L2 CUPGE - Semaine 12 - TD2 - Gpe 2

14/04/21

départ 10^h00

Exercice 11 - Feuille 4 ORAL (suite et fin).

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2 n^4}$$

$f \in C^0(\mathbb{R})$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ avec $f'(x) = \sum f_n'(x)$

$$= \sum_{n\geq 1} \frac{-2x n^4}{(n^2+x^2n^4)^2} = -2x \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(1+x^2n^2)^2} \quad , \underline{x \neq 0}$$

Il reste à étudier la dérivabilité de f à l'origine.

1 α $]\alpha+\varepsilon, +\infty[$

$[-\alpha \quad +\alpha]$ $+\infty$

Étudions le taux d'accroissement de f en 0_+

$$x>0 : \quad \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{x}\left(f(x) - f(0)\right)$$

$$= \frac{1}{x}\left(\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2n^4} - \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right) = \frac{1}{x} \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2+x^2n^4} - \frac{1}{n^2} \right)$$

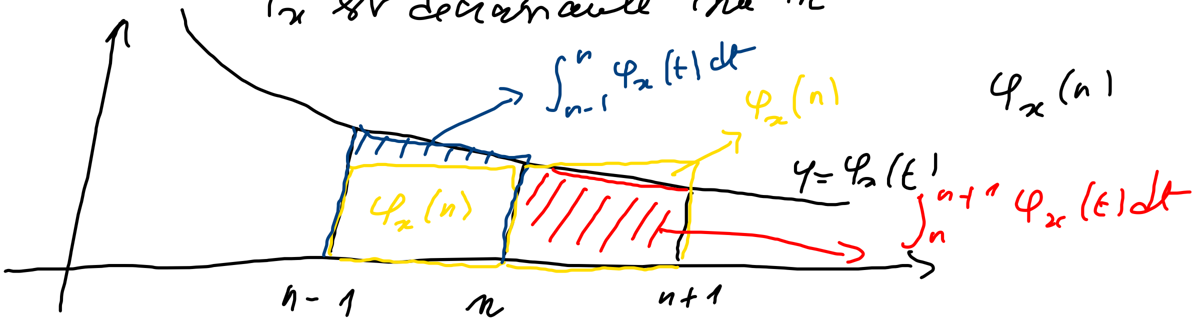
$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{x}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2+x^2n^4}-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{\cancel{x}}\sum_{1}^{\infty}\frac{\cancel{1}-\cancel{1}-x^2n^2}{n^2(1+x^2n^2)} = -\sum_{1}^{\infty}\frac{\cancel{1}\,x}{1+x^2n^2}$$

$$= -\sum_{1}^{\infty}\varphi_x(n)\,x$$

$x>0$ fixé

où $\varphi_x(t) = \dfrac{1}{1+x^2t^2}$

φ_x est décroissante sur $\mathbb{R}^+$



$$\int_{n}^{n+1}\varphi_x(t)\,dt \leq \varphi_x(n) = \frac{1}{1+x^2n^2} \leq \int_{n-1}^{n}\varphi_x(t)\,dt$$

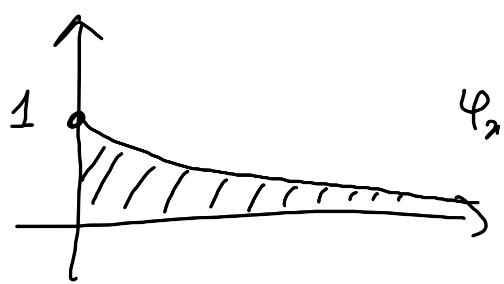
$$\int_n^{n+1} \varphi_x(t)\,dt \le \varphi_x(n) = \frac{1}{1+x^2n^2} \le \int_{n-1}^{n} \varphi_x(t)\,dt$$

• on somme ces inégalités pour $n = 1 \dots N$:

$\forall N \geq 1$ $$\int_1^{N+1} \frac{dt}{1+x^2t^2} \le \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{1+x^2n^2} \le \int_0^1 + \int_1^2 \cdots \int_{n-1}^{N} = \int_0^N \frac{dt}{1+x^2t^2}$$

• $N \to +\infty$ $$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+x^2t^2} \le \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2n^2} \le \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+x^2t^2}$$

$$\| \\ ??$$



$$\varphi_x(t) = \frac{1}{1+x^2t^2}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+x^2t^2} \le \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2n^2} \le \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+x^2t^2}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{1+x^2t^2} = \int_0^{\infty} \frac{dv/x}{1+v^2} = \frac{1}{x}\int_0^{\infty} \frac{dv}{1+v^2} = \frac{\pi}{2x}$$

$v = xt$

$t = v/x$

$dt = dv/x$

$v = xt$

De même
$$\int_1^{\infty} \frac{dt}{1+x^2t^2} = \frac{1}{x}\int_x^{+\infty} \frac{dv}{1+v^2} = \frac{1}{x}\left\{\frac{\pi}{2} - \operatorname{Artan}(x)\right\}$$

On a donc

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = -x\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2x^2} = -x\sum_{1}^{\infty}\varphi_x(t)$$

$$\frac{1}{x}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctan}(x)\right) \leq \sum_{1}^{\infty}\varphi_x(t) \leq \frac{\pi}{2x}$$

Soit

$$-x\cdot\frac{\pi}{2x} \leq -x\sum_{1}^{\infty}\varphi_x(t) \leq -x\cdot\frac{1}{x}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctan} x\right)$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{f(x)-f(0)}{x} \leq \underbrace{\operatorname{Arctan} x-\frac{\pi}{2}}_{\xrightarrow[x\to 0_+]{} -\pi/2}, \quad \forall x>0$$

d'gendarmes

$$\lim_{x\to 0_+}\frac{f(x)-f(0)}{x} = -\frac{\pi}{2}$$

<u>Conclusion</u> f admet une dérivée à droite en 0 qui vaut $f'_d(0) = -\pi/2$

Comme f paire $\Rightarrow$ f admet une dérivée à gauche en 0 : $f'_g(0) = \pi/2$

f n'est pas dérivable en 0

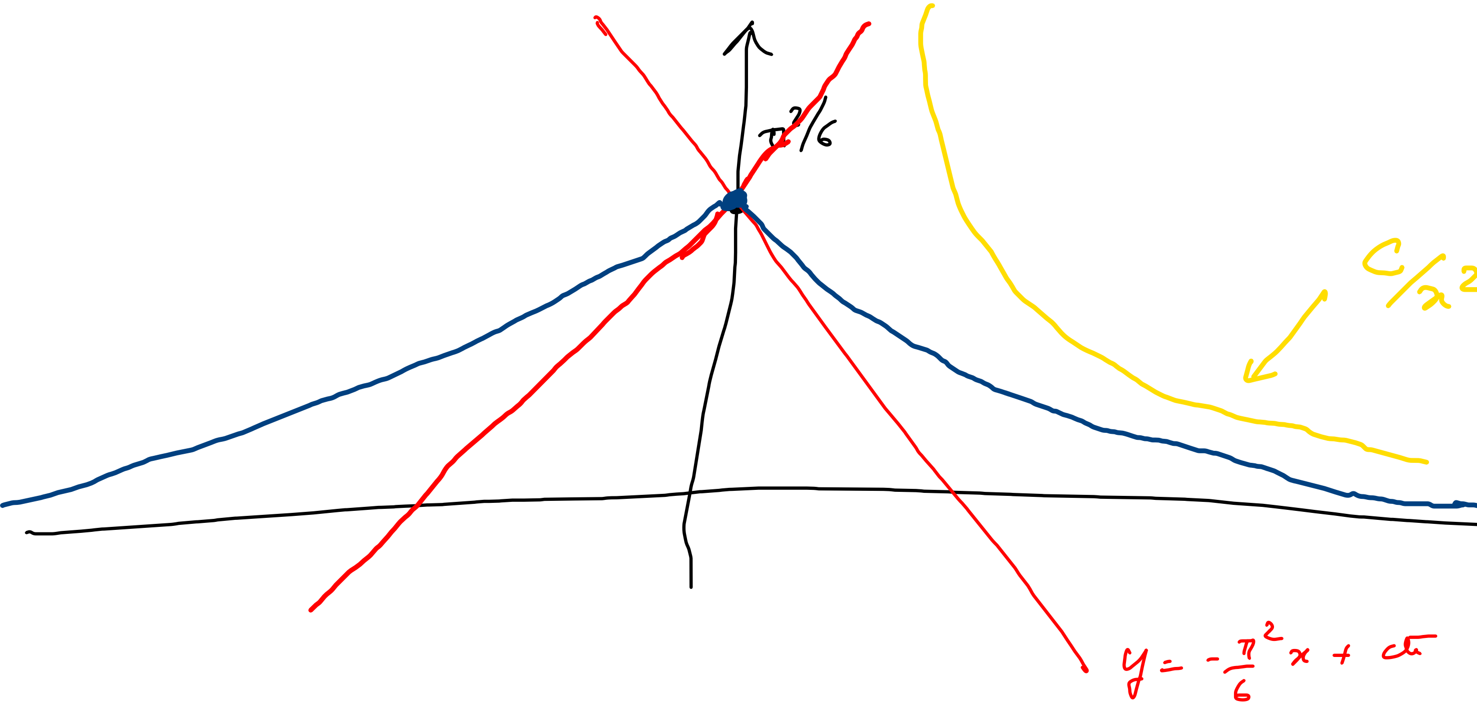
x	0		$+\infty$
f'	$-\pi/2$	$-$	
f	$f(0)$	$\searrow$	?? 0

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2 n^4}$$

$$|f(x)| \leq \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2 n^4}$$

$x > 0$ $\leq \frac{C}{x^2}$ $C = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \simeq \pi^4/90$

$$f(0) = \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \pi^2/6$$


$\pi^2/6$
C/x^2
$y = -\frac{\pi^2}{6}x + c$

Exercice 7

$A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^5 + A^3 + A - 3I_n = 0_n$

que dire de A ?? Que vaut A ??

$\longrightarrow$ $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$: A est diagonalisable dans une BON.

${}^tA = A$

$\longrightarrow$ $A^5 + A^3 + A - 3I_n = 0_n$

A est annulée par $p(x) = x^5 + x^3 + x - 3$

donc les valeurs propres de A

sont parmi les racines de p

$A^5 + A^3 + A - 3I_n = 0_n$

A est annulée par $p(x) = x^5 + x^3 + x - 3$

donc les valeurs propres de A sont parmi les racines de p

Que dire des racines de p ?? $p(x) = x^5 + x^3 + x - 3$

$x = 1$ est racine évidente : il reste 4 autres racines (dans $\mathbb{C}$)

$$p(x) = (x-1)\,q(x) \quad \text{où } d^\circ q = 4, \; q \in \mathbb{R}[x]$$

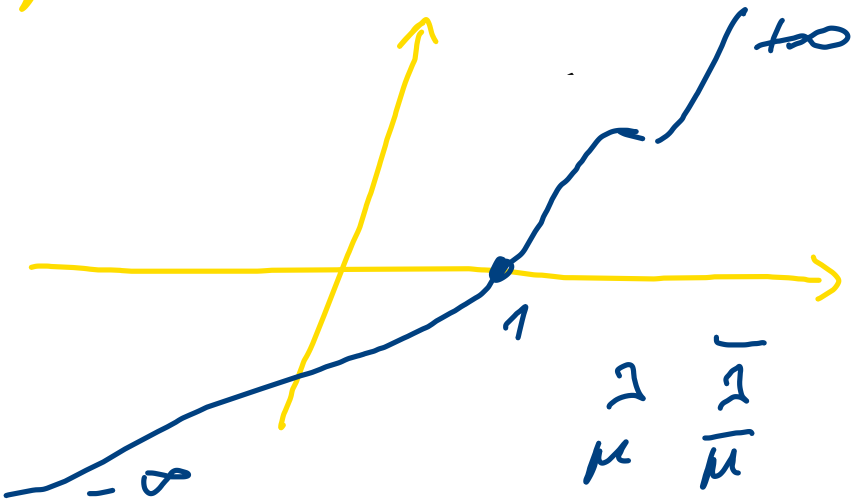
$$= (x-1)\underbrace{(x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x + 3)}_{\text{pas simple pour trouver racines...}}$$

$p(x) = x^5 + x^3 + x - 3$

Etudier les variations de p :

$p'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 \geq 1$

p strict. croissant sur $\mathbb{R}$



p admet 1 comme unique racine réelle

(les 4 autres sont complexes)

1) A symétrique réelle $\longrightarrow$ A est diag. dans $\mathbb{R}$ (dans une BON) : $\underline{Sp(A) \subset \mathbb{R}}$

2) les vp de A sont parmi les racines de p

3) 1 est l'unique racine réelle de p

Donc 1 est l'unique vp de A !!

$$A = {}^tO \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} O = {}^tO \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} O$$

où $\lambda_1 \dots \lambda_n$ vp de A

$$= {}^tO\,O$$

$$= I_n$$

$$\boxed{A = I_n}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$Sp(A) = \{1\}$

$A \neq I_2$

Exo 5-5 Feuille ED 4

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + 2y(t) - z(t) \\ y'(t) = 2x(t) + 4y(t) - 2z(t) \\ z'(t) = -x(t) - 2y(t) + z(t) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow X' = AX \quad \text{avec} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} C_1 & 2C_1 & -C_1 \end{array}$$

$tr(A) = 6 = \sum vp$

$Rg(A) = 1 \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} A = 2$

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ -1 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$\boxed{C_1 \leftarrow C_1 + C_3}$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ 0 & 4-\lambda & -2 \\ -\lambda & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ 0 & 4-\lambda & -2 \\ 0 & -4 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda \{(4-\lambda)(2-\lambda) - 8\} = -\lambda(\cancel{8} - 4\lambda - 2\lambda + \lambda^2 - \cancel{8})$$

$$= -\lambda(\lambda^2 - 6\lambda) = \boxed{-\lambda^2(\lambda - 6)}$$

$Sp(A) = \{0, 0, 6\}$

$$E_0 \ni \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = X : \left\{ AX = 0 \right.$$

$$\begin{cases} a + 2b - c = 0 & (E_1) \\ 2a + 4b - 2c = 0 & (2E_1) \\ -a - 2b + c = 0 & (-E_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \boxed{c = a + 2b} \right.$$

$$X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a+2b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Ker} A = \operatorname{Vect} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{u_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{u_2} \qquad \begin{array}{l} A u_1 = 0 \\ A u_2 = 0 \end{array}$$

$$\boxed{\dim \operatorname{Ker} A = 2}$$

$$E_6 \ni \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = X : (A - 6 I_3) X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -5a + \boxed{2b} - c = 0 \\ 2a - 2b - 2c = 0 \\ -a - 2b - 5c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5a + 2b - c = 0 \\ -3a \quad -3c = 0 \\ -6a \quad -6c = 0 \end{cases} \to \boxed{a = -c}$$

$5c + 2b - c = 0$

$4c + 2b = 0$

$2c = -b$

$\boxed{b = -2c}$

$$X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c \\ -2c \\ c \end{pmatrix} = c\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_3} \quad : E_6 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Les solutions du système

$$X(t) = \alpha\, e^{0.t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta\, e^{0.t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma e^{6t}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - \gamma e^{6t} \\ \beta - 2\gamma e^{6t} \\ \alpha + 2\beta + \gamma e^{6t} \end{pmatrix}$$