# TD 5 : L'équation du pendule

On veut étudier le mouvement du pendule:

La variation de l'angle avec la verticale est donnée par l'équation différentielle d'ordre 2 non linéaire

$$\theta'' = -\sin\theta, \quad \theta(0) = \theta_0, \theta'(0) = \theta_1, \tag{1}$$

où $\theta_0$ est l'angle avec la verticale au temps 0, et $\theta_1$ est la vitesse angulaire au temps 0.

## 1 Existence globale et unicité

a) Mettre ce problème sous forme vectorielle:

$$u'(t) = f(u(t)), \quad u(0) = u_0, \tag{2}$$

avec

$$u(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \theta'(t) \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ à préciser .}$$

b) Montrer que ce problème admet une solution maximale unique.
c) On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme

$$\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| = |x| + |y|.$$

Montrer qu'il existe $c$ tel que

$$\left\| f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| \leq c \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|.$$

En déduire que toute solution de (2) est définie sur $\mathbb{R}$.
d) Déterminer les points d'équilibre de (2). Est-ce physiquement raisonnable ?
e) Montrer que

$$t \mapsto \frac{1}{2}\theta'(t)^2 - \cos\theta(t)$$

est constante.
On peut alors étudier le comportement de toutes les solutions. On va se concentrer sur trois cas "particuliers":

$$(\theta_0, \theta_1) = (0, 4), \quad (\theta_0, \theta_1) = (0, \sqrt{2}), \quad (\theta_0, \theta_1) = (0, 2).$$

## 2 Premier cas particulier: $(\theta_0, \theta_1) = (0, 4)$

a) Tracer la courbe $y = \sqrt{2(7 + \cos x)}$, pour $x \in \mathbb{R}$.
b) Soit

$$\mathcal{E} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \mathcal{E}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}y^2 - \cos x.$$

En fait, $\mathcal{E}\begin{pmatrix} \theta(t) \\ \theta'(t) \end{pmatrix}$ est l'énergie de la solution: la somme de l'énergie cinétique $\frac{1}{2}\theta'(t)^2$ et de l'énergie potentielle $-\cos\theta(t)$, et elle est constante au cours du temps. Tracer

$$\{(x, y), \mathcal{E}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 7\}.$$

c) Déterminer le comportement de la solution de (2) associée à la donnée initiale $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$. En particulier, montrer qu'il existe $T > 0$ tel que

$$\theta(T) = 2\pi, \quad \theta'(T) = 4.$$

En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\theta(t+T) = \theta(t) + 2\pi, \quad \theta'(t+T) = \theta'(t).$$

Quelle est la signification physique de cette relation ?

# 3 Deuxième cas particulier: $(\theta_0, \theta_1) = (0, \sqrt{2})$

a) Tracer la courbe $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \mapsto \sqrt{2\cos x}$.
b) Tracer

$$\{(x,y), \mathcal{E}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0\}.$$

c) Déterminer le comportement de la solution de (2) associée à la donnée initiale $\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$. En particulier, montrer qu'il existe $T > 0$ tel que

$$\theta(T) = 0, \quad \theta'(T) = \sqrt{2}.$$

En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\theta(t+T) = \theta(t), \quad \theta'(t+T) = \theta'(t).$$

Quelle est la signification physique de cette relation ?
d) Pouvez-vous imaginer (et prouver) d'autres propriétés particulières de la solution ? (propriétés de symétrie par exemple)

# 4 Troisième cas particulier: $(\theta_0, \theta_1) = (0, 2)$

a) Tracer la courbe $x \in [-\pi, \pi] \mapsto \sqrt{2(1+\cos x)}$.
b) Tracer

$$\{(x,y), \mathcal{E}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1\}.$$

c) Déterminer le comportement de la solution de (2) associée à la donnée initiale $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Quelle est la signification physique ?