CUPGE – Atelier Problèmes – Janvier 2018.

Équations différentielles linéaires du second ordre.

Exercice 1. *Résoudre les équations différentielles linéaires du second ordre :*

(1) *Résoudre* $y'' - y' + y = x^2 e^{-x}$, *[Sol.* $y(x) = e^{x/2}[\alpha \cos(x\sqrt{3}/2) + \beta \sin(x\sqrt{3}/2)] + e^{-x}(x^2/3 + 2x/3 + 4/9)]$.

(2) *Résoudre* $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$, *[Sol.* $y(x) = (x^2 + \alpha x + \beta)e^{-x}$*].*

(3) *Résoudre* $y'' + 3y' - 4y = e^{x}$, *[Sol.* $y(x) = (x/3 + \alpha)e^{x} + \beta e^{-4x}$*].*

Exercice 2. (1) *A l'aide du changement de variable* $z = xy$*, déterminer les solutions définies sur* $\mathbb{R}^\star$ *de l'équation différentielle* $xy'' + 2y' + xy = 0$.

(2) *Existe-t-il des solutions définies sur* $\mathbb{R}^\star$ *qui se prolongent continument sur* $\mathbb{R}$ *?*

(3) *Étudier l'existence de solutions sur tout* $\mathbb{R}$ *de l'équation différentielle.*

Exercice 3. *On considère l'équation :*

$$y'' + 2y' + 4y = xe^{x} \qquad (E)$$

(1) *Résoudre l'équation différentielle homogène associée à* (E).

(2) *Trouver une solution particulière de* (E)*, puis donner l'ensemble de toutes les solutions de* (E).

(3) *Déterminer l'unique solution* h *de* (E) *vérifiant* $h(0) = 1$ *et* $h(1) = 0$.

(4) *Soit* $f :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction deux fois dérivable sur* $]0, \infty[$ *et qui vérifie :*

$$t^2 f''(t) + 3tf'(t) + 4f(t) = t \log t.$$

(a) *On pose* $g(x) = f(e^x)$*, vérifier que* g *est solution de* (E).

(b) *En déduire une expression de* f.

Exercice 4. *Trouver les applications* $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *telles que*

$$(\text{✘}) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = 1 - \int_0^x (t + x) f(x - t)\, dt.$$

(on pourra commencer par faire apparaitre une équation différentielle, puis d'en chercher une solution développable en série entière...).

Systèmes différentiels linéaires du premier ordre.

Exercice 5. *Résoudre le système différentiel* $X' = AX$ *d'inconnue* $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ *avec*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. *Résoudre le système différentiel* $X' = AX + B(t)$ *d'inconnue* $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *avec*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & -4 \end{pmatrix} \text{ et } B(t) = \begin{pmatrix} -t \\ -2t + 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7. *Résoudre le système différentiel* $X' = AX$ *d'inconnue* $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *avec*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 8. *Résoudre le système différentiel $X' = AX$ d'inconnue $X\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ avec* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Solution : On calcule le polynôme caractéristique de A, on trouve $\chi_A(x) = (x-1)(x-2)(x^2+1) = (x-1)(x-2)(x+i)(x-i)$. A possède 4 valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable dans $\mathbb{C}$. On calcule les vecteurs propres associés, on trouve respectivement :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \quad V_{-i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}.$$

La solution générale du système est donc de la forme

$$\begin{aligned} X(t) &= \alpha_1 V_1 e^t + \alpha_2 V_2 e^{2t} + \alpha_3 V_i e^{it} + \alpha_4 V_{-i} e^{-it} \\ &= \begin{pmatrix} c_1 e^t + \alpha_3 e^{it} + \alpha_4 e^{-it} \\ c_1 e^t + c_2 e^{2t} \\ c_2 e^{2t} \\ \alpha_3 i e^{it} - \alpha_4 i e^{-it} \end{pmatrix}, \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Les solutions réelles s'en déduisent en prenant α_1, α_2 réels et α_3, α_4 complexes conjugués :

$$X(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^t + \alpha \cos(t) + \beta \sin(t) \\ c_1 e^t + c_2 e^{2t} \\ c_2 e^{2t} \\ -\alpha \sin(t) + \beta \cos(t) \end{pmatrix}, \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Exercice 9. *Résoudre le système différentiel* $X' = AX + B(t)$ *d'inconnue* $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *avec* $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ *et* $B(t) = \begin{pmatrix} -t \\ -2t+2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Solution : Il s'agit donc du système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) & = 3x(t) - 2y(t) - 4z(t) - t \\ y'(t) & = -2x(t) + 3y(t) + 2z(t) - 2t + 2 \\ z'(t) & = 3x(t) - 3y(t) - 4z(t) - 1 \end{cases}$$

Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(x) = -(x-2)(x-1)(x+1)$, la matrice A, carrée d'ordre 3 est donc diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$. On trouve sans peine les vecteurs propres :

$$V_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les solutions de l'équation sans second membre sont donc de la forme

$$X_0(t) = \begin{pmatrix} \alpha e^{-t} + \beta e^t \\ \beta e^t - 2\gamma e^{2t} \\ \alpha e^{-t} + \gamma e^{2t} \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Il reste à déterminer une solution particulière $X_p(t)$du système

$$\begin{cases} x'(t) & = 3x(t) - 2y(t) - 4z(t) - t \\ y'(t) & = -2x(t) + 3y(t) + 2z(t) - 2t + 2 \\ z'(t) & = 3x(t) - 3y(t) - 4z(t) - 1 \end{cases}$$

Vu $B(t)$, on la cherche sous la forme $x(t) = at + b, y(t) = a't + b', z(t) = a''t + b''$:

$$\begin{cases} a & = (3a - 2a' - 4a'' - 1)t + 3b - 2b' - 4b'' \\ a' & = (-2a + 3a' + 2a'' - 2)t + 2 - 2a + 3a' - 4a'' \\ a'' & = (3a - 3a' - 4a'')t - 1 + 3b - 3b' - 4b'' \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} 3a - 2a' - 4a'' & = 1 \\ -2a + 3a' + 2a'' & = 2 \\ 3a - 3a' - 4a'' & = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3b - 2b' - 4b'' & = a \\ 2a + 3a' - 4a'' & = a' - 2 \\ 3b - 3b' - 4b'' & = a'' + 1 \end{cases}$$

Le premier système donne $a = -1, a' = 1, a'' = -3/2$. On reporte dans le second système pour trouver $b = 1, b' = -1/2, b'' = 5/4$. Les solutions du système sont donc :

$$X(t) = \begin{pmatrix} \alpha e^{-t} + \beta e^t - t + 1 \\ \beta e^t - 2\gamma e^{2t} + t - 1/2 \\ \alpha e^{-t} + \gamma e^{2t} - 3t/2 + 5/4 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Remarque : A étant diagonalisable, on peut aussi écrire $A = PDP^{-1}$ si bien que l'équation s'écrit $X' = PDP^{-1}X + B$ ou $P^{-1}X' = (P^{-1}X)' = Y' = DP^{-1}X + P^{-1}B = DY + P^{-1}B$. On résout sans difficulté le nouveau système $Y' = DY + P^{-1}B$ car D est diagonale et on est amené à résoudre 3 équations linéaires d'ordre 1 et on en déduit $X = PY$, seul hic : calculer P^{-1}. Là on peut rajouter plus de chose au second membre $B(t)$.

Ici $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et le nouveau système s'écrit

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \\ w'(t) \end{pmatrix} = Dy(t) + B(t) = \begin{pmatrix} -u(t) - t \\ v(t) + te^t \\ 2w(t) + t - 1 \end{pmatrix}$$

on trouve alors sans peine :

$$\begin{cases} u(t) & = \alpha e^{-t} - t + 1 \\ v(t) & = (t^2/2 + \beta)e^t \\ w(t) & = -t/2 + 1/4 + \gamma e^{2t} \end{cases}$$

puis on retrouve la solution trouvé par la méthode précédente :

$$X(t) = PY(t) = \begin{pmatrix} \alpha e^{-t} + \beta e^t - t + 1 \\ \beta e^t - 2\gamma e^{2t} + t - 1/2 \\ \alpha e^{-t} + \gamma e^{2t} - 3t/2 + 5/4 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Exercice 10. *Résoudre le système différentiel $X' = AX$ d'inconnue $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ avec*
$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

Solution : Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(x) = -(x+2)(x-4)^2$. On a donc une valeur propre simple -2 et une double 4. Un petit calcul montre que les deux sous espaces propres sont de dimension 1 engendrés respectivement par

$$V_{-2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A n'est donc pas diagonalisable. On va la triangulariser ; pour cela, il faut trouver donc une base de la forme (V_4, W, V_{-2}) telle que la matrice de A dans cette base soit de la forme

$$\begin{pmatrix} 4 & \alpha & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Le vecteur W doit donc vérifier $AW = \alpha V_4 + 4W$. soit

$$\begin{cases} x - 3y - 4 & z = \alpha \\ -x - 3y - 2z & = -\alpha \\ x - 3y - 4 & z = \alpha \end{cases}$$

on trouve $x = z + \alpha, y = -z$. Les solutions sont donc de la forme

$$W = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z + \alpha \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$z = -1$ et $\alpha = 2$ donnent par exemple $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. On a alors $A = PTP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Le système s'écrit alors $X' = PTP^{-1}X \iff Y' = TY$ avec $Y = P^{-1}X$, soit si u, v, w sont les coordonnées de Y : $\begin{cases} u' & = 4u + 2v \\ v' & = 4v \\ w' & = -2w \end{cases}$ qui donne facilement $u(t) = (2\alpha t + \beta)e^{4t}, v(t) = \beta e^{4t}, w(t) = \gamma e^{-2t}$. Et finalement :

$$X(t) = PY(t) = \begin{pmatrix} (2\beta t + \alpha + \beta)e^{4t} + \gamma e^{-2t} \\ (-2\beta t - \alpha + \beta)e^{4t} + \gamma e^{-2t} \\ (2\beta t + \alpha - \beta)e^{4t} + \gamma e^{-2t} \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Exercice 11. *On considère l'équation :*

$$y'' + 2y' + 4y = xe^x \qquad (E)$$

(1) Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E).

(2) Trouver une solution particulière de (E) , puis donner l'ensemble de toutes les solutions de (E).

(3) Déterminer l'unique solution h de (E) vérifiant $h(0) = 1$ et $h(1) = 0$.

(4) Soit $f :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur $]0, \infty[$ et qui vérifie :

$$t^2 f''(t) + 3tf'(t) + 4f(t) = t \log t.$$

(a) On pose $g(x) = f(e^x)$, vérifier que g est solution de (E).

(b) En déduire une expression de f.

Solution :

(1) Le polynôme caractéristique associé à E est : $p(x) = x^2 + 2x + 4$; son discriminant est $\Delta = -12$ et il a pour racines les 2 nombres complexes $-1+i\sqrt{3}$ et $-1-i\sqrt{3}$. Les solutions de l'équation homogène sont donc toutes fonctions :

$$y(x) = e^{-x}(a \cos \sqrt{3}x + b \sin \sqrt{3}x)$$

obtenues lorsque a, b décrivent $\mathbb{R}$.

(2) Le second membre est de la forme $e^{\lambda x}Q(x)$ avec $\lambda = 1$ et $Q(x) = x$. On cherchera une solution de l'équation sous la forme : $y_p(x) = R(x)e^x$ avec R polynôme de degré égal à celui de Q puisque $p(1) \neq 0$. On pose donc $R(x) = ax + b$. On a

$$y_p''(x) + 2y_p'(x) + 4y_p(x) = (7ax + 7b + 4a)e^x.$$

Donc y_p est solution si et seulement si $7ax + 7a + 4b = x$. On trouve après identification des coefficients : $a = \frac{1}{7}$ et $b = \frac{-4}{49}$.
La fonction $y_p(x) = \frac{1}{7}(x - \frac{4}{7})e^x$ est donc solution de E et la forme générale des solutions de E est : $y(x) = e^{-x}(a \cos \sqrt{3}x + b \sin \sqrt{3}x) + \frac{1}{7}(x - \frac{4}{7})e^x$; $a, b \in \mathbb{R}$.

(3) Soit h une solution de E. Les conditions $h(0) = 1$, $h(1) = 0$ sont réalisées ssi

$$a = \frac{53}{49} \qquad \text{et} \qquad b = -\frac{53 \cos \sqrt{3} + 3e^2}{49 \sin \sqrt{3}}.$$

(4)(a) On a : $g'(x) = e^x f'(e^x)$ et $g''(x) = e^x f'(e^x) + e^{2x} f''(e^x)$ d'où pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g''(x) + 2g'(x) + 4g(x) = e^{2x} f''(e^x) + 2e^x f'(e^x) + 4f(e^x) = e^x \log e^x = xe^x$$

donc g est solution de E.

(b) Réciproquement pour $f(t) = g(\log t)$ où g est une solution de E on montre que f est 2 fois dérivable et vérifie l'équation donnée en 4. Donc les fonctions f recherchées sont de la forme :

$$\frac{1}{t}(a \cos (\sqrt{3} \log t) + b \sin (\sqrt{3} \log t)) + \frac{t}{7}(\log t - \frac{4}{7}) \ ; \ a, b \in \mathbb{R}.$$

■

Exercice 12. *Trouver les applications $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que*

$$(\text{✘}) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = 1 - \int_0^x (t+x)f(x-t)dt.$$

Solution : Le changement de variable $u = x - t$ assure que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et légitimiste une dérivation de l'équation (✘) qui devient

$$f'(x) + xf(x) + 2\int_0^x f(u)du = 0, \qquad \& \quad f(0) = 1.$$

La fonction $F(x) = \int_0^x f(u)du$ est classe $\mathscr{C}^2$ et vérifie $F' = f$. Il est donc équivalent de résoudre l'équation différentielle

$$(\text{✔}) \qquad \begin{cases} F''(x) + xF'(x) + 2F(x) = 0 \\ F(0) = 0 \quad \text{et} \quad F'(0) = 1. \end{cases}$$

La recherche d'un solution développable en série entière $\sum_n a_n x^n$ de cette dernière conduit aux relations

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+1}, \qquad a_0 = 1,\ a_1 = 1$$

qui elles même conduisent à

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad a_{2n} = 0,\ a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{2^n n!}$$

soit

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} x^{2n+1} = x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

L'application $x \mapsto xe^{-x^2/2}$ vérifie (✔) et le théorème de Cauchy-Lipschitz permet d'affirmer que c'est la seule. Par conséquent, la seule solution continue f du problème (✘) est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = F'(x) = (1 - x^2)\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

■

Exercice 13. *(1) A l'aide du changement de variable $z = xy$, déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}^\star$ de l'équation différentielle $xy'' + 2y' + xy = 0$.*

(2) Existe-t-il des solutions définies sur $\mathbb{R}^\star$ qui se prolongent continument sur $\mathbb{R}$?

(3) Étudier l'existence de solutions sur tout $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle.

Solution :

(1) $z = xy$ vérifie $z'' + z = 0$ et on trouve $y(x) = \frac{1+\alpha\cos(x)+\beta\sin(x)}{x}$ pour $x > 0$ et $y(x) = \frac{1+\gamma\cos(x)+\delta\sin(x)}{x}$ pour $x < 0$.

(2) $y_\beta(x) = \frac{1-\cos(x)+\beta\sin(x)}{x}$ pour $x \neq 0$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}^\star$ et continue sur $\mathbb{R}$ si on pose $y_\beta(0) = \beta$.

(3) Avec les les DL on vérifie que y_β est dérivable en 0 avec $y'_\beta(0) = 1/2$ (regarder son taux d'accroissement ou montrer l'existence d'un $DL_1(0)$) puis avec le taux d'accroissement de y'_β elle y est deux fois dérivable avec $y''(0) = -\beta/3$, et ceci pour tout réel β.

■