TD 2 : Le théorème de Cauchy-Lipschitz

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose que f est k-lipschitzienne:

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

D'après le Théorème des Accroissements Finis, c'est vrai par exemple si f est C^1 et que $|f'(x)| \leq k$ pour tout x.

(a) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\begin{cases} u \text{ de classe } C^1 \text{ sur } [0,T] \\ \begin{cases} \forall t \in [0,T], \quad u'(t) = f(u(t)) \\ u(0) = x_0 \end{cases} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u \text{ de classe } C^0 \text{ sur } [0,T] \\ \forall t \in [0,T], \quad u(t) = x_0 + \int_0^t f(u(s))\, ds \end{cases} ,$$

et réciproquement que

$$\begin{cases} u \text{ de classe } C^0 \text{ sur } [0,T] \\ \forall t \in [0,T], \quad u(t) = x_0 + \int_0^t f(u(s))\, ds \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u \text{ de classe } C^1 \text{ sur } [0,T] \\ \begin{cases} \forall t \in [0,T], \quad u'(t) = f(u(t)) \\ u(0) = x_0 \end{cases} \end{cases} .$$

(b) On considère la suite de fonctions définie par récurrence:

$$\forall t \geq 0, \quad u_0(t) = x_0, \quad u_{n+1}(t) = x_0 + \int_0^t f(u_n(s))\, ds,$$

de sorte que

$$u_1(t) = x_0 + f(x_0)t, \quad u_2(t) = x_0 + \int_0^t f(x_0 + f(x_0)s)\, ds, \cdots$$

Montrer que si $(u_n)_n$ converge uniformément vers une fonction limite u_∞ sur un intervalle $[0,T]$, alors $(f(u_n))_n$ converge uniformément vers $f(u_\infty)$ sur $[0,T]$, et la fonction limite u_∞ est continue sur $[0,T]$, et vérifie

$$\forall t \in [0,T], \quad u(t) = x_0 + \int_0^t f(u(s))\, ds,$$

de sorte que u_∞ est donc solution du problème de Cauchy: elle est C^1 sur $[0,T]$ et vérifie

$$\begin{cases} \forall t \in [0,T], \quad u_\infty'(t) = f(u_\infty(t)), \\ u_\infty(0) = x_0. \end{cases}$$

(c) Montrer par récurrence que

$$\forall n \geq 0, \forall t \geq 0, \quad |u_{n+1}(t) - u_n(t)| \leq |f(x_0)|\, k^n \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}.$$

(d) Soit $T > 0$. Montrer que la suite de fonctions $(u_n)_n$ converge uniformément sur $[0,T]$. En déduire qu'il existe au moins une solution sur l'intervalle $[0,T]$.

(e) On va à présent montrer l'unicité d'une telle solution. On suppose qu'il existe deux solutions sur l'intervalle $[0,T]$:

$$u, v : [0,T] \to \mathbb{R}, \quad \begin{cases} u'(t) = f(u(t)), \forall t \in [0,T] \\ u(0) = x_0 \end{cases} , \quad \begin{cases} v'(t) = f(v(t)), \forall t \in [0,T] \\ v(0) = x_0 \end{cases} .$$

- Montrer que
$$\forall t \in [0,T], \quad |u(t)-v(t)| \leq k \int_0^t |u(s)-v(s)|\,ds;$$
- on appelle $M := \max_{t\in[0,T]} |u(t)-v(t)|$; à l'aide de l'estimation précédente, montrer (par récurrence) que
$$\forall n \geq 0, \forall t \in [0,T], \quad |u(t)-v(t)| \leq M\frac{k^n t^n}{n!};$$
- en déduire que $u = v$ sur $[0,T]$.

On notera $u^{(T)}$ la solution sur $[0,T]$.

(f) Montrer que
$$0 < T < T' \quad \Longrightarrow \quad u^{(T)} = u^{(T')} \text{ sur } [0,T].$$
En déduire que le problème de Cauchy de départ admet une et une seule solution sur $[0,+\infty)$, puis une et une seule solution sur $\mathbb{R}$.

Lorsque f est seulement C^1 sur $\mathbb{R}$ (mais pas forcément globalement lipschitzienne):

- la solution du problème de Cauchy existe et est unique,
- la seule différence étant sur son intervalle d'existence: ce n'est plus forcément $\mathbb{R}$ (mais seulement 'le plus grand possible').

Lorsqu'on travaille avec des problèmes vectoriels: $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, il n'y a aucune différence:

- si f est C^1 et globalement lipschitzienne, la solution du problème de Cauchy existe, est unique, et définie sur $\mathbb{R}$,
- si f est seulement C^1, la solution du problème de Cauchy existe, est unique, et définie sur un certain intervalle (le plus grand possible).

Exemples:

(a) calculer la solution (pour les temps positifs) de
$$u'(t) = u(t)^2, \quad u(0) = x_0,$$
en distinguant les 3 cas
$$x_0 = 0, \quad x_0 > 0, \quad x_0 < 0;$$

(b) calculer la solution (pour les temps positifs) de
$$u'(t) = u(t)(K - u(t)), \quad u(0) = x_0,$$
en distinguant les cas
$$x_0 = 0, \quad x_0 = K, \quad x_0 \in]0,K[, \quad x_0 > K.$$