L2 CUPGE - Gpe 2 - Semaine 12 / TD1

13/04/21

Départ 13h30

Exercice : Résoudre le syst. diff :

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + 2y + z \\ z' = x + z \end{cases}$$

$\iff X'(t) = A\,X(t)$ où $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

• $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 2-\lambda & 2-\lambda & 1 \\ 2-\lambda & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$ ~~$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$~~ ~~$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$~~

$C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$

$C_2 \leftarrow C_2 - C_1$

$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & & \\ & \cdots & \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$

$= (2-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 + 1\right]$

$1-\lambda = \pm i$

$(1-\lambda)^2 = -1 = (\pm i)^2$

$Sp(A) = \{2, \underline{1-i}, \underline{1+i}\}$

racines complexes conjuguées

$Sp(A) = \{2, -1-i, 1+i\}$

$A \in M_n(\mathbb{R})$ diago. dans $\mathbb{R}$: $\lambda_1 \dots \lambda_n$

$U_1 \dots U_n$

Sol. de $X' = AX$: $\boxed{X(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} U_1 + \dots + \alpha_n e^{\lambda_n t} U_n}$

<u>réelles</u>

les $\alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{R}$

<u>Cas complexe</u> les solution à valeur dans $\mathbb{C}$ même type

$\lambda_1 \dots \lambda_n \in \mathbb{C}$

$U_1 \dots U_n \in \mathbb{C}^n$

$\alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{C}$

<u>Solutions Réelles</u> $X(t) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad \underline{\underline{n = 3}}$ $\quad Sp(A) = \{\mu, \underline{\underline{\lambda, \bar{\lambda}}}\}$

$\mu \in \mathbb{R}$ $\quad$ 2 racines non réelles

$d^\circ \chi_A = 3$ unitaire

χ_A admet une racine réelle (TVI)

vp	μ	λ	$\bar\lambda$
v.p	U_μ	U_λ	$U_{\bar\lambda} = \overline{U_\lambda}$

$AX = \lambda X$

$\overline{AX} = \bar\lambda \bar X \to \bar\lambda$

$\bar A \bar X = \overline{AX}$

A réelle

Forme des sol. réelles

$$(\star) \quad \boxed{X(t) = \alpha e^{\mu t} U_\mu + \beta \operatorname{Re}\left[e^{\lambda t} U_\lambda\right] + \gamma \operatorname{Im}\left[e^{\bar\lambda t} \overline{U_\lambda}\right]}$$

$\mu \to 2$, $\lambda \to 1+i$, $\bar\lambda \to 1-i$

$\underline{\mu = 2}$, $\underline{\lambda = 1+i}$, $\underline{\bar\lambda = 1-i}$ (vp 2 à 2 distinctes donc A diago.)

U_2, U_{1+i}, $U_{1-i} = \overline{U_{1+i}}$

- <u>Déterminer U_2</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer $\mathrm{Ker}(A - 2I_3)$ …

- $E_{1+i} = \mathrm{Ker}\left(A - (1+i)I_3\right) = \,?$

$$A - (1+i)I_3 = \begin{pmatrix} -i & 1 & 0 \\ -1 & 1-i & 1 \\ 1 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\left(A - (1+i)I_3\right) \iff \left(A - (1+i)I_3\right)X = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\begin{pmatrix} -i & 1 & 0 \\ -1 & 1-i & 1 \\ 1 & 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

! $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$

$$\begin{cases} -i\alpha + \beta = 0 \longrightarrow \boxed{\beta = i\alpha} \\ -\alpha + (1-i)\beta + \gamma = 0 \\ \alpha - i\gamma = 0 \longrightarrow \alpha = i\gamma \Rightarrow \boxed{\gamma = -i\alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = i\alpha \\ -\alpha + (1-i)i\alpha + (-i\alpha) = -\cancel{\alpha} + \cancel{i\alpha} + \cancel{\alpha} - \cancel{i\alpha} = 0 \\ \gamma = -i\alpha \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ i\alpha \\ -i\alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -i \end{pmatrix}$$

$= U_{1+i}$

$$\boxed{E_{1+i} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -i \end{pmatrix}} \Longrightarrow$$

$$\boxed{E_{1+i} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\begin{pmatrix}1\\ i\\ -i\end{pmatrix}} \Rightarrow E_{1-i} = \mathrm{Vect}\left\{\overline{\begin{pmatrix}1\\ i\\ -i\end{pmatrix}}\right\}$$

$$= \mathrm{Vect}\left\{\begin{matrix}1\\ -i\\ +i\end{matrix}\right\} = \overline{U_1}$$

Donc les solutions réelles du système sont :

$$X(t) = \alpha e^{2t}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix} + \beta \mathrm{Re}\left(e^{(1+i)t}\begin{pmatrix}1\\ i\\ -i\end{pmatrix}\right) + \gamma \mathrm{Im}\left(e^{(1-i)t}\begin{pmatrix}1\\ -i\\ +i\end{pmatrix}\right)$$

d'après (✱)

$$\mathrm{Re}\left(e^{(1+i)t}\begin{pmatrix}1\\ i\\ -i\end{pmatrix}\right) \overset{?}{=} \mathrm{Re}\begin{pmatrix}e^{(1+i)t}\\ i e^{(1+i)t}\\ -i e^{(1+i)t}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathrm{R}(\quad)\\ \mathrm{Re}(\quad)\\ \mathrm{Re}(\quad)\end{pmatrix}$$

$$=$$

Feuille ORAL-4 Exercice 11

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{n^2 + x^2 n^4}}_{f_n(x)}$$

1) $\mathcal{D}f = ?$ La série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$x = 0$ $f_n(0) = 1/n^2$: $\sum f_n(0)$ CV $2 > 1$

$x \neq 0$ $f_n(x) \underset{n}{\sim} \frac{1}{x^2 n^4}$: $\sum f_n(x)$ CV $4 > 1$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

2) Continuité de f ?

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$
- Si $\sum f_n$ est UCV sur $A \subset \mathbb{R}$

$\Big\}$ $f \in C^0(A)$

- CVN $\Rightarrow$ UCV

$\sum f_n$ NCV sur A : $\sum_{1}^{\infty} \|f_n\|_A < \infty$

$$\underbrace{|f_n(0)|}_{= \frac{1}{n^2}} \le \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| \overset{?}{\le} \frac{1}{n^4}$$

FAUX

$$|f_n(x)| = \frac{1}{n^2 + \underbrace{x^2 n^4}_{\geq 0}} \le \frac{1}{n^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\|f_n\|_{\mathbb{R}} \le \frac{1}{n^2} \text{ t.q. série cv}$$

donc $\sum f_n$ est NCV sur $\mathbb{R}$

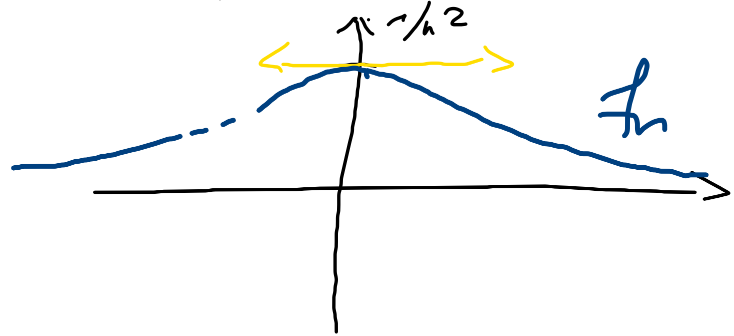
donc $\underline{\underline{f \in C^0(\mathbb{R})}}$

$$f_n'(x) = \frac{-2xn^4}{(n^2+x^2n^4)^2} < 0 \text{ sur } \mathbb{R}^+$$

x	0		∞
f_n'		$-$	
f_n	$\frac{1}{n^2}$	$\searrow$	0

$$\Rightarrow \|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}} = \frac{1}{n}$$

inutile



$$f_n'(x) = \frac{-2xn^4}{(n^2+x^2n^4)^2}$$

2) Etude de la dérivabilité de f :

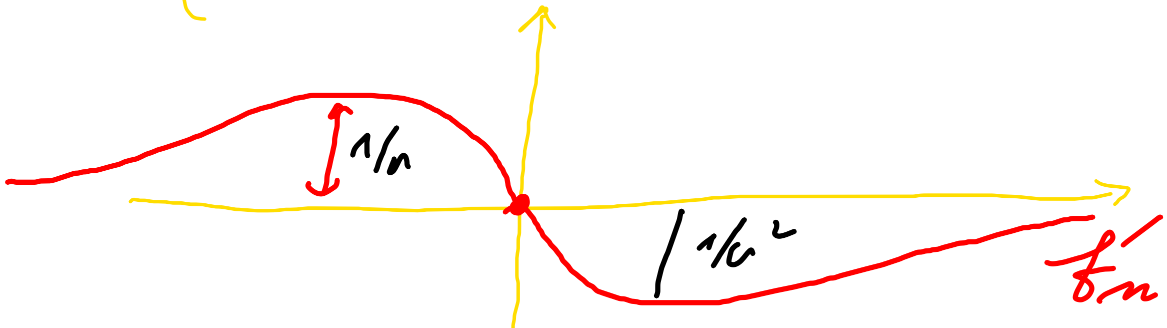
Si
- $f_n \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ ici c'est le cas
- $\exists \alpha \in \cancel{\mathbb{R}}\ I$: $\sum f_n(\alpha)$ CV : Vérifié en (I^1)
- Si $\sum f_n'$ UCV ou NCV sur I

Alors $f \in \mathcal{C}^1(I)$

et $f' = \left(\sum f_n\right)' = \sum f_n'$

Il s'agit de déterminer les intervalles $I \subset \mathbb{R}_+$ sur lesquels $\sum f_n'$ est N CV

$$f_n'(x) = \frac{-2xn^4}{(n^2+x^2n^4)^2} = \frac{-2x}{(1+x^2n^2)^2}$$



Il faut déterminer $\|f_n'\|_{\mathbb{R}_+}$ (si c'est le ~~TG~~ terme général d'une série CV c'est gagné

$$f_n'(x) = \frac{-2x n^4}{(n^2 + x^2 n^4)^2} = \frac{-2x}{(1 + x^2 n^2)^2}$$

$\underline{x \geq 0}$

$$|f_n'(x)| = \frac{2x}{(1+x^2n^2)^2} = \varphi_n(x)$$

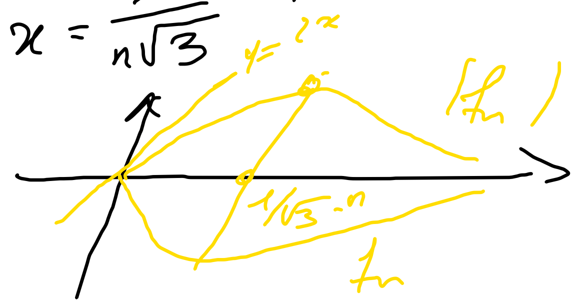
$$\varphi_n'(x) = \frac{2(1+x^2n^2)^{\cancel{2}} - 2x \cdot 2 \cdot 2xn^2 \cancel{(1+x^2n^2)}}{(1+n^2x^2)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{2 + 2x^2n^2 - 8x^2n^2}{(1+n^2x^2)^3}$$

$$= \frac{2 - 6x^2n^2}{(1+n^2x^2)^3} = 0 \iff 1 = 3x^2n^2 \quad \underline{x > 0}$$

$$x = \frac{1}{n\sqrt{3}}$$

x	0		$1/n\sqrt{3}$		$+\infty$
φ_n'		$+$	0	$-$	
$\varphi_n = \lvert f_n \rvert$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0



On en déduit que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n'(x)| = \sup_{x\geqslant 0} |f_n'(x)| = f_n'\left(\frac{1}{n\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{2/n\sqrt{3}}{\left(1+n^2/3n^2\right)^2}$$

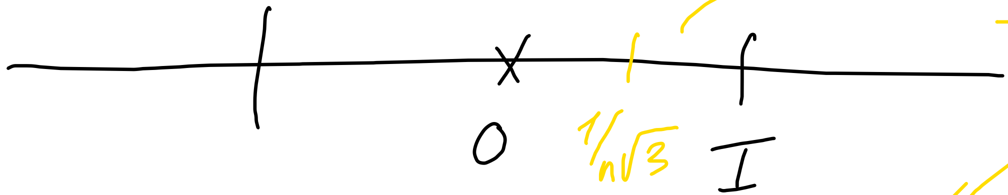
$$= \frac{2}{n\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{3}\right)^2}$$

$$= \frac{2}{n\sqrt{3}} \cdot \frac{9}{16} = \frac{3\sqrt{3}}{8n}$$

Conclusion : $\|f_n'\|_{\mathbb{R}} = \frac{3\sqrt{3}}{8n}$ t.q. la série DV

Donc $\sum f_n'$ n'est pas NCV sur $\mathbb{R}$ ni même sur tout intervalle

Contenant l'origine car ce "sup" est atteint en $1/n\sqrt{3}$ qui tend vers 0



$$\|f_n'\|_I \geq \left|f_n'\left(\frac{1}{n\sqrt{3}}\right)\right| = \frac{3\sqrt{3}}{8n}$$

$n \gg$

$\sum \|f_n'\|_I$ DV

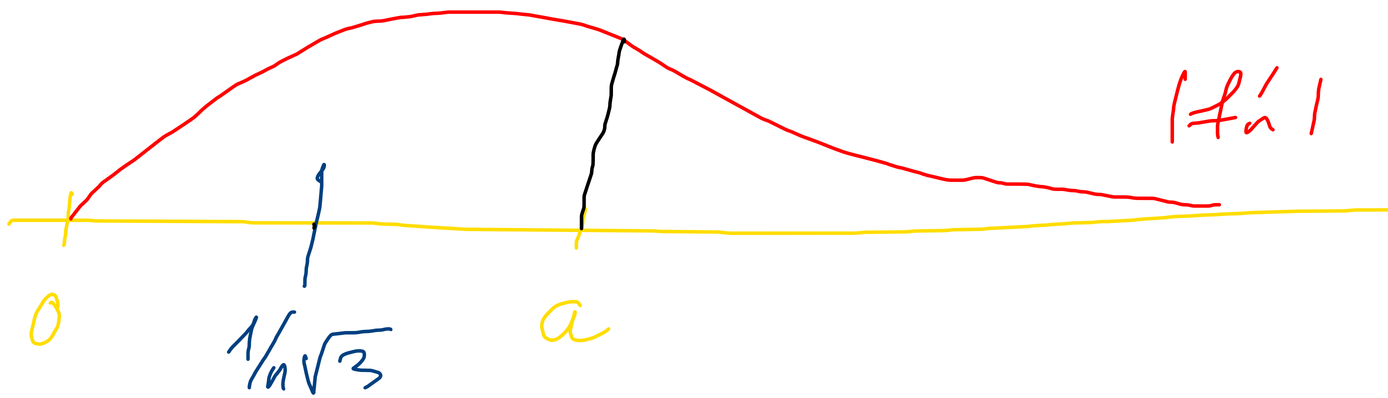
pas NCU sur I.

On peut tout de même en déduire que :

$\sum f_n'$ est NCU sur $[a,+\infty[$ $\forall a>0$

et donc sur $]-\infty,-a]\cup[a,+\infty[$ par imparité car :

$a>0$



Si $n \gg$ de telle sorte que $\frac{1}{n\sqrt{3}} \leq a$

dans cette situation

$$\|f_n'\|_{[a,+\infty[} = |f_n'(a)| = \frac{2a}{(1+n^2a^{\cancel{4}\,2})^2} \sim \frac{2}{a\,n^{\cancel{8}\,4}}$$

$a^2 n^{\cancel{4}\,2}$

t.q. série cv

ya NCV de $\sum f_n'$ sur $[a,\infty[$ $4>1$

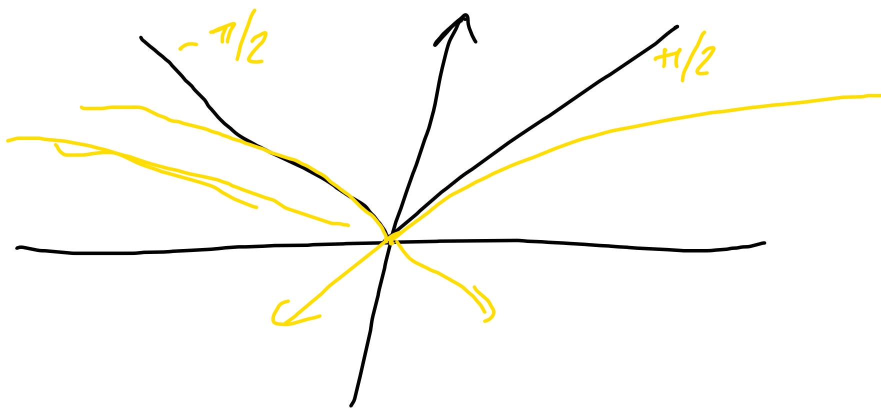
Donc $f \in C^1$ sur $[a,+\infty[$ $\longrightarrow$ $f \in C^1\left(\bigcup_{a>0}]a,\infty[= \mathbb{R}_+^*\right)$

et ceci $\forall a>0$

et de même sur $\mathbb{R}_-^*$: $f \in C^1(\mathbb{R}^*)$
$\in C^0(\mathbb{R})$

la dérivabilité en $x=0$ reste pour le moment mystérieuse

à suivre demain ....



$n=2$ la matrice A a 2 vp non réelles $\lambda, \bar{\lambda}$

Sol réelle : $X(t) = \alpha \,\mathrm{Re}\left(e^{\lambda t} U_\lambda\right) + \beta\, \mathrm{Im}\left(e^{\bar{\lambda} t} \overline{U_\lambda}\right)$

$$= Re\begin{pmatrix} e^{(1+i)t} \\ i e^{(1+i)t} \\ -i e^{(1+i)t} \end{pmatrix} = e^t Re \begin{pmatrix} e^{it} \\ i e^{it} \\ -i e^{it} \end{pmatrix}$$

$$e^{(1+i)t} = e^t e^{it}$$

$$= e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ +\sin t \end{pmatrix}$$

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

$$Re(e^{it}) = \cos t$$

$$i e^{it} = i(\cos t + i \sin t)$$
$$= -\sin t + i \cos t$$

$$Re(i e^{it}) = -\sin t$$

$$-i e^{-it} = -i(\cos t - i \sin t)$$
$$= -\sin t - i \cos t$$

$$\cos(-t) + i \sin(-t)$$
$$\cos t - i \sin(t)$$

De même

$$Im\left(e^{(1-i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ i \end{pmatrix} \right) = e^t Im \begin{pmatrix} e^{-it} \\ -i e^{-it} \\ i e^{-it} \end{pmatrix}$$

$$= e^t \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

les sol. reelles sont

$$X(t) = \alpha e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ \sin t \end{pmatrix} + \gamma e^t \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha e^{2t} + e^t(\beta \cos t - \gamma \sin t) \\ \alpha e^{2t} + e^t(-\beta \sin t - \gamma \cos t) \\ \alpha e^{2t} e^t (\beta \sin t + \gamma \cos t) \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}}}$$