Atelier Problèmes – Oral Feuille 2 – Février 2020.

(1) Montrer que le déterminant d'une matrice antisymétrique réelle est positif ou nul.

(2) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente. Si ${}^t\!AA = A\,{}^t\!A$, montrer que A est la matrice nulle.

(3) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 - A - I_n = O_{M_n(\mathbb{R})}$. Montrer que $\det(A) > 0$.

(4) Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres respectifs $p, q \in]0,1[$.
Quelle est la probabilité que la matrice
$$A = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$$
soit diagonalisable ?

(5) Discuter suivant les valeurs du réel $a \neq 0$ la convergence de la série de terme général
$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n}$$

(6) Existe-t-il une fonction $f \in \mathscr{C}^2([-1,1], \mathbb{R})$ vérifiant
$$\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{converge et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right| \quad \text{diverge.}$$

(7) Soit $f \in \mathscr{C}([0,1])$ une application vérifiant $\int_0^1 t^n f(t)dt = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Montrer que f est identiquement nulle.

Petit Corrigé.

(1) Montrer que le déterminant d'une matrice antisymétrique réelle est positif ou nul.
Solution : Soit A une matrice antisymétrique réelle. Le déterminant de A est le produit des valeurs propres complexes comptées avec multiplicité. Puisque la matrice A est réelle, ses valeurs propres complexes non réelles sont deux à deux conjuguées et forment donc un produit positif. Il reste à étudier les valeurs propres réelles de A. Soient λ une valeur propre réelle de A et X une colonne propre associée. D'une part

$$X^t AX = \lambda X^t X$$

D'autre part

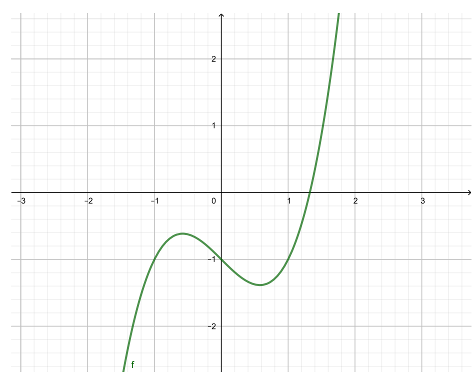
$$X^t AX == -(AX)^t X = -\lambda X^t X.$$

On en déduit $\lambda = 0$ sachant $X^t X > 0$. Par suite le déterminant de A est positif ou nul.■

(2) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente. Si ${}^t\!AA = A{}^t\!A$, montrer que A est la matrice nulle.
Solution : On a $A^n = O$ et ${}^t\!AA = A{}^t\!A$ implique $({}^t\!AA)^n = ({}^t\!A)^n A^n = O$. La matrice ${}^t\!AA$ est donc nilpotente et admet donc 0 comme unique valeur propre. Elle est aussi symétrique réelle, donc diagonalisable. Ces deux propriétés impliquent ${}^t\!AA = O$, en particulier trace$({}^t\!AA)$ est nulle. Mais si $A = ((a_{i,j}))$ on aura trace$({}^t\!AA) = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}^2 = 0$, soit $a_{i,j} = 0$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$: A est bien la matrice nulle. ■

(3) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 - A - I_n = O_{M_n(\mathbb{R})}$. Montrer que $\det(A) > 0$.

Solution : [RMS 2019-E716]. Le polynôme $p(x) = x^3 - x - 1$ est annulé par A, donc les valeurs propres de A sont parmi les racines de p.
En étudiant les variations de ce polynôme on vérifie sans peine qu'il admet une unique racine réelle $\lambda > 1$. p étant à coefficients réels, ses deux autres racines sont non réelles et conjuguées $\mu, \overline{\mu}$.



Enfin, A étant à coefficients réels, ses valeurs propres non réelles sont conjuguées et possèdent même multiplicité.
Le déterminant d'une matrice étant le produit de ses valeurs propres, trois cas peuvent donc se présenter :
• λ est l'unique valeur propre de A donc $p_A(x) = (-1)^n(x-\lambda)^n$ et $\det(A) = \lambda^n > 1 > 0$.
• λ n'est pas valeur propre de A, donc ${}_m u$ et $\overline{\mu}$ sont les deux valeurs propres de A de même multiplicité $n/2$ (n est donc pair). Par conséquent $p_A(x) = (-1)^n(x-\mu)^{n/2}(x-\overline{\mu})^{n/2}$ et $\det(A) = \mu^{n/2}\overline{\mu}^{n/2} = |\mu|^n > 0$.
• Enfin $\lambda, \mu, \overline{\mu}$ sont les valeurs propres de A, donc de multiplicités respectives r, s, s avec $r+2s = n$. On a $p_A(x) = (-1)^n(x-\lambda)^r(x-\mu)^s(x-\overline{\mu})^s$ et $\det(A) = \lambda^{2r}\mu^s\overline{\mu}^s = \lambda^r|\mu|^{2s} > 0$.
cqfd. ■

(4) Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres respectifs $p, q \in]0,1[$.
Quelle est la probabilité que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$$

soit diagonalisable ?

Solution : Une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ est classiquement diagonalisable si et seulement si $a \neq b$.
La probabilité cherchée est donc $P(X \neq Y) = 1 - P(X = Y)$. Et l'événement $(X = Y)$ est la réunion disjointe

$$(X = Y) = \bigcup_{k \geq 1} (X = k, Y = k).$$

Donc par indépendance de X et Y :

$$\begin{aligned} P(X = Y) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(X = k)P(Y = k) = \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} q(1-q)^{k-1} \\ &= \frac{pq}{1-(1-p)(1-q)} = \frac{pq}{p+q-pq} \end{aligned}$$

et finalement la probabilité que A soit diagonalisable est

$$P(X \neq Y) = 1 - \frac{pq}{p+q-pq} = \boxed{\frac{p+q-2pq}{p+q-pq}}.$$

■

(5) Discuter suivant les valeurs du réel $a \neq 0$ la convergence de la série de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n}$$

Solution : Si $a < 0$, alors n^a tend vers 0 et u_n tend vers 1. La série est grossièrement divergente.

Si $a > 1$, alors $|u_n| \sim \frac{1}{n^a}$ CV d'après la règle de Riemann. La série est absolument convergente.

Dans le cas $a \in]0,1]$, on a $u_n \sim \frac{(-1)^n}{n^a} = v_n$. Posons $u_n = v_n + w_n$ avec

$$w_n = \frac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n} - \frac{(-1)^n}{n^a} = \frac{(-1)^n \left[n^a - n^a - (-1)^n\right]}{\left[n^a + (-1)^n\right] n^a} = -\frac{1}{\left[n^a + (-1)^n\right] n^a} \sim -\frac{1}{n^{2a}}$$

$\sum v_n$ est convergente d'après la règle de Leibniz.
$\sum w_n$ ne converge que pour $2a > 1$ càd $a > \frac{1}{2}$ d'après la règle de Riemann.
On en déduit $\sum u_n$ CV pour $a \in]\frac{1}{2}; 1[$ et DV pour $a \in]0, \frac{1}{2}]$. ■

(6) Existe-t-il une fonction $f \in \mathscr{C}^2([-1,1], \mathbb{R})$ vérifiant

$$\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{converge et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right| \quad \text{diverge.}$$

Solution : Supposons qu'une telle fonction f existe, étant deux fois dérivable la formule de Taylor-Young assure que $f(1/n) = f(0) + \frac{f'(0)}{n} + o(1/n^2)$, et comme $\sum_n f(1/n)$ converge on aura $\lim_n f(1/n) = 0 = f(0)$ par continuité de f à l'origine. Mais alors $f'(0) \neq 0$

implique $f(1/n) \simeq f'(0)/n$ puis la divergence la série $\sum_n f(1/n)$ ce qui est absurde. Donc $f'(0) = f(0) = 0$, dans ce cas par Taylor-Young $|f(1/n)| = o(1/n^2)$ et (par définition d'un « petit o ») $o(1/n^2)$ est le terme général d'une série absolument convergence, par suite (théorème de comparaison) $\sum_n f(1/n)$ converge absolument ce qui est contraire à l'hypothèse : une telle fonction ne peut exister. ■

(7) Soit $f \in \mathscr{C}([0,1])$ une application vérifiant $\int_0^1 t^n f(t)dt = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Montrer que f est identiquement nulle.

Solution : Avec Weierstrass c'est classique mais on est pas obligé d'utiliser Weierstrass : Pour la culture on peut procéder de la manière suivante :
Soit $f \in \mathscr{C}([0,1])$ une application vérifiant $\int_0^1 t^n f(t)dt = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Par linéarité de l'intégrale $\int_0^1 P(t)f(t)dt = 0, \quad \forall P \in \mathbb{R}[X]$. Supposons un instant que f ne soit pas identiquement nulle sur $[0,1]$: par continuité, il existe $0 < c < 1$ tel que $f(c) \neq 0$ (et même $f(c) > 0$ quitte à remplacer f par $-f$) ; il existe aussi $0 < a < c < b < 1$ tels $f(x) \geq \frac{f(c)}{2}, \ \forall x \in [a,b]$. Alors, le polynôme $P(t) = 1 + (X-a)(b-X)$ vérifie $P(t) \geq 1$ sur $[a,b]$ et $0 \leq P(t) \leq 1$ sur $[0,1] \setminus [a,b]$. On a aussi $P' > 0$ sur $[0,a]$ par compacité de ce dernier intervalle, il existe $\lambda > 0$ tel que $P'(t) \geq \lambda > 0$. Ainsi, en posant $M = \sup_{[0,1]} |f(t)|$, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\left| \int_0^a P^n(t)f(t)dt \right| \leq M \int_0^a P^n(t)dt \leq \frac{1}{\lambda} \int_0^a P'(t)P^n(t)dt$$
$$= \frac{1}{\lambda} \left[\frac{P^{n+1}(t)}{n+1} \right]_0^a = \frac{1-(1-ab)^{n+1}}{\lambda(n+1)} \leq \frac{1}{\lambda(n+1)}$$

et en procédant de même sur $[b,1]$ on peut donc affirmer que

$$(✘) \qquad \lim_{n\to\infty} \int_0^a P^n(t)f(t)dt = 0, \quad \& \quad \lim_{n\to\infty} \int_b^1 P^n(t)f(t)dt = 0.$$

Par contre, sur $[a,b]$, et avec ce choix de P nous avons

$$(✔) \qquad \int_a^b P^n(t)f(t)dt \geq \int_a^b f(t)dt \geq \frac{b-a}{2} f(c) > 0.$$

Les formules (✘) et (✔) impliquent que $\int_0^1 P^n(t)f(t)dt > 0$ pour tout entier n suffisamment grand, fait parfaitement absurde puisque $\int_0^1 Q(t)f(t)dt = 0, \quad \forall Q \in \mathbb{R}[X]$.