NOM : ....

(1) **(6 points). On considère l'application** $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ **définie par** $f(x,y,z) = x+y-z$.

• **Montrer que** f **est linéaire.**

si $\omega = (x, y, z)$ $\omega' = (x', y', z')$, $\lambda \in \mathbb{R}$

alors $f(\omega + \lambda\omega') = x + \lambda x' + y + \lambda y' - z - \lambda z'$

$= (x + y - z) + \lambda(x' + y' - z')$

$= f(\omega) + \lambda f(\omega')$ donc f est linéaire

• **Montrer que** $\ker(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ f(x,y,z) = 0\}$ **est un sous espace vectoriel de** $\mathbb{R}^3$.

• $f(0,0,0) = 0$ donc $0_{\mathbb{R}^3} \in \ker f$ qui est pas vide

• si $\omega, \omega' \in \ker f$
$\lambda \in \mathbb{R}$

alors $f(\omega + \lambda\omega') = f(\omega) + \lambda f(\omega') = 0$ donc $\omega + \lambda\omega' \in \ker f$ qui est donc un sev de $\mathbb{R}3$

• **Préciser une base et la dimension de** $\ker(f)$.

$\omega = (x, y, z) \in \ker f \iff x + y - z = 0$

soit $z = x + y$ donc

$\omega = (x, y, z) = (x, y, x+y) = x\underbrace{(1,0,1)}_{e_1} + y\underbrace{(0,1,1)}_{e_3}$

donc $\ker f = \text{Vect}\{e_1, e_2\}$ et e_1, e_2 libres : base & $\dim \ker f = 2$

(2) **On considère l'application** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **définie par** $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2, & \text{si } x \geq 0, \\ \ln(1+x), & \text{si } x < 0. \end{cases}$

• **(3 points) Montrer que** f **est continue en** $x = 0$.

$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{0+} \ln(1+x) = 0 = \ln(1)$

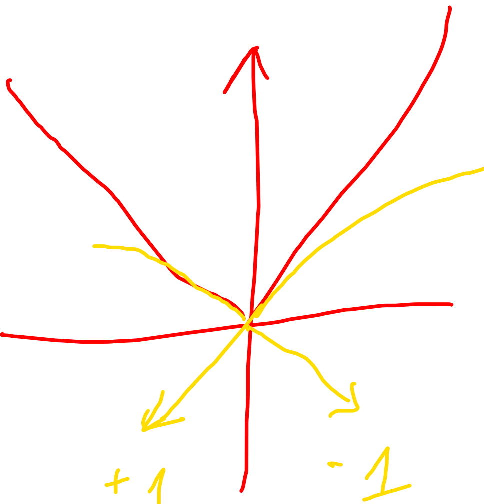
$\lim_{0-} f(x) = \lim_{0-} 1 + x^2 = 1$

Donc f pas continue en $x = 0$

• **(4 points).** f **est-elle dérivable en** $x = 0$ **?**

continue non dér. en 0

f n'est pas continue en 0 elle ne peut donc y être dérivable. [car dérivable $\Rightarrow$ continue]



(3) **(3 points). Montrer que l'application** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **définie par** $f(x) = [x]$ **(partie entière) n'est pas continue en** $x = 2021$**.**

$x_n = 2021 + 1/n$ $\quad n \geq 2$

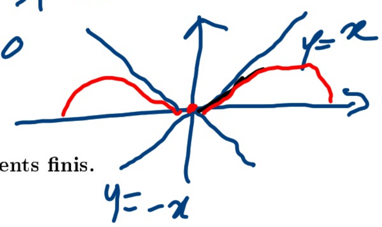
$y_n = 2021 - 1/n$ $\quad \lim_n f(x_n) = 2021$

$\lim_n x_n = 2021 = \lim_n y_n$ mais $\lim_n f(y_n) = 2020$ donc pas continue en 2021

(4) **(5 points). L'application** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **définie par** $f(x) = |\sin(x)|$ **est-elle dérivable en** $x = 0$ **? Esquisser l'allure de son graphe au voisinage de** $x = 0$**.**

$x \neq 0$ $\quad \frac{f(x)-f(0)}{x} \sim \frac{|x|}{x}$ $\to 1$ si $x \to 0+$, $\to -1$ si $x \to 0-$

donc pas dérivable en $x = 0$



(5) **(2 points). Énoncer le théorème des accroissements finis.**

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f continue sur $[a,b]$, f dérivable sur $]a,b[$ $\Big\}$ $\exists\, a < c < b$: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

L1 CUPGE - gpe 4 - Semaine 10

TD ~~2~~ 1

13h30

$f(x) \to 7$

Pour montrer que f est continue en $x=0$

DL

$f(x) \underset{DL}{=} 7+3x+o(x)$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$

f n'est pas continue :

$\lim\limits_{0} f$ ne l'existe pas

$\lim\limits_{0+} f \neq \lim\limits_{0-} f$

trouver $(x_n) \to 0$: $f(x_n) \not\to 0$

etc..

$\ln(1+x) = 0 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$

f dérivable en 0 : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ existe $= l = f'(0)$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$

$\ln(1+x)$

$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 ..$

Feuille 10 – Exo 1 :

$M_{n,p}(\mathbb{R})$ $M_{q,r}(\mathbb{R})$

$A \times B$

à un sens ssi $p = q$

$M_{n,p} \times M_{p,r} \to M_{n,r}$

1)

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1(-1)+3\cdot 2 & 1(-3) \\ (-2)(-1)+2 & (-2)(-3)+1\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$2,2$ $\quad$ $2,2$

$l1\ c2$

$l2\ c1$

$L2C2$

$AB \neq BA$

$BA =$ exercice

2) $A \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ $\quad B \in M_{3,4}(\mathbb{R})$

$2\ 3\ .\ 3\ .\ 4$

$AB \in M_{2,4}$

BA pas de sens

$3,4 \times 2,3$

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} & & 1,3 & 1,4 \end{array} & \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 & 8 \\ 4 & 6 & -6 & 0 \end{pmatrix}}_{4} & 2 \end{array}$$

Exercice 4 : $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ commutent ssi $AB = BA \in M_n(\mathbb{R})$

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$ $\qquad$ Pour quels paramètres x, y A & B commutent ?

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x & 1-y \\ 2+x & 2+y \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ x+2y & -x+y \end{pmatrix}$$

donc $AB = BA \iff \begin{cases} 1-x = 3 \\ 1-y = 0 \\ 2+\cancel{x} = \cancel{x}+2y \\ 2+\cancel{y} = -x+\cancel{y} \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2 \\ \cancel{y} = \underline{1} \\ y = 1 \\ x = -2 \end{cases} \implies \boxed{\begin{matrix} x = -2 \\ y = 1 \end{matrix}}$

$\mathcal{C}_A = \{ B \in M_n(\mathbb{R}) : AB = BA \}$ $\quad$ $A \in M_n(\mathbb{R})$ fixée

1) mq $\mathcal{C}_A$ sev de $M_n(\mathbb{R})$?

- La matrice nulle $O_{M_n(\mathbb{R})} \in \mathcal{C}_A$: $A.O = O.A = O$
  donc $\mathcal{C}_A$ n'est pas vide
- $B, C \in \mathcal{C}_A$ et $\lambda \in \mathbb{R}$: $\boxed{B + \lambda C \in \mathcal{C}_A}$

$$\left.\begin{array}{l} BA = AB \\ CA = AC \end{array}\right\}$$

$\Leftrightarrow (B+\lambda C) A \overset{?}{=} A(B+\lambda B)$

$$\begin{aligned} (B+\lambda C)A &= BA + \lambda CA \\ &= AB + \lambda AC \quad (B, C \in \mathcal{C}_A) \\ &= A(B+\lambda C) \quad \text{CQFD} \end{aligned}$$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Chercher $\mathcal{C}_B$ (les matrices 3×3 qui commutent avec B)

$A \in \mathcal{C}_B$: $AB = BA$ $\qquad A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$

$\dim M_n(\mathbb{R}) = n^2$

$\dim M_{4,6}(\mathbb{R}) = 24$

$M_2 \ni \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$+ c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} x & 2y & 2z \\ a & 2b & 2c \\ \alpha & 2\beta & 2\gamma \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 2a & 2b & 2c \\ 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cancel{x = x} \\ 2y = y \longrightarrow y = 0 \\ 2z = z \longrightarrow z = 0 \\ 2a = a \longrightarrow a = 0 \\ \cancel{2b = 2b} \\ \cancel{2c = 2c} \\ 2\alpha = \alpha \longrightarrow \alpha = 0 \\ \cancel{2\beta = 2\beta} \\ \cancel{2\gamma = 2\gamma} \end{cases}$$

donc

$$A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \in \mathcal{C}_A$$

si $a = \alpha = 0$
et
$y = z = 0$

Donc A est de la forme

$$\mathcal{C}_A = \left\{ A = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & \beta & \gamma \end{pmatrix} , \ x, b, c, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$

Ça veut dire 5

$$A = \underbrace{x \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{11}} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{E_{23}}$$

$$+ \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to E_{31}$$

x^2
$x^2 + x$
$x^2 + x + 1$
$\mathbb{R}_2[X]$

$\dim \mathcal{C}_A = 5 = 1^2 + 2^2$ et $1+2=3$

$\neq n$

$\mathcal{C}_A = n_1^2 + \dots + n_p^2$ ou $n_1 + \dots + n_p = n$

$A \in M_n$

Applications linéaires

$f : E \longrightarrow F$ $\quad f(x+\lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$

ev

$f : E \longrightarrow E$ on dit f est ENDOMORPHISME

linéaire

$f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ——— FORME LINÉAIRE

$f : E \longrightarrow F$ bijective : ISOMORPHISME

E

AUTOMORPHISME = ENDO. BIJECTIF

$f(x) = x^2$ $\quad f(2x) = 4x^2 = 4f(x)$ // linéaire $\neq f(x)$

$f(1+1) = 4 \neq f(1) + f(1) = 2$

$\boxed{\alpha x + \beta y} + \gamma + \cos x + \gamma^x$

positive

Exercice 14 :

$f : E \to F$ linéaire

- f injective $\iff \operatorname{Ker} f = \{X \in E : f(X) = 0_F\} = \{0_E\}$
- f surjective $\iff \operatorname{Im}(f) = F$
- $\underset{\subset E}{\operatorname{Ker} f}$ et $\underset{\subset F}{\operatorname{Im} f}$ sont des sev
- $\dim E = \underbrace{\dim \operatorname{Ker} f}_{=0} + \dim \operatorname{Im} f$

$\dim E = \dim F$ alors inj $\iff$ surj $\iff$ bij.

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ : \ f(\overset{\omega}{x,y}) = (2x+y,\ x-y)$

$f(\omega+\lambda\omega') = f(\omega)+\lambda f(\omega')$

f inj ? f surj ?

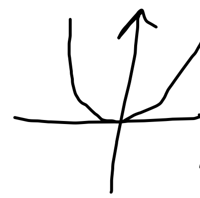
• f injective ? $\quad$ f injective ssi $\mathrm{Ker}\, f = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ $\quad$ si f linéaire

on cherche Ker f. $\quad \omega=(x,y) \in \mathrm{Ker}\, f \iff f(x,y)=(0,0)$

$$\iff \begin{cases} 2x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \longrightarrow x=y \longrightarrow x=y=0$$

donc $\omega=(0,0)$: $\mathrm{Ker}\, f=\{(0,0)\}$

et f est bien injective



$f(x)=x^2$

$\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$

f pas inj

$f(-2)=f(2)$

$f(a)=f(b)$

$\not\Downarrow$

$a=b$

ici f pas linéaire !

$f : E \longrightarrow F$

$\mathrm{Ker}\, f = f^{-1}(0_F) = \{\omega\in E : f(\omega)=0_F\} \ni 0_E$

f est-elle surjective ?

Sol 1 Ici comme f est linéaire $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ les espace de départ et d'arrivée ont la même dimension 2 donc (COURS) inj $\Leftrightarrow$ surj $\Leftrightarrow$ bij

ou bien

Par le th. du rang :

$$2 = \dim \mathbb{R}^2 = \underbrace{\dim \operatorname{Ker} f}_{=0} + \dim \operatorname{Im}(f)$$

car $\operatorname{Ker} f = \{0\}$

donc $\left.\begin{array}{l} \dim \operatorname{Im} f = 2 \\ \operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}^2 \end{array}\right\} \longrightarrow \underline{\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2}$

3) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

$(x,y) \longmapsto f(x,y) = (y, 0, x-7y, x+y)$

- f est linéaire
- est-elle <u>injective</u> ?

$(x,y) = w \in \operatorname{Ker} f \iff f(x,y) = (0,0,0,0) \iff \begin{cases} \boxed{y = 0} \\ 0 = 0 \\ x - 7y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0$

$\iff w = (0,0)$: $\operatorname{Ker} f = \{(0,0)\}$: $\boxed{f \text{ est injective}}$

- f est-elle <u>surjective</u> ?

Le théorème du <u>rang</u> nous dit que :

$$2 = \dim \mathbb{R}^2 = \underset{\overset{\|}{0}}{\dim \operatorname{Ker} f} + \underbrace{\dim \operatorname{Im}(f)}_{\operatorname{rg}(f)} :$$

Donc $\dim \operatorname{Im} f = \underline{\underline{2}}$

$\operatorname{Im} f$ sev de dimension 2 de $\mathbb{R}^4$

donc $\operatorname{Im} f \subsetneq \mathbb{R}^4$

f n'est pas <u>surjective</u> $\operatorname{Im} f = F = \mathbb{R}^4$

<u>Remarque</u> : $f(x,y) = (y, 0, x-7y, x+y)$

$= (0,0,x,x) + (y,0,-7y,0y)$

$= x(0,0,1,1) + y(1,0,-7,1)$

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\{\underbrace{\underline{(0,0,1,1)}, \underline{(1,0,-7,-1)}}_{\text{famille géné | base + libre}}\}$$

$f(1,0)$ $\quad$ $f(0,1)$

$\mathbb{R}^2$ $\quad (1,0)$ $\quad (0,1)$

En générale

⚠ important ! à retenir

Si $e_1 \dots e_d$ base de E

alors $\underline{f(e_1) \dots f(e_d)}$ famille génératrice de $\operatorname{Im} f$

Observation sur le th du rang :

$f \in \mathcal{L}(E, F)$:

$$\dim E = \underbrace{\dim \operatorname{Ker} f}_{\geq 0} + \dim \operatorname{Im} f \leq \dim E$$

égalité si $\dim \operatorname{Ker} f = 0$

f injective

Autrement dit, une application linéaire ne fabrique/crée pas de la dimension elle ne peut qu'en perdre et ce qu'elle perd elle le met dans le noyau

$$E \longrightarrow F$$

dim d

$$d = \dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$$

$$\begin{array}{cccc} d & = & 0 & + & d \\ & = & 1 & + & d-1 \\ & & 2 & & d-2 \\ & & d-1 & & 1 \end{array}$$

$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^7$

$$\underline{\underline{4}} = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$$

$$4 = 0 + 4 \quad \underline{\text{inject.}}$$

$$= 1 + 3$$

$$2 + 2$$

$$3 + 1$$

$$4 + 0 \longrightarrow f = 0$$

jamais surj

$$f : \mathbb{R}^7 \longrightarrow \underbrace{\mathbb{R}^4}$$

$\mathrm{Im} f \leq 4$

$$7 = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f$$

$7 =$	3	$+$	4	surjective
	4		3	
	5		2	
	6		1	
	7		0	

jamais injective