L1 CUPGE ~ Gpe 4 ~ Semaine 10

TD 3

8/04/21

15h50

Exercice 10 & 11 : Les faire

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$\quad\quad C_1 \quad C_2 \quad C_3$

A_3 est inversible si la famille $\{C_1, C_2, C_3\}$ est libre dans $\mathbb{R}^3$

Idem avec les lignes

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$ n'est pas inversible $C_3 = C_1 + C_2$

On va donc chercher l'inverse de A_3 (s'il existe)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdots$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2/-4$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow L_3 + 8L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow -L_3/2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{matrix}1 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 1/2 & -1/4 & 0\\ -1/4 & 1 & 1\end{matrix}\right) \leftarrow L_1 - 3L_2 - L_3$$

$$\left(\underbrace{\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}}_{I_3}\middle|\begin{matrix}1/4 & -1/4 & -1\\ 1/4 & -1/4 & 0\\ -1/4 & 1 & 1\end{matrix}\right)$$

Chercher l'erreur et la corriger

$$A_3^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & -1 & -4\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 4 & 4\end{pmatrix}$$

$A_3 A_3^{-1} \neq I_3$: y a erreur calcul !

Il y a des cas où on peut connaître facilement A^{-1}

ex $\quad A^{2} + 3A + 2I_n = O_n$

alors $\quad A^{2} + 3A = -2I_n$

$$-\frac{1}{2}\left(A^{2} + 3A\right) = I_n$$

$1 \cdot I_n$

$$-\frac{1}{2}\underbrace{\left(A + 3I_n\right)}_{\text{matrice}} A = I_n$$

A + I n'a pas de sens

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

A inversible et $A^{-1} = -\frac{1}{2}\left(A + 3I_n\right)$

$A \times \underbrace{(\dots)}_{A^{-1}} = I_n$

$\boxed{\text{Exercice 7 - F10}}$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1) $(A - I_4)^2 = ??$

$$A - I_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc :

$$(A - I_4)^2 = 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

On a donc $(A - I_4)^2 = 0$ $\left(⚠ \not\Rightarrow A - I_4 = 0 \quad \text{ex } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$

2) Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}

- Si elle est inversible avec le pivot on trouvera A^{-1} → Exercice : le faire et retrouver le résultat

- $(A - I_4)^2 = A^2 - \underbrace{2A}_{} + I_4 = 0_4$

car $AI_4 = I_4 A = A$

$$A^2 - 2A = A(A - 2I_4) = -I_4$$

$$\Rightarrow A\underbrace{(2I_4 - A)}_{} = I_4$$

↳ A inversible et $\boxed{A^{-1} = 2I_4 - A}$

2) Calculer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$

$$X^n = Q(X)(X-1)^2 + \underbrace{R(X)}_{=?} \qquad d^\circ R < 2 \qquad \boxed{R(X) = \alpha X + \beta}$$

Méthode : 1)

$$\begin{array}{l|l} X^n & X^2 - 2X + 1 \\ \hline & Q(X) \quad X^{n-2} \\ R(X) = nX + 1 - n & \end{array}$$

2)

$$X^n = Q(X)(X-1)^2 + \alpha X + \beta \xrightarrow{X=1} \boxed{1 = \alpha + \beta}$$

$$nX^{n-1} = Q'(X)\underbrace{(X-1)^2}_{=0} + Q(X)\,2\underbrace{(X-1)}_{=0} + \alpha \xrightarrow{X=1} \boxed{n = \alpha}$$

$$\boxed{\beta = 1 - n}$$

Donc $\boxed{R(X) = nX + 1 - n}$

3) $\boxed{X^n = Q(X)(X-1)^2 + nX + 1 - n}$

En déduire A^n

$A^0 = I_4$, $A^1 = A$, $\boxed{A^2 = 2A - I_4}$

$$A^n = Q(A)\underbrace{(A-I_4)^2}_{O_n} + nA + (1-n)I_4$$

$n = 1$
et
$n = 2$

$$\boxed{A^n = nA + (1-n)I_4}$$

$3 = 1 + 3 - 1$

4) Retrouver ce résultat en remarquant que $\boxed{A = I_4 + (A - I_4)}$

Donc $\quad C \quad D \longrightarrow CD = DC$ car $C = I_4$

$$A^n = \Big(\underbrace{I_4}_{C} + \underbrace{(A - I_4)}_{D}\Big)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (A - I_4)^k \cdot \underbrace{I_4^{\,n-k}}_{I_4}$$

$$(C + D)^n = \sum_{0}^{n} \binom{n}{k} C^k D^{n-k} = \sum_{0}^{n} \binom{n}{k} D^k C^{n-k}$$

si $\quad CD = DC$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (A - I_k)^k = \binom{n}{0} \overbrace{(A - I_4)^0}^{I_4} + \binom{n}{1} (A - I_4)^1$$

$$+ \cancel{\binom{n}{2} \underbrace{(A - I_4)^2}_{=0}} + \cancel{\binom{n}{3} \underbrace{(A - I_4)^3}_{=0}} + \cancel{\dots} + \cancel{\binom{n}{n} \underbrace{(A - I_4)^n}_{=0}}$$

$$= \binom{n}{0} I_n + \binom{n}{1} (A - I_n)$$

$$(A - I_4)^2 = O_4$$

$$(A - I_4)^3 = (A - I_4)^2 (A - I_4)$$

$$(A - I_4)^k = O_4 \quad k \geq 2$$

$$A^n = \binom{n}{0} I_n + \binom{n}{1}(A - I_n)$$

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = 1 \qquad \binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n$$

donc $A^n = I_n + n(A - I_n) = \boxed{nA + (1-n)I_n}$

Exercice 21. F10 E un $\mathbb{K}$ ev. $p \in \mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$ endomorphisme qui vérifie $\boxed{p \circ p = p}$ (un projecteur)

1) p est un projecteur (a) MQ $I_E - p$ est un projecteur

$$I_E - p : E \longrightarrow E$$
$$E \ni x \longmapsto x - p(x) = (I_E - p)(x)$$

$q = I_E - p \in \mathcal{L}(E)$

$$q \circ q = (I_E - p) \circ (I_E - p) = I_E \circ I_E - I_E \circ p - p \circ I_E + p \circ p$$

$(f+g) \circ h = f \circ h + g \circ h$

$$(I_E \circ p)(x) = I_E(p(x)) = p(x)$$

$$= I_E - p - p + \underbrace{p \circ p}_{= p}$$

$$= I_E - p - \cancel{p} + \cancel{p}$$

$$= I_E - p = q$$: q est bien un projecteur

2) Montrer que $\overbrace{\operatorname{Ker}(p)}^{\text{sev}}$ et $\operatorname{Ker}(\overbrace{I_E - p}^{\text{sev de } E})$ sont en somme directe $\iff \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker}(I_E - p) = \{0_E\}$

$$\operatorname{Ker}(p) = \{ x \in E \text{ tels que } p(x) = 0_E \}$$

$$\operatorname{Ker}(I_E - p) = \{ x \in E \text{ tels que } \underset{x - p(x)}{\underset{\parallel}{(I_E - p)(x)}} = 0_E \}$$

$$= \{ x \in E \text{ tels que } p(x) = x \}$$

$$(Id_E - p)(x) = I_E(x) - p(x) = x - p(x) = 0$$

Soit $x \in \operatorname{Ker}(p) \cap \operatorname{Ker}(I_E - p)$

$\Updownarrow$ $p(x) = 0_E$ $\qquad$ $\Updownarrow$ $p(x) = x$ $\qquad \Rightarrow p(x) = x = 0_E$

donc $x = 0_E$ **CQFD**

$$\mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Ker}(I_E - p) \underset{??}{\overset{=}{\subset}} E$$

c) $\to$ ~~...~~

$\forall x \in E$, $\underbrace{p(x)}_{y} \in \mathrm{Ker}(I_E - p)$

$y \in \mathrm{Ker}(I_E - p)$
$\Leftrightarrow$
$(I_E - p)(y) = 0$
$\Leftrightarrow$
$p(y) = y$

$$p(y) = p(p(x))$$
$$= p \circ p(x) \quad p \text{ proj}$$
$$= p(x) = y$$

Donc $p(y) = y \Leftrightarrow \boxed{y \in \mathrm{Ker}(I_E - p)}$

On peut déjà en déduire que $\underset{(F)}{\mathrm{Ker}(p)} \oplus \mathrm{Ker}(I_E - p) = E$
(si on est en dimension finie)

Nous savons $\quad \operatorname{Ker}(p) \oplus \operatorname{Ker}(I_E - p) \subset E$

But MQ $\quad \operatorname{Ker}(p) \oplus \operatorname{Ker}(I_E - p) = E$

Pour cela on va montrer que $\boxed{\dim \operatorname{Ker} p + \dim \operatorname{Ker}(I_E - p) = \dim E}$

dim finie

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \underbrace{\dim(F \cap G)}_{=0} \qquad \dim(\underbrace{\operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker}(I_E - p)}))$$

l'ev $\operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker}(I_E - p)$ a la même dimension que E et comme il est bien inclus $\subset E$ c'est E.

A la question précédente on a montré que :

$$\forall x \in E, \ \underline{p(x)} \in \operatorname{Ker}(I_E - p)$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Im}(p) \subset \operatorname{Ker}(I_E - p)$$

$\{p(x),\ x \in E\}$ "def

donc $\quad \mathrm{Im}\, p \subset \ker(I_E - p)$

$\Rightarrow \dim \mathrm{Im}\, p \leq \dim \ker(I_E - p)$

$\mathrm{Im}\, p = \ker(I - p)$

$\Rightarrow \dim \ker(I_E - p) \overset{(f)}{=} \dim \mathrm{Im}\, p$

donc

Somme directe

$\dim E \geq \dim(\ker(p) + \ker(I_E - p)) = \dim \ker p + \underbrace{\dim \ker(I_E - p)}_{\geq \dim \mathrm{Im}\, p}$

$\geq \dim \ker p + \dim \mathrm{Im}\, p = \dim E$

th du rang appliqué à p

$=$

$\boxed{\dim(\ker p + \ker(I_E - p)) = \dim E}$ (e)

$\boxed{\ker p \oplus \ker(I_E - p) = E}$

Tout ceci ne marche que si $\dim E < +\infty$

d) Retour à la méthode de feuille (où dim E peut être infinie)

$\forall x \in E$, $\underbrace{x - p(x)}_{y} \in \operatorname{Ker}(p) \iff p(y) = 0_E$

$$p(y) = p(x - p(x))$$

$$= p(x) - \underbrace{p(p\,x)}_{p\circ p(x) = p(x)} = p(x) - p(x) = 0_E$$

e) En déduire que $\operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Ker}(I_E - p) = E$

On ne peut plus raisonner avec les dimensions

$\underline{F+G} = \underline{E} \iff$ tout élément de E est la somme d'un elt de F et d'un elt de G

$\boxed{\forall x \in E}$: $\exists x_F \in F$: $\underline{x_F + x_G = x}$

$\exists x_G \in G$

S'il sont uniques $\Rightarrow F+G = F \oplus G$

Bilan : $\operatorname{Ker} p$ & $\operatorname{Ker}(I_E - p)$ sont en somme directe

$$\forall x \in E, \quad p(x) \in \operatorname{Ker}(I_E - p)$$

$$\forall x \in E, \quad x - p(x) \in \operatorname{Ker}(p)$$

$$E = \operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker}(I_E - p)$$

$x \in E$: But $x = x_{\operatorname{Ker} p} + x_{\operatorname{Ker}(I_E - p)} \in \operatorname{Ker}(p) + \operatorname{Ker}(I_E - p)$

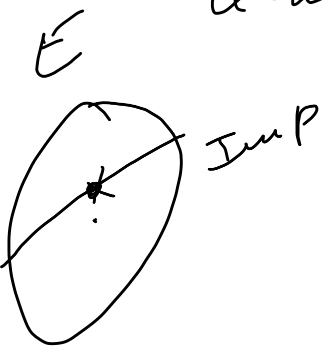
$$E \ni \boxed{X = \underbrace{p(X)}_{\in \operatorname{Ker}(I_E - p)} + \underbrace{X - p(X)}_{\operatorname{Ker} p}} \quad E \ni X \in \operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker}(I_E - p) \subset E$$

(f) MQ $\mathrm{Ker}(I_E - p) = \mathrm{Im}(p)$

$\underline{\dim < \infty}$

(c) : $\forall x \in E$: $p(x) \in \mathrm{Ker}(I_E - p)$: $\boxed{\mathrm{Im}\, p \subset \mathrm{Ker}(I_E - p)}$ (1)

Il reste à montrer que $\mathrm{Ker}(I_E - p) \subset \mathrm{Im}\, p$



$z \in$

$z = p(y)$ où $y \in E$

$\Longleftrightarrow$

$p(z) = z \Longrightarrow \boxed{z \in \mathrm{Im}\, p}$

$\mathrm{Ker}(I - p) \subset \mathrm{Im}(p)$ (2)

$\Longrightarrow$ (1) + (2) : égalité

$$\overbrace{\boxed{f(x) = \underbrace{\alpha}_{f(0)} + \underbrace{\beta}_{f'(0)} x + o(x)}}^{DL_1} \longrightarrow f \text{ dérivable en } 0$$

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{x - x^3/6 + o(x^3)}{x}$$

$$= 1 - \frac{x^2}{6} + o(x)$$

$$= 1 + \underbrace{0}_{f'(0)} . x - \frac{1}{6} x^2 + o(x^2)$$

$f(0) = 1$ le prol en dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

Si f dérivable en a
alors
$f(x) = f(0) + x f'(0) + o(x)$