\ln(n) + b\ln(n+1) + c\ln(n+2)$ *est elle convergente ?*

(7) *Montrer que* $(n+1)!\left(e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^4} + o(1/n^4)$.

Exercice 2. ***(sommation des relations de comparaison)*** *On considère deux suites* $(x_k)_k$ *et* $(y_k)_k$ *de réels positifs avec :* $x_k \sim_k y_k$. *Alors :*

(1) *Les deux séries sont de même nature.*

(2) *Si* $\sum_k x_k$ *converge alors* $\sum_{k\geq n+1} x_k \sim_n \sum_{k\geq n+1} y_k$ *(équivalence des restes).*

(3) *Si* $\sum_k x_k$ *diverge alors* $\sum_{k=0}^{n} x_k \sim_n \sum_{k=0}^{n} y_k$ *(équivalence des sommes partielles).*

(4) *Dans tout ce qui précède on peut remplacer* $\sim_n$ *par un petit o ou un grand O.*

(5) *Application : Théorème de Cesàro.*

(6) *Application : Montrer que* $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o(1/2n)$.

Exercice 3. ✿ *Nature de la série de terme général (convergence, convergence absolue)* $u_n = \frac{(-1)^n}{(n!)^{1/n}}$.

Exercice 4. ✿ *Nature de la série de terme général (convergence, convergence absolue)* $u_n = \sum_{K\geq n+1} \frac{(-1)^k}{k}$.

Exercice 5. ✿ *Déterminer tous les polynômes* $P \in \mathbb{R}[x]$ *tels que la série de terme général* $a_n = \left(n^{15} - \frac{n^{14}}{14} + \frac{n^5}{5}\right)^{1/15} - \sqrt[3]{P(n)}$ *converge.*

Exercice 6.
Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(\log n)}{n}$ *diverge*

(1) *en estimant la somme sur des blocs ou le cosinus est* $\geq \sqrt{2}/2$

(2) *en appliquant la formule* $\int_n^{n+1} f(t)dt = f(n) + \int_n^{n+1} (n+1-t)f'(t)dt$.

Exercice 7.

(1) *Montrer que la série* $\sum_{n\geq 0} 1/(3n)!$ *est convergente.*

(2) *Calculer pour tout entier* k *:* $1 + j^k + j^{2k}$ *où* $j = \exp(2i\pi/3)$.

(3) *En déduire que* $\sum_{n\geq 0} 1/(3n)! = (e + 2e^{-1/2}\cos(\sqrt{3}/2))/3$.

Exercice 8. *On pose* $a_n = \frac{\cos(2n\pi/3)}{\ln(n)}$. *Montrer que* $\sum_n a_n$ *converge (mais pas absolument) et que* $\sum_n a_n^p$ *diverge pour tout entier* $p \geq 2$.

Exercice 9. (1) *Existe-t-il* $(a_n) \subset \mathbb{R}_+^s$*tar telle que les séries* $\sum_n \frac{a_n}{n^3}$ *et* $\sum_n \frac{1}{a_n}$ *convergent ?*

(2) *Existe-t-il* $(a_n) \subset \mathbb{R}_+^s$*tar telle que les séries* $\sum_n \frac{a_n}{n^2}$ *et* $\sum_n \frac{1}{a_n}$ *convergent ?*

(3) Et si $(a_n) \subset \mathbb{R}$ *?*

26 mai 2017. Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, Université Paul Sabatier, .
Mèl : lassere@math.univ-toulouse.fr, Ouèb page : https://perso.math.univ-toulouse.fr/lassere/