# CUPGE – Atelier Problèmes – Février 2018.

Équations différentielles non linéaires et Cauchy-Lipschitz.

**Exercice 1.** *Un peu de théorie.*

(1) *Montrer que le problème de Cauchy :* $y'(t) = \sqrt{|y(t)|}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad y(0) = 0$ *possède une infinité de solutions définies sur* $\mathbb{R}$*. Pourquoi le théorème de Cauchy-Lipschitz ne s'applique-t-il pas ici ? Montrer que* $h(t) = \sqrt{|t|}$ *n'est pas lipschitzienne au voisinage de l'origine.*

(2) *Soit* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* $C^1$*, et* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *deux solutions maximales de l'équation différentielle* $y' = F(t, y)$*. On suppose qu'il existe* $t_0 \in \mathbb{R}$ *tel que* $f(t_0) < g(t_0)$*. Montrer que pour tout* $t \in \mathbb{R}$*, on a* $f(t) < g(t)$*.*

(3) *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* $C^1$ *sur l'intervalle* $I$*. Montrer que toute solution non constante de* $y' = f(y)$ *est strictement monotone.*

**Exercice 2.** *On considère l'équation différentielle* $y' = x^2 + y^2$*.*

(1) *Justifier l'existence d'une solution maximale* $y$ *vérifiant* $y(0) = 0$*.*

(2) *Montrer que* $y$ *est une fonction impaire.*

(3) *Étudier la monotonie et la convexité de* $y$*.*

(4) *Démontrer que* $y$ *est définie sur un intervalle borné de* $\mathbb{R}$*.*

(5) *Étudier le comportement de* $y$ *aux bornes de son intervalle de définition.*

**Exercice 3.** *Trouver les solutions maximales de l'équation différentielle* $y' = y(y-1) \quad (\bigstar)$ *et esquisser le graphe des solutions.*

**Exercice 4.** *Montrer que les solutions maximales de l'équation différentielle* $y' = y^2 \sin^2(y) \quad (\bigstar)$ *sont bornées et définies sur* $\mathbb{R}$ *tout entier et esquisser le graphe des solutions.*

**Exercice 5.** *On considère l'équation différentielle :* $xy' = x + y^2, \quad x \in \mathbb{R}_+^\star$*.*

(1) *Montrer que les solutions sont définies sur des intervalles bornés.*

(2) *Montrer que toute solution maximale possède un intervalle de définition qui est soit de la forme* $]a, b[, \ a > 0$ *(étudier alors le comportement de la solution en* $a$ *et* $b$*) soit de la forme* $]0, b[$ *(étudier alors le comportement de la solution en* $0$ *et* $b$*).*

**Exercice 6.** *Montrer que la solution maximale* $f$ *du problème de Cauchy :* $y' = \exp(-xy)$*,* $y(0) = 0$ *est impaire, définie sur* $\mathbb{R}$ *et admet en* $+\infty$ *une limite* $l \in [1, 1 + e^{-1}]$

**Exercice 7.** *Soit* $y$ *la solution maximale de l'équation* $y' = x^3 + y^3$ *telle que* $y(0) = a \geq 0$*, et* $I = ]\alpha, \beta[$ *son intervalle de définition.*

(1) *Montrer que* $y$ *est strictement croissante sur* $[0, \beta[$

(2) *Montrer que* $\beta < +\infty$*.*

(3) *Montrer que* $\lim_{x \to \beta_-} y(x) = +\infty$*.*

**Exercice 8.** (1) *Résoudre sur tout intervalle* $I$ *l'équation* $yy' - y' = e^x$ *en précisant les solutions maximales.*

(2) *Même question avec* $y' = 2x(1 + y^2)$*.*