Atelier Problèmes – Oral Feuille 1 – Janvier 2020.

(1) Déterminer les conditions sur les réels $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ pour que la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$
soit diagonalisable.

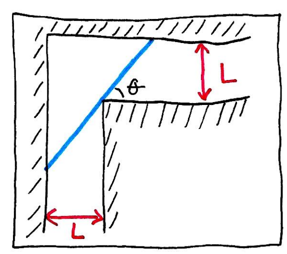
(2) Déterminer de deux manières différentes le coefficient de x^n dans la dérivée n-ième de $x^n(1-x)^n$. En déduire que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$. Redémontrer cette égalité par un argument combinatoire.

(3) Donner une équation cartésienne de la droite de $\mathbb{R}^2$ définie par la représentation paramétrique $x = 3 + 2t, y = 1 - t$.
Donner une représentation paramétrique de la droite de $\mathbb{R}^2$ d'équation cartésienne : $2x - 3y = 4$.

(4) Montrer que $\lim\limits_{x \to 5} (6-x)^{1/(x-5)} = e^{-1}$.

(5) Pour quels couples $(a, b) \in \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}_+^\star$ l'intégrale impropre ci dessous est-elle convergente ?
$$\int_b^\infty \left(\sqrt{\sqrt{x+a} - \sqrt{x}} - \sqrt{\sqrt{x} - \sqrt{x-b}} \right) dx$$

(6) Un couloir de largeur L fait un angle droit. Déterminer la longueur maximale d'une plaque de verre (supposée d'épaisseur nulle) capable de passer le coin.



(7) Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$ vérifiant $f(f(x)) = -x$ pour tout réel x.

(8) Dans l'espace affine de dimension 3 muni d'un repère orthonormé on considère les deux droites
$$(\mathscr{D}) \begin{cases} x &= 4z - 1, \\ y &= 2z + 3 \end{cases}, \quad (\mathscr{D}') \begin{cases} x &= -z + 2, \\ y &= 2z - 1. \end{cases}$$
Déterminer un système d'équation cartésiennes définissant la perpendiculaire commune Δ aux deux droites. En déduire la distance entre ces deux droites.

(9) Montrer qu'une matrice de rang 1 est diagonalisable si et seulement si sa trace est non nulle.

(10) Donner un DL à l'ordre 3 au voisinage de 1 de $f(x) = x^{-2} \log(1+x)$ et à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $f(x) = \log(\log(e+x))$.

(11)(a) Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ un polynôme non constant. Existe-t-il toujours un réel λ tel que $P - \lambda$ soit scindé dans $\mathbb{R}$ à racines simples ?

(b) Soit $P \in \mathbb{C}[x]$ un polynôme non constant. Existe-t-il toujours un complexe λ tel que $P - \lambda$ soit scindé dans $\mathbb{C}$ à racines simples ?

(12) f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ majorée et convexe, montrer que f est constante.

Petit Corrigé.

(1) Déterminer les conditions sur les réels $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ pour que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

soit diagonalisable.

Solution : • Les valeurs propres de A sont $1, 2, d$, par conséquent, si $\boxed{d \in \mathbb{R} \setminus \{1,2\}}$, A sera diagonalisable car ses valeurs propres sont deux à deux distinctes.
Il reste à étudier les deux cas $d = 1$ et $d = 2$.
• Si $\boxed{d = 1}$. A sera diagonalisable si et seulement si le rang de $A - I_3$ vaut 1 (ie $\dim\ker(A - I_3) = 2$), or

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \Big(\text{rang}(A - I_3) = 1 \iff \boxed{b = ac} \Big).$$

• Si $\boxed{d = 2}$. A sera diagonalisable si et seulement si le rang de $A - 2I_3$ vaut 1 (ie $\dim\ker(A - 2I_3) = 2$), or

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \Big(\text{rang}(A - 2I_3) = 1 \iff \boxed{c = 0} \Big).$$

• En résumé, A sera diagonalisable si et seulement si $X = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ satisfait à l'un des trois cas suivants :

$$\boxed{\begin{array}{ll} - & X = (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \setminus \{1,2\}, \\ - & X = (a, ac, c, 1) \in \mathbb{R}^4, \\ - & X = (a, b, 0, 2) \in \mathbb{R}^4. \end{array}}$$

■

(2) Déterminer de deux manières différentes le coefficient de x^n dans la dérivée n-ième de $x^n(1-x)^n$. En déduire que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$. Redémontrer cette égalité par un argument combinatoire.

Solution : • Par la formule de Leibnitz

$$\begin{aligned}
F^{(n)}(x) = (x^n(1-x)^n)^{(n)} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x^n)^{(n-k)} \left((1-x)^n\right)^{(k)} \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} n(n-1)\cdots(n-(n-k)+1)x^{n-(n-k)}(-1)^k n\cdots(n-k+1)(1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} n(n-1)\cdots(k+1)x^k(-1)^k n\cdots(n-k+1)(1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{n!}{k!} \cdot x^k(-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} \cdot (1-x)^{n-k} \\
&= n! \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (-1)^k x^k (1-x)^{n-k}.
\end{aligned}$$

Le coefficient de x^n est donc $\quad n!(-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

D'un autre coté $F(x)$ est un polynôme de degré $2n$ de coefficient dominant :

$$F(x) = (-1)^n x^{2n} + \dots,$$

Par conséquent $F^{(n)}(x)$ sera un polynôme de degré n avec pour coefficient dominant

$$(-1)^n(2n)(2n-1)\cdots(2n-n+1) = (-1)^n 2n(2n-1)\cdots n+1) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}.$$

Il ne reste plus qu'à identifier les deux expressions du coefficient de x^n :

$$= (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} = n!(-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2,$$

pour trouver

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

- On peut aussi faire de même avec $(x^{2n})^{(n)}$.
- $\binom{2n}{n}$ est le nombre de manière de choisir n boules parmi $2n$.

Maintenant, imaginons que n ces $2n$ boules soient noires et les autres blanches. Alors le nombre de manière de choisir n boules parmi $2n$ est le nombre de manière de choisir k boules noires parmi les n noires et $n-k$ blanches parmi les n et ceci pour tout $k = 0, \dots, n$ soit :

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

CQFD. ■

(3) Donner une équation cartésienne de la droite de $\mathbb{R}^2$ définie par la représentation paramétrique $x = 3 + 2t, y = 1 - t,\ (t \in \mathbb{R})$.
Donner une représentation paramétrique de la droite de $\mathbb{R}^2$ d'équation cartésienne : $2x - 3y = 4$.
Solution : $x - 3 + 2(y-1) = 0$ et pour la seconde $x = 2 + 3t, y = 2t, (t \in \mathbb{R})$.

(4) Montrer que $\quad \lim_{x \to 5} (6-x)^{1/(x-5)} = e^{-1}$.
Solution : Se ramener en 0 via $x = 5 + h$ puis DL classiques.

(5) Pour quels couples $(a, b) \in \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}_+^\star$ l'intégrale impropre

$$\int_b^\infty \left(\sqrt{\sqrt{x+a} - \sqrt{x}} - \sqrt{\sqrt{x} - \sqrt{x-b}} \right) dx$$

converge ?
Solution : L'intégrale est visiblement impropre uniquement en $+\infty$, en utilisant répétitivement le développement limité $\sqrt{1+t} = 1 + t/2 + O(t^2)$ on a

$$\sqrt{\sqrt{x+a} - \sqrt{x}} = x^{1/4} \sqrt{\sqrt{1 + \frac{a}{x}} - 1} = x^{1/4} \sqrt{\frac{a}{2x} + O(x^{-2})} = \sqrt{\frac{a}{2}} x^{-1/4}(1 + O(x^{-1}))$$

et

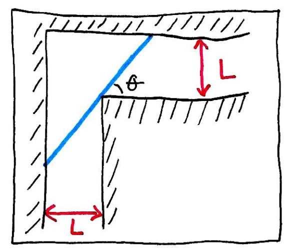
$$\sqrt{\sqrt{x} - \sqrt{x-b}} = x^{1/4} \sqrt{1 - \sqrt{1 - \frac{b}{x}}} = x^{1/4} \sqrt{\frac{b}{2x} + O(x^{-2})} = \sqrt{\frac{b}{2}} x^{-1/4}(1 + O(x^{-1})).$$

Donc au voisinage de $+\infty$ l'intégrande est équivalent à la fonction de signe constant (toujours au voisinage de $+\infty$

$$\left(\sqrt{\frac{a}{2}}-\sqrt{\frac{b}{2}}\right)x^{-1/4}+O(x^{-5/4}),$$

et comme $\int_b^\infty x^{-5/4}dx$ (car $b>0$) converge, notre intégrale sera convergente si et seulement si $\int_b^\infty(\sqrt{a/2}-\sqrt{b/2})x^{-1/4}dx$ converge soit, si et seulement si $a=b$ puisque $\int_b^\infty x^{-1/4}dx$ diverge. ■

(6) Un couloir de largeur L fait un angle droit. Déterminer la longueur maximale d'une plaque de verre (supposée d'épaisseur nulle) capable de passer le coin.



Solution : Il s'agit parmi tous les segments AB touchant le point O comme sur la figure de déterminer celui qui possède une longueur minimale (sinon ca passe pas !).
Pour $\alpha\in]0,\pi/2[$, posons $f(\alpha)=AB$ et déterminons donc $\inf_{\alpha\in]0,\pi/2[}f(\alpha)$.
Avec un peu de géométrie

$$f(\alpha)=AO+OB=\frac{a}{\sin(\alpha)}+\frac{a}{\sin(\alpha)}.$$

$f'(\alpha)=0$ si et seulement si $\alpha=\pi/4$ et l'étude des variation de f assure bien que ce point critique est un minimum global pour f sur $]0,\pi/2[$.
La longueur maximale est donc $f(\pi/2)=2a\sqrt{2}$. ■

(7) Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f\in\mathscr{C}(\mathbb{R})$ vérifiant $f(f(x))=-x$ pour tout réel x.
Solution : On vérifie facilement que f est alors injective. Si elle est de plus continue alors avec le cours, elle est soit strictement croissante soit strictement décroissante mais dans les deux cas (vérifiez le !) $f\circ f$ sera strictement croissante ce qui est absurde puisque $f\circ f(x)=-x$ pour tout réel x ! CQFD. ■

(8) Dans l'espace affine de dimension 3 muni d'un repère orthonormé on considère les deux droites

$$(\mathscr{D})\ \begin{cases}x&=4z-1,\\ y&=2z+3\end{cases},\quad(\mathscr{D}')\ \begin{cases}x&=-z+2,\\ y&=2z-1.\end{cases}$$

Déterminer un système d'équation cartésiennes définissant la perpendiculaire commune Δ aux deux droites. En déduire la distance entre ces deux droites.
Solution : • Comme intersection de deux plans non parallèles $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont bien deux droites. On commence par déterminer un vecteur directeur pour $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$:

$$\overrightarrow{u_{\mathscr{D}}}=\begin{pmatrix}1\\0\\-4\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix},\quad\overrightarrow{u_{\mathscr{D}'}}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}.$$

Donc un vecteur directeur de la perpendiculaire commune aux deux droites est

$$\overrightarrow{u_\Delta} = \begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-5\\10\end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}.$$

Maintenant, on sait que Δ est l'intersection du plan $\mathscr{P}$ contenant $\mathscr{D}$ et parallèle à $\overrightarrow{u_\Delta}$ et du plan $\mathscr{P}'$ contenant $\mathscr{D}'$ et parallèle à $\overrightarrow{u_\Delta}$. Déterminons les équations de ces deux plans : Le point $A = (-1, 3, 0)$ est dans $\mathscr{D}$ donc dans $\mathscr{P}$ qui est dirigé par $\overrightarrow{u_\Delta}$ et $\overrightarrow{u_\mathscr{D}}$; par conséquent, un point $M = (x, y, z)$ sera dans $\mathscr{P}$ si, et seulement si la famille $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u_\Delta}, \overrightarrow{u_\mathscr{D}}$ est libre i.e.

$$\begin{vmatrix} x+1 & 4 & 0 \\ y-3 & 2 & -1 \\ z & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 = 5x - 8y - 4z + 29.$$

De même, l'équation de $\mathscr{P}'$ est $5x + 2y + z - 8 = 0$. Ainsi, la droite Δ est définie par les équations

$$(\Delta) \begin{cases} 5x - 8y - 4z &= -29, \\ 5x + 2y + z &= 8. \end{cases}.$$

• La distance entre les deux droites est $\|\overrightarrow{HH'}\|$ où H est le point d'intersection entre les droites $\mathscr{D}$ et Δ et H' le point d'intersection entre les droites $\mathscr{D}'$ et Δ. Pour déterminer cette quantité, si $A \in \mathscr{D}$, $A' \in \mathscr{D}'$ alors $\overrightarrow{AA'}\overrightarrow{u_\Delta} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{H'A'})\overrightarrow{u_\Delta} = \overrightarrow{HH'}\overrightarrow{u_\Delta}$ soit, puisque les vecteurs $\overrightarrow{HH'}$ et $\overrightarrow{u_\Delta}$ sont colinéaires $|\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{u_\Delta}| = \|\overrightarrow{HH'}\| \cdot \|\overrightarrow{u_\Delta}\|$. En faisant $z = 1$ on peut choisir $A = (3, 5, 1) \in \mathscr{D}$ et $A' = (1, 1, 1) \in \mathscr{D}'$. On a

$$\|\overrightarrow{HH'}\| = \frac{|\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{u_\Delta}|}{\|\overrightarrow{u_\Delta}\|} = \frac{6}{\sqrt{5}}.$$

■

(9) Montrer qu'une matrice de rang 1 est diagonalisable si et seulement si sa trace est non nulle.
Solution : A étant de rang 1, choisissons $e \in \mathbb{R}^n$ tel que $\mathrm{Im}(A) = \langle e \rangle$ et complétons pour obtenir une base $\mathscr{B} = \{e, e_2, \dots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$. Dans la base $\mathscr{B}$ la matrice A est de la forme

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

• On en déduit aussi que A sera diagonalisable si et seulement si la trace de A est non nulle car elle est de rang $n-1$ alors que son polynôme caractéristique est de la forme (au signe près $x^{n-1}(a_1 - x)$. ■

(10) Donner un DL à l'ordre 3 au voisinage de 1 de $f(x) = x^{-2}\log(1+x)$ et à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $f(x) = \log(\log(e+x))$.
Solution : Classique mais essentiel... ■

(11)(a) Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ un polynôme non constant. Existe-t-il toujours un réel λ tel que $P - \lambda$ soit scindé dans $\mathbb{R}$ à racines simples ?

(b) Soit $P \in \mathbb{C}[x]$ un polynôme non constant. Existe-t-il toujours un complexe λ tel que $P - \lambda$ soit scindé dans $\mathbb{C}$ à racines simples ?

(a) C'est faux. Si un tel $\lambda \in \mathbb{R}$ existe, notons $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$ les racines de $Q = P - \lambda$. Avec Rolle, $Q' = P'$ admet $n-1$ racines distinctes, P' est donc scindé à racines simples ce qui n'est pas toujours le cas, par exemple : $P(x) = x^3$.

(b) L'argument précédent (Rolle) ne marche plus.
Soient $P \in \mathbb{C}[x]$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, si $Q = P - \lambda$ admet une racine multiple $z_0 \in \mathbb{C}$, alors $Q(z_0) = Q'(z_0) = 0$, donc $P'(z_0) = 0$ et $\lambda = P(z_0)$. Par conséquent si P n'a pas que des racines simples (auquel cas $\lambda = 0$ convient) et si on choisit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{P(z_0), \text{avec } P'(z_0) = 0\}$ on est assuré que toutes les racines de $P - \lambda$ seront simples. ∎

(12) f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ majorée et convexe, montrer que f est constante.
Solution : • Si f n'est pas constante, on peut trouver $a \in \mathbb{R}$ tel que $f'(a) \neq 0$ et la formule de Taylor-Lagrange nous donne

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, \zeta_x \in (a, x) \quad : \quad f(x+a) = f(a) + xf'(a) + \frac{x^2}{2} f''(\zeta_x) \geq f(a) + xf'(a)$$

la dernière inégalité résultant du fait que (f deux fois dérivable et convexe) $\Longrightarrow$ $(f'' \geq 0)$. Si par exemple $f'(a) > 0$ on obtient alors une contradiction en faisant tendre x vers $+\infty$ (et vers $-\infty$ si $f'(a) < 0$...)
• On déduit aussi de cette preuve que « f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et convexe, alors son graphe est au dessus de ses tangentes. » ∎