CUPGE – Atelier Problèmes – Janvier 2018.

Équations différentielles du premier ordre.

Exercice 1. *Résoudre et tracer les courbes intégrales des équations différentielles :*

(1) $x + yy' = 0$.

(2) $xy' + 3y = 0$.

Exercice 2. *On considère le problème de Cauchy* (E) : $(1+x^3)y' - y = 0, \quad y(1) = 1$.

(1) Montrer que (E) *admet une solution u définie sur* $]-1,+\infty[$ *à valeurs strictement positives.*

(2) Montrer que $u(x) = \left(\frac{x+1}{2}\right)^{1/3}(x^2-x+1)^{-1/6}\exp\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\left[\mathrm{Arctan}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{\pi}{6}\right]\right)$.

Exercice 3. *On considère le problème de Cauchy* (E) : $(1+x^2)y' + (\cos(x)+\sin(x))y = x, \quad y(0) = 1$.

(1) Montrer que (E) *admet une solution u définie sur $\mathbb{R}$ de classe C^∞.*

(2) Sans calculer u, déterminer le développement limité de u à l'ordre 3 à l'origine.

Exercice 4. *Montrer que l'équation différentielle $y' - y = e^{-x^2}$ possède une unique solution $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que* $\lim_{x\to-\infty} u(x) = \lim_{x\to+\infty} u(x) = 0$.

Exercice 5. *Résoudre l'équation différentielle $\sqrt{|x|}y' - y = x$ dans chacun des intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$ et montrer qu'il existe une unique solution de cette équation différentielle qui est définie sur tout $\mathbb{R}$.*

Exercice 6. *Soit $\varphi \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ et l'équation différentielle :* (E) $\qquad xy' + y = \varphi$.

(1) Résoudre (E) *sur $\mathbb{R}_+^\star$ et $\mathbb{R}_-^\star$ et enfin sur $\mathbb{R}^\star$.*

(2) Montrer que (E) *admet une et une seule solution sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 7. *Soit l'équation différentielle :* (E) $\qquad xy' - 3y = 0$.

(1) Résoudre (E) *sur $\mathbb{R}_+^\star$ et $\mathbb{R}_-^\star$ et vérifier que sur ces deux intervalles l'ensemble des solutions est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension* 1.

(2) Montrer que (E) *admet des solutions sur tout $\mathbb{R}$ et que l'ensemble de ces solutions constitue un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension* 2.

Exercice 8. *Soit $a > 0$. Déterminer les fonctions $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+^\star, \mathbb{R}_+^\star)$ solutions de l'équation fonctionnelle :* $f'\left(\frac{a}{x}\right) = \frac{x}{f(x)}, \forall x \in \mathbb{R}_+^\star$. [**Indic :** commencer par considérer $g(x) = f(x)f\left(\frac{a}{x}\right)$...]

Exercice 9. *Résoudre l'équation* (E) : $x^2y' + y = x^2$ *sur $\mathbb{R}_+^\star$ et étudier la limite des solutions en 0_+. Existe-t-il des solutions sur $\mathbb{R}_+$?*

Exercice 10. *On considère l'équation différentielle* (E) : $\quad y'(x^2-1) + xy = 1$.

(1) Résoudre l'équation homogène associée.

(2) Déterminer toutes les solutions de (E) *par la méthode de la variation de la constante (distinguer les cas $|x| < 1$ et $|x| > 1$.*

Exercice 11. (équations homogène). *Une équation différentielle d'ordre 1 est dite* ***homogène*** *si elle s'écrit sous la forme $y' = f(y/x)$ où f est une fonction. On peut alors se ramener à une équation à variables séparables par le changement de variable $t = y/x$ (ou $y = tx$). Exemples :*

(1) (E) $x^2y' = x^2 + y^2 - xy$. [**Solution :** $y(x) = x$ et $y(x) = x - x/\ln|Cx|$, $C > 0$].

(2) (E) $2xyy' = x^2 + y^2$. [**Solution :** $y(x) = \pm x$ et $y(x) = \pm\sqrt{|Cx - x^2|}$].

Exercice 12. (équations de Bernoulli). *Une équation différentielle d'ordre* 1 *est dite de **Bernoulli** si elle s'écrit sous la forme* $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)y^m(x)$ *où* a, b *sont deux fonctions et* m *une constante différente de* 0 *et* 1. *On peut alors se ramener à une équation linéaire du premier ordre par le changement de variable* $z = 1/y^{m-1}$.

(1) Vérifier que c'est bien le cas.

(2) Résoudre (E) $xy' + 3y = x^2y^2$.

(3) Résoudre (E) $y' + \text{cotan}(x)y + y^3 = 0$.

Exercice 13. (équations de Riccati). *Une équation différentielle d'ordre* 1 *est dite de **Riccati** si elle s'écrit sous la forme* $y'(x) = a(x)y^2(x) + b(x)y(x) + c(x)$ *où* a, b, c *sont trois fonctions. Si on connait une solution particulière* y_1, *on peut alors se ramener à une équation de Bernoulli par le changement de variable* $z = y + y_1$. *Exemples :*

(1) Vérifier que c'est bien le cas.

(2) Résoudre (E) $y' + y^2 = \dfrac{1}{4x^2}$ *sachant quelle admet la solution particulière* $y_1(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}$.

(3) Résoudre (E) $y' = \dfrac{1}{x} \cdot y^2 - \left(2 + \dfrac{1}{x}\right) y + x + 2$ *sachant quelle admet la solution particulière* $y_1(x) = x$.

Exercice 14. (application). *Soit* (O, i, j) *un repère orthonormé du plan euclidien. Déterminer l'ensemble des courbes (graphes de fonctions régulières) telles que si* M *est un point sur la courbe et* N *désigne l'intersection de la normale en* M *à la courbe et de l'axe* O_x, *le milieu* I *de* MN *décrit la parabole d'équation* $y^2 = 2px$.

Exercice 15. (application). *Un élastique à une extrémité fixe* O *et une extrémité mobile* M. *On étire l'élastique par le point* M *à une vitesse constante et égale à* v. *A l'instant* $t = 0$, *la longueur de l'élastique est* l. *Une fourmi* F *marche sur l'élastique à vitesse constante* w *et à l'instant* $t = 0$, *la fourmi est au point* O. *La fourmi arrivera-t-elle en* M *?*

Exercice 16. (application : l'équation logistique). *L'équation logistique est l'équation différentielle* (E) $N'(t) = rN(t)[1 - \frac{N(t)}{K}] = rN(t) - r\frac{N^2(t)}{K}$ *où* r *et* K *sont deux réels positifs. Elle modélise l'évolution au cours du temps d'une population évoluant en milieu fermé. Le terme* $rN(t)$ *signifie que la population a une tendance naturelle à l'accroissement, tandis que le terme* $-rN^2(t)/K$ *donne une limite à cette accroissement, en raison des ressources limitées de ce milieu fermé.*

(1) Montrer que sans le second terme, le modèle n'est pas raisonnable.

(2) Résoudre l'équation logistique et donner l'allure des courbes intégrales. Interpréter ce que vous observez.

(3) Le graphique ci-dessous montrer l'évolution au cours du temps du nombres d'éléphants dans un parc naturel d'Afrique du sud. Montrer que cette évolution peut être modélisée par une équation logistique dont on donnera une valeur approchée des paramètres.

t	1905	1923	1930	1939	1945	1950	1960	1970	1980	1990	2000
$N^{obs}(t)$	10	13	29	450	980	3010	5800	6500	7400	7200	7310

Répartition par groupes des exercices.

- **Groupe 1 : Exercice 2 et Exercice 15.**
- **Groupe 2 : Exercice 3 et Exercice 16.**
- **Groupe 3 : Exercice 4 et Exercice 14.**
- **Groupe 4 : Exercice 5 et Exercice 15.**
- **Groupe 5 : Exercice 6 et Exercice 16.**
- **Groupe 6 : Exercice 7 et Exercice 14.**
- **Groupe 7 : Exercice 8 et Exercice 15.**
- **Groupe 8 : Exercice 9 et Exercice 16.**
- **Groupe 9 : Exercice 10 et Exercice 14.**
- **Groupe 10 : Exercice 13 et Exercice 15.**