Université de Toulouse – Paul-Sabatier **Année 2020-2021**

L1 CUPGE Mathématiques

Contrôle Continu 2 : 9 avril 2021 durée : 2 heures

Les calculatrices et documents ne sont pas autorisés.
Sauf mention contraire, les réponses doivent être justifiées.
Le correcteur retirera des points pour des présentations manquant de soin et de clarté.
Le barème est donné à titre indicatif.

Les exercices sont indépendants.

I *Équivalents, développements limités* (3 points)

1) Déterminer un équivalent simple des suites de terme général :

$$u_n = \frac{5^n - 2^n}{n^3 + 2^n}, \qquad v_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+3)^2}.$$

2) En utilisant les développements limités appropriés, déterminer la limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sqrt{1+x}}{\sin(x)}.$$

II *Suites, limites de fonctions* (9 points)

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[, \\ u_{n+1} = \sin(u_n). \end{cases}$$

1) Étudier la fonction $x \mapsto \sin(x)$ sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ et vérifier que $\sin(]0, \frac{\pi}{2}[) \subset]0, \frac{\pi}{2}[$. Démontrer que sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin(x) \leq x$ avec égalité si et seulement si $x = 0$.
2) Démontrer que $u_n \in]0, \frac{\pi}{2}[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, et déterminer sa limite ℓ.
4) Rappeler pourquoi $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. En déduire que

$$\lim_{x\to 0} x\left(\frac{1}{\sin(x)} + \frac{1}{x}\right) = 2.$$

$$v_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+3)^2}.$$

$$= \frac{(n+3)^2 - n^2}{n^2 (n+3)^2}$$

$$= \frac{n^2 + 6n + 9 - n^2}{n^2 (n+3)^2} = \frac{6n + 9}{n^2 (n+3)^2} \sim \frac{6n}{n^4} = \frac{6}{n^3}$$

$$= \frac{6n \left(1 + 9/6n\right)}{n^4 \left(1 + 3/n\right)^2} \sim \frac{6n}{n^4}$$

$$\longrightarrow 1$$

$$u_n = \frac{5^n - 2^n}{n^3 + 2^n}, \quad = \text{\_\_\_\_\_\_}$$

$$= \frac{5^n \left[1 - \frac{2^n}{5^n}\right]}{2^n \underbrace{\left[1 + \frac{n^3}{2^n}\right]}}$$

$$\left[1 - \frac{2^n}{5^n}\right] \xrightarrow[n \to \infty]{} 1 \quad \text{car} \quad \left(\frac{2}{5}\right)^n \longrightarrow 0$$

$$\left[1 + \frac{n^3}{2^n}\right] \longrightarrow 1 \quad \text{car} \quad \frac{n^3}{2^n} \longrightarrow 0$$

puissance (n^3)

2^n → exp

$$\sim \left(\frac{5}{2}\right)^n$$

$$\frac{n^3}{2^n} = \frac{e^{3\ln(n)}}{e^{n\ln(2)}}$$

$$= e^{-\underline{n}\ln(2) + 3\underline{\ln(n)}}$$

$$= e^{-\underbrace{n\ln 2}_{\to +\infty}\left[1 - \frac{3\ln(n)}{n\ln(2)}\right]}$$

$$\underbrace{\left[1 - \frac{3\ln(n)}{n\ln(2)}\right]} \longrightarrow 1$$

$$\xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

5) En utilisant le développement limité de $\sin(x)$ à l'ordre 3 au voisinage de $x = 0$, démontrer que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{6}.$$

6) Déduire des deux questions précédentes que

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin(x)^2} - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{3}.$$

7) Poser $v_k = \frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2}$, $k \in \mathbb{N}$. Quelle est la limite $\lim_{k\to\infty} v_k$?

8) Le théorème de Cesàro exprime que si $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels convergeant vers $c \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} a_k = c$. En utilisant ce théorème pour la suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$, démontrer que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{nu_{n+1}^2} = \frac{1}{3}.$$

9) Donner un équivalent de u_n quand $n \to \infty$.

III *Algèbre linéaire* (9 points)

Dans tout cet exercice, on se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_4[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 4.

1) Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_4[X] : P(-1) = P(0) = P(1) = 0\}$.

i) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$.

ii) Soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + a_4X^4$. À quelle(s) condition(s) sur les coefficients a_0, a_1, a_2, a_3 et a_4 le polynôme P appartient-il à F ?

iii) En déduire que F est de dimension 2 et en donner une base $\mathcal{F} = \{P_0, P_1\}$.

2) Notons $Q_0 = 1$, $Q_1 = X(X^2 - 3)$, $Q_2 = X^2(X^2 - 2)$ et posons $G = \mathrm{Vect}(Q_0, Q_1, Q_2)$.

i) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$.

ii) Donner une base $\mathcal{G}$ de G et déterminer $\dim(G)$.

3) Étude de $F + G$.

i) Déterminer $F \cap G$ et en déduire que F et G sont en somme directe.

ii) Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}_4[X]$.

4) Posons $R = X^3 + 1$.

i) Quelles sont les coordonnées de R dans la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$?

ii) Déterminer les coordonnées de R dans la base $\mathcal{F} \bullet \mathcal{G}$ de $\mathbb{R}_4[X]$.