L1CUPGE ~ Semaine 10 | TD2

groupe 4

8/4/2021

10h05m

Exercice 5 – Feuille 10 : $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$

① $\forall k \in \mathbb{N}$ A^k et B commutent : $\boxed{\text{Si } k \in \mathbb{N},\ A^k B = B . A^k}$ (P_k)

Hyp. $AB = BA$ donc (P_1) est vraie

Rq (P_0) : $A^0 B = I_n . B = B I_n = B A^0$ est vrai

~~$(P_2$~~ P_2 : $A^2 B \neq B A^2$ — $A^2 B \overset{?}{=} B A^2$

$$A^2 B = A.AB = A(BA) = (AB)A = (BA)A$$
$$= BA^2$$

donc (P_2) est vraie

Par récurrence sur $k \geq 0$ montrons que $A^k B = B A^k$

Vrai si $k = 0, 1, 2$

<u>HR</u> (P_k) vraie $A^k B = B A^k$. Montrons que (P_{k+1}) est vraie

$$A^{k+1} B = (A . A^k) B = A (A^k B)$$

$$\overset{HR}{=} A (B A^k)$$

$$= (AB) A^k \overset{P_1}{=} (BA) A^k$$

$$= B (A A^k)$$

$$= B A^{k+1}$$

soit (P_{n+1})

<u>Conclusion</u> $\forall n$, (P_n) est vraie.

2) Montrer que $A^k B^l = B^l A^k$ pour tout $k, l \in \mathbb{N}$.

1 $\boxed{CD = DC \text{ alors } C^k D = D C^k}$ (*)

Vu 1 on sait que $A^l B = B A^l$, $\forall l \in \mathbb{N}$

donc $A^l B^k = B^k A^l \quad \forall k . \forall l$

on applique (*)

avec $D = A^l$

$C = B$

$A^L B = B A^{L}$

$\downarrow$

$A^L B^l = B^l A^L \; \forall l \in \mathbb{N}$

$A \in M_n(\mathbb{R})$ $\quad A = ((a_{ij}))$ $\quad A^T = ((a_{ji}))$

On échange les lignes et les colonnes

<u>Ex</u> $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\qquad {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

1,3

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ $\qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \in M_{3,2}$

3,1

Si $AB = BA$ alors ${}^tA \cdot {}^tB = {}^tB \, {}^tA$

${}^t(AB) = \cancel{{}^tA \, {}^tB}$

FAUX

<u>Cours</u> $\quad {}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ (en general $\neq {}^tA\,{}^tB$)

<u>hyp</u> $\quad AB = BA$ $\qquad$ <u>But</u> $\;{}^tA\,{}^tB = {}^tB\,{}^tA$

$$\begin{array}{ccccc} {}^t(AB) & = & {}^t(BA) & = & {}^tA\,{}^tB \\ \| & & & & \swarrow \\ {}^tB\,{}^tA & & \longrightarrow & & \underline{\text{CQFD}}\,! \end{array}$$

(4) on suppose de plus B inversible : $\exists B^{-1} : BB^{-1} = B^{-1}B = I_n$

MQ $\quad \underline{AB^{-1} \overset{?}{=} B^{-1}A}$ $\qquad$ $(AB)^{-1} = B^{-1}\underline{\underline{A^{-1}}}$

$\qquad$ ⊂ à du sens <u>que</u> si A et B inversibles

B^T l'est aussi $\qquad$ ici A qcq.

et $(B^T)^{-1} = (B^{-1})^T$

⚠ **Notations** $F \cap G = \{0\}$

Si F & G somme directe

alors une bases de $F+G = \{\text{base } F, \text{base } G\}$

dans le cours on la note $\underline{\underline{F \oplus G}}$

Retour à l'exercice : $B \in Gl_n(\mathbb{R})$: si $AB = BA$

inversible alors $AB^{-1} = \underline{B^{-1}A}$

$$\underline{AB^{-1}} = I_n \cdot AB^{-1} = (\underbrace{B^{-1}B}_{I_n})AB^{-1}$$

$$= B^{-1}(BA)B^{-1} = B^{-1}(AB)B^{-1}$$

$$= B^{-1}A\underline{BB^{-1}} = B^{-1}AI_n = \underline{B^{-1}A}$$

Victoire !

(5) Montrer que si $AB = BA$, alors

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k$$

Nous on sait que si $a, b \in \mathbb{R}$: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

(Binôme de Newton)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

49 $\binom{49}{10}$ = nombre de façons de tirer 10 boules num parmi 49

⚠ $n = 2$ $\quad (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

$$= \sum_{0}^{2} \binom{2}{k} A^k B^{n-k}$$

⚠ si $AB \neq BA$ c'est faux en général

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + \overbrace{AB + BA} + B^2$$

si $AB = BA$ $\Rightarrow$ $\underline{= A^2 + 2AB + B^2}$

On le fait par rec. sur $n \geq 1$

$n=2$ Vrai

HR n $\quad (A+B)^{n+1} = \overbrace{(A+B)^n}^{\sum} \cdot (A+B)$

remplace puis on regroupe les termes même puissance

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1 $\longrightarrow \binom{3}{0} \binom{3}{1} \binom{3}{2} \binom{3}{3}$

1 4 6 4 1

ect. . .

Triangle de Pascal

$\binom{k}{i}$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3$

$= \sum_0^3 \binom{3}{k} a^k b^{3-k}$

Exercice 16

$$f : \mathbb{C}_3(X) \longrightarrow \mathbb{C}_3(X)$$
$$P \longmapsto \boxed{f(P) = P - P'}$$

1) Montrer que f est un endomorphisme

Il faut vérifier que :

1) f est linéaire

2) Si $P \in \mathbb{C}_3(X)$: $f(P) \in \mathbb{C}_3(X)$

ex : $\varphi(P) = XP - P'$
linéaire
mais pas un endo
de $\mathbb{C}_3(X)$

$\varphi(X^3) = X^4 - 3X^2 \notin \mathbb{C}_3(X)$

(1) linéarité $u, v \in \mathbb{C}_3(X)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$f(u + \lambda v) = (u + \lambda v) - (u + \lambda v)'$$
$$= u + \lambda v - u' - \lambda v' = (u - u') + \lambda (v - v')$$
$$= f(u) + \lambda f(v)$$: f est bien linéaire

(2) f endo ? $xu + u'$ $f(u) = \int u$ $1 u$

Si $u \in \mathbb{C}_3(X) \Rightarrow d^\circ(u) \leq 3$

$\Rightarrow d^\circ(u') \leq 2$

donc $d^\circ(f(u)) = d^\circ(u - u') \leq \max\{3, 2\} = 3$

donc $f(u) \in \mathbb{C}_3(X)$

2) Montrer que f est une <u>bijection</u> (autrement dit, f est un automorphisme de $\mathbb{C}_3(X)$)

- f injective ? ($\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{0_{\mathbb{C}_3(X)}\}$).

$P \in \mathbb{C}_3(X)$: $P \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow f(P) = P - P' = 0 \Leftrightarrow P = P'$

$\Leftrightarrow P = 0$

si $P = $ cte
$P' = 0$
$P = P' \Rightarrow P = 0$

car $d^\circ P \geq 1$
alors $d^\circ P' = d^\circ P - 1$
$\Rightarrow P - P' \neq 0$

Sol 2 $P = a + bx + cx^2 + dx^3$

$f(P) = 0 \iff P = P'$

$\iff a + bx + cx^2 + dx^3 = b + 2cx + 3dx^2$

$\iff a - b + x(b - 2c) + x^2(c - 3d) + dx^3 = 0_{\mathbb{R}_3(x)}$

$$\iff \begin{cases} a = b \\ b = 2c \\ c = 3d \\ d = 0 \end{cases} \longrightarrow a = b = c = d = 0 \longrightarrow \underline{P = 0_{\mathbb{R}_3(x)}}$$

Donc $\operatorname{Ker} f = \{0_{\mathbb{R}_3(x)}\}$ donc f est <u>injective</u>

Comme f endo : les ~~deux~~ espaces de départ & d'arrivée ont m̂ dimension : (COURS)

injec $\iff$ surj $\iff$ bijective : <u>f est bien bijective</u>

Donc $\operatorname{Im} f = \{ f(P),\ P \in \mathbb{C}_3(X) \} = \mathbb{C}_3(X)$

<u>Autre Preuve</u> (à ne pas faire)

$\{1, X, X^2, X^3\}$ base de $\mathbb{C}_3(X)$

donc

$\{ f(1), f(X), f(X^2), f(X^3) \}$ est famille génératrice de $\underbrace{\operatorname{Im} f}_{4} \subset \underbrace{\mathbb{C}_3(X)}_{4}$

$\qquad\qquad\ \ \ /\!/$

$\{ 1, X-1, X^2-2X^2, X^3-3X^2 \}$

d° $\quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3$: échelonnée donc elle est libre donc c'est une base de $\operatorname{Im} f$ qui est donc de dim 4 : $\underline{\operatorname{Im} f = \mathbb{C}_4(X)}$

$f : E \xrightarrow{\text{lin}} F$ $\underline{\text{d vect}}$

$e_1 \dots e_d$ base de E $\Longrightarrow$ $\{ f(e_1) \dots f(e_d) \}$ famille génér de $\operatorname{Im} f$

Exo17 - F10

$f : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{ (u_n)_n \text{ suites de réels} \}$

$u = (\cancel{u_0}, \overset{1}{u_1}, \dots, u_n, \dots) \mapsto f(u) = (\underset{3}{u_1}, \overset{2}{u_2}, \overset{3}{\underset{4}{u_3}}, \dots)$

exemple $f(0, \boxed{1, 2, 3, \dots}) = (1, 2, 3, \dots)$

$f(\cancel{7}, 8, 12 \dots) = (8, 12 \dots)$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

→ linéarité $u = (u_n)_n$, $v = (v_n)_n$, $\lambda \in \mathbb{R}$: $f(u + \lambda v) = f(u) + \lambda f(v)$

$u + \lambda v = (u_0 + \lambda v_0, \boxed{u_1} + \lambda v_1, u_2 + \lambda v_2, \dots)$

$f(u + \lambda v) = (u_1 + \lambda v_1, u_2 + \lambda v_2, u_3 + \lambda v_3, \dots)$

$= (u_1, u_2, u_3, \dots) + \lambda (v_1, v_2, v_3, \dots)$

$= f(u_0, u_1, u_2 \dots) + \lambda f(v_0, v_1 \dots) = f(u) + \lambda f(v)$

2) $f(u_0, u_1 \dots) = (u_1, u_2, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

donc f est bien une application linéaire de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dans lui même : c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$\boxed{2}$ Montrer que f n'est pas injective

$\Leftrightarrow$ $\operatorname{Ker} f$ n'est pas réduit à $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} = (0, \dots)$ suite nulle

$$u_n = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right) \xrightarrow{f} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right)$$

$$f(1, \underbrace{0, 0, \dots}) = (0, 0, \dots)$$

donc $u = (1, 0, \dots) \in \operatorname{Ker} f$

donc $\operatorname{Ker} f \neq \{0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}\}$

donc f pas injective

Plus généralement $\operatorname{Ker} f = ?$

$u = (u_0, u_1, \dots) \in \operatorname{Ker} f \iff f(u) = (u_1, u_2, \dots) = (0, 0, \dots)$

$\iff u_n = 0, \ \forall n \geq 1.$

Donc $\operatorname{Ker} f = \{ (a, 0, \dots\dots, 0, \dots) \text{ où } a \in \mathbb{R} \}$

$= \{ a \underbrace{(1, 0, 0, \dots, 0, \dots)}_{U_0}, \ a \in \mathbb{R} \}$

$= \operatorname{Vect}\{ U_0 \}$

$\operatorname{Ker} f$ sev de dimension 1 dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

③ f est surjective ?

$f(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) \subset \underline{\underline{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}}$

dim infinie

⑥ f est un endo de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ avec le cours pour un endo inj $\Leftrightarrow$ surj $\Leftrightarrow$ bijective Si on est en dimension FINIE

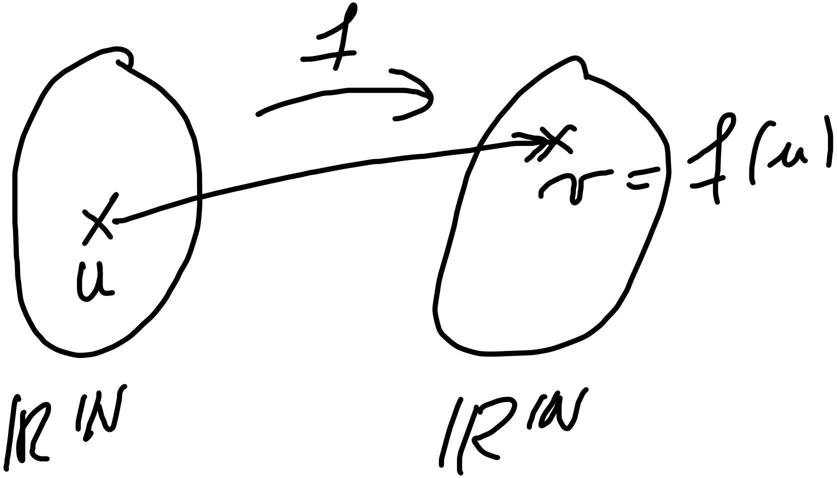
Comme f n'est pas bijective elle ne peut être surjective

Ceci est FAUX, pourquoi ??

•) Etudier l'~~injectivité~~ surjectivité de f

Question $f(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) \overset{?}{=} \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$\forall v = (v_0, v_1 \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \exists ?\ u = (u_0, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
$f(u) = v$



$$v = (v_0, \underline{v_1,}\, v_2, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

$$u = (0, v_0, v_1, v_3 \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

$f(u) = v$ donc f est **surjective**