TD 7 : Intégrales à paramètre

1 Motivation gémétrique: l'aire et la longueur d'une ellipse

Pour $a, b > 0$, on considère

$$E_{a,b} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\},$$

et

$$D_{a,b} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}.$$

1.1 L'aire contenue dans l'ellipse

Calculer l'aire de $D_{a,b}$ (à l'aide du calcul intégral).

1.2 La longueur de l'ellipse

Montrer que

$$(x,y) \in E_{a,b} \quad \Longrightarrow \quad \exists \theta \in [0, 2\pi], \begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases} \quad ;$$

cela permet de paraméter l'ellipse.
En déduire que la longueur de $E_{a,b}$ est donnée par:

$$L_{a,b} = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}\, d\theta.$$

On notera

$$f(a,b,\theta) := \sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}, \quad g(a,b,\theta) := a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta.$$

1.3 L'ellipse la plus courte ?

Soit $\mathcal{A} > 0$. On s'intéresse à toutes les ellipses pour lesquelles l'aire contenue est égale à $\mathcal{A}$. On se demande s'il en existe-t-il une qui a un périmètre plus petit que toutes les autres (et si oui, laquelle ?). Il sera utile d'introduire R tel que

$$\mathcal{A} = \pi R^2.$$

- Donner l'expression de la longueur $\ell(a)$ d'une telle ellipse.
- Soit $\theta \in [0, 2\pi]$. On considère la fonction

  $$h_\theta :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad h_\theta(a) = f(a, \frac{R^2}{a}, \theta) = \sqrt{a^2\sin^2\theta + \frac{R^4}{a^2}\cos^2\theta}.$$

  Montrer que h_θ vérifie:

  $$\forall a > 0, \quad h''_\theta(a) \geq 0.$$

  (Ainsi h_θ est convexe.)
- En déduire que

  $$\forall \theta \in [0, 2\pi], \forall a > 0, \quad h_\theta(a) \geq h_\theta(R) + (a - R)h'_\theta(R).$$
- En déduire que

  $$\ell(a) \geq \ell(R) + (a - R)\int_0^{2\pi} h'_\theta(R)\, d\theta.$$
- Calculer cette dernière intégrale.
- Quelle est la réponse à la question de départ: existe-t-il une ellipse qui a un périmètre plus petit que toutes les autres (et si oui, laquelle ?)
- Quel serait l'equivalent dans l'espace usuel de dimension 3 ?

2 Motivation physique: le temps de descente d'un toboggan

2.1 Convergence et calculs d'intégrales impropres

a) Compléter le résultat du cours:

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{y^\alpha}\,dy \qquad \text{converge si et seulement si ...,}$$

$$\int_{1/2}^{1} \frac{1}{(1-y)^\alpha}\,dy \qquad \text{converge si et seulement si ...}$$

b) Montrer que

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{z(1-z)}}\,dz$$

converge, et calculer sa valeur avec le changement de variable $z = \sin^2\theta$.

2.2 Applications au toboggan

2.2.1 La formule pour le temps de descente

c) Montrer que pour un toboggan convexe de forme

$$y = \phi(x),$$

avec $\phi : [0, L] \to \mathbb{R}_+$ convexe, $\phi(0) = 0, \phi'(0) \geq 0$, le temps pour la bille de descendre de $(x_0, y_0 = \phi(x_0))$ à $(0,0)$ est

$$T(y_0) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{y_0} \frac{\sqrt{1+\psi'(y)^2}}{\sqrt{y_0 - y}}\,dy,$$

où $\psi = \phi^{-1}$.

2.2.2 Quand le toboggan est une planche

On considère le cas où

$$\forall x \geq 0, \quad \phi(x) = x \qquad \text{et donc} \qquad \forall y \geq 0, \quad \psi(y) = \phi^{-1}(y) = y.$$

d) Faire un dessin du toboggan. Écrire la formule donnant le temps de descente depuis le point $(x_0, y_0 = x_0)$.
e) Montrer que l'intégrale généralisée obtenue converge. Quelle signification physique cela a-t-il ? Combien vaut le temps de descente dans le cas où $y_0 > 0$? Que vaut $\lim_{y_0 \to 0^+} T(y_0)$? Est-ce normal ?

2.2.3 Quand le toboggan est un morceau de parabole

On considère le cas où

$$\forall x \geq 0, \quad \phi(x) = x^2 \qquad \text{et donc} \qquad \forall y \geq 0, \quad \psi(y) = \phi^{-1}(y) = \sqrt{y}.$$

f) Faire un dessin du toboggan. Écrire la formule donnant le temps de descente depuis le point $(x_0, y_0 = x_0^2)$.
g) Montrer que l'intégrale généralisée obtenue converge. Quelle signification physique cela a-t-il ?
h) En faisant le changement de variable $z = \frac{y}{y_0}$ et en utilisant le théorème de continuité pour les fonctions définie par une intégrale généralisée à paramètre, calculer $\lim_{y_0 \to 0^+} T(y_0)$. Quelle remarque est-ce que cela vous inspire ?

3 Exercices classiques

3.1 Un premier exemple

Soit

$$I_n := \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\, dt.$$

a) Montrer la convergence de chanque I_n pour $n \geq 1$.
b) Pour $x > 0$, on considère

$$g(x) := \int_0^{+\infty} \frac{1}{x+t^2}\, dt.$$

À l'aide du théorème de dérivation pour les intégrales à paramètre, montrer que g est de classe C^1 sur $[\frac{1}{2}, 2]$, puis sur $\mathbb{R}_+^*$, et exprimer $g'(1)$ à l'aide du théorème de dérivation.
c) Montrer par récurrence que g est de classe C^∞ sur $[\frac{1}{2}, 2]$, puis sur $\mathbb{R}_+^*$, et en déduire une relation entre I_n et les dérivées de g en 1.
d) Calculer directement g à partir de sa définition, et en déduire l'expression de ses dérivées.
e) Déterminer la valeur de I_n pour $n \geq 1$.

3.2 Convergence et valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$

a) Montrer que $\lim_{X\to+\infty} \int_1^X \frac{\sin t}{t}\, dt$ existe (à l'aide d'une intégration par partie).
b) Montrer que

$$\forall t \geq 0, \quad |\sin t| \leq t.$$

En déduire que

$$I := \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$$

converge. (Rq: on peut aussi montrer qu'elle ne converge pas absolument.)
c) Soit

$$g(x) := \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-xt}\, dt.$$

Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
d) Calculer $g'(x)$ (indication: double intégration par parties ou utiliser les complexes et $\sin t = Im(e^{it})$.
e) Montrer que

$$\forall x > 0, \quad |g(x)| \leq \frac{1}{x},$$

et en déduire la valeur de $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.
f) En déduire une formule très simple pour $g(x)$ pour tout $x > 0$.
g) Montrer que $g(x) \to I$ quand $x \to 0^+$.
h) En déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}.$$

3.3 La fonction Gamma d'Euler

La fonction Gamma d'Euler est définie par

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt.$$

a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $f : t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.
b) Montrer que $f : t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $x > 0$.
c) En déduire que l'intégrale généralisée qui définit $\Gamma(x)$ converge si et seulement si $x > 0$. L'ensemble de définition de Γ est donc $\mathbb{R}_+^*$.
d) Calculer $\Gamma(1)$, et trouver une relation de récurrence (simple) entre $\Gamma(n+1)$ et $\Gamma(n)$. En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout $n \geq 1$.