L1 CUPGE

Gpe 4 - Semaine 12

TD2 - 27 Avril 2021

<u>Exercice 4 - F12</u> $a \neq b \quad \lambda \in \mathbb{C}$

$$D_n = \begin{vmatrix} \lambda & a & \cdots & a \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \cdots & b & \lambda \end{vmatrix}$$

$D_1 = |\lambda| = \lambda \qquad D_2 = \begin{vmatrix} \lambda & a \\ b & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - ab$

$D_3 = \begin{vmatrix} \lambda & a & a \\ b & \lambda & a \\ b & b & \lambda \end{vmatrix}$

$\forall n \geq 2 : \qquad D_n = a(\lambda - b)^{n-1} + (\lambda - a) D_{n-1}$

$$D_n = \begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ L_{n-1} \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} \lambda & a & \cdots & \cdots & a \\ b & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ b & \cdots & b & \lambda & a \\ b & \cdots & \cdots & b & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & a & \cdots & \cdots & \cdots & a \\ b & \lambda & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ b & \cdots & b & \lambda & a & a \\ b & b & \cdots & b & \lambda & a \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b-\lambda & \lambda-a \end{vmatrix} = $$

$$L_n \leftarrow L_n - L_{n-1}$$

$$L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_{n-2}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda & a & \cdots & \cdots & \cdots & a \\ b & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ b & \cdots & b & \lambda & a \cdots & a \\ 0 & \cdots & 0 & b-\lambda & \lambda-a & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b-\lambda & \lambda-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & a & a & \cdots & a \\ b-\lambda & \lambda-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda-a & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b-\lambda & \lambda-a \end{vmatrix}$$

$$L_i \leftarrow L_i - L_{i-1}$$

$$2 \leq i \leq n-2$$

$$
= \begin{vmatrix}
\lambda & a & a & \cdots & a \\
b-\lambda & \lambda-a & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \lambda-a & 0 \\
0 & \cdots & 0 & b-\lambda & \lambda-a
\end{vmatrix}
= a\cdot(-1)^{1+n}
\overbrace{\begin{vmatrix}
b-\lambda & \lambda-a & 0 & \cdots & 0 \\
 & \ddots & \ddots & & \vdots \\
 & & \ddots & \ddots & 0 \\
 & 0 & & \ddots & \lambda-a \\
 & & & & b-\lambda
\end{vmatrix}}^{n-1}
$$

dup %
C_n

$$
+ (\lambda-a)\underbrace{(-1)^{n+n}}_{=1}
\underbrace{\begin{vmatrix}
\lambda & a & a & \cdots & a \\
b-\lambda & \lambda-a & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \ddots & \ddots & & 0 \\
\vdots & & \ddots & \ddots & \\
0 & \cdots & 0 & b-\lambda & \lambda-a
\end{vmatrix}}_{n-1}
$$

$$
= a(-1)^{n+1}(b-\lambda)^{n-1} + (\lambda-a)D_{n-1}
$$

$$
= a\underbrace{(-1)^2}_{=1}\underbrace{(-1)^{n-1}(b-\lambda)^{n-1}}_{(\lambda-b)^{n-1}} + (\lambda-a)D_{n-1}
$$

$$
\boxed{D_n = a(\lambda-b)^{n-1} + (\lambda-a)D_{n-1}} \qquad n \geqslant 1
$$

$$\boxed{D_n = a(\lambda-b)^{n-1} + (\lambda-a)D_{n-1}}$$

② En déduire que pour tout $n \geq 1$

$$\boxed{D_n = \frac{a(\lambda-b)^n - b(\lambda-a)^n}{\cancel{b-a}\ a-b}}$$

On va le montrer par récurrence sur $n \geq 1$

n=1: $D_1 = \det(\lambda) = \lambda$: $\dfrac{a(\lambda-b)^1 - b(\lambda-a)^1}{\cancel{b-a}\ a-b} = \dfrac{\lambda(a-b)}{a-b} = \lambda$

Ça marche pour $n=1$

n=2: $\dfrac{a(\lambda-b)^2 - b(\lambda-a)^2}{a-b} = \dfrac{a(\lambda^2 - 2b\lambda + b^2) - b(\lambda^2 - 2a\lambda + a^2)}{a-b}$

$$= \frac{\lambda^2(a-b) + ab^2 - ba^2}{a-b}$$

$$= \frac{\lambda^2(a-b) + ab(b-a)}{a-b} = \frac{(a-b)[\lambda^2 - ab]}{a-b} = \lambda^2 - ab$$

$D_2 = \begin{vmatrix} \lambda & a \\ b & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - ab$ $\longrightarrow$ vrai si $n=2$

Par récurrence sur n, on suppose la formule vraie jusqu'au rang $n-1$

$$D_n = a(\lambda-b)^{n-1} + (\lambda-a)\overset{HR}{D_{n-1}}$$

$$= a(\lambda-b)^{n-1} + (\lambda-a)\cdot\frac{a(\lambda-b)^{n-1} - b(\lambda-a)^{n-1}}{a-b}$$

$$= \frac{a(a-b)(\lambda-b)^{n-1} + a(\lambda-a)(\lambda-b)^{n-1} - b(\lambda-a)^{n}}{a-b}$$

$$= \frac{a(\lambda-b)^{n-1}\left[\cancel{a}-b+\lambda-\cancel{a}\right] - b(\lambda-a)^{n}}{a-b}$$

$$= \frac{a(\lambda-b)^{n} - b(\lambda-a)^{n}}{a-b}$$

C'est la formule au rang n

<u>Conclusion</u> : La formule est vraie pour tout $n \geq 1$.

③ Autre méthode pour calculer D_n

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$:

$$f(x) = \begin{vmatrix} \lambda+x & a+x & \cdots & a+x \\ b+x & \lambda+x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a+x \\ b+x & \cdots & b+x & \lambda+x \end{vmatrix} = \text{est un polynôme en } x$$

<u>ex</u> $n=2$

$$f(x) = \begin{vmatrix} \lambda+x & a+x \\ b+x & \lambda+x \end{vmatrix} = (\lambda+x)^2 - \cancel{(b+x)^2}\ (a+x)(b+x) \quad \cancel{\text{pol}}$$

$$= \cancel{\lambda^2 + 2(\lambda-b)x} \quad \text{~~est un pol. de degré 1~~}$$

$$= \lambda^2 + 2\lambda x + ab + (a+b)x \ldots$$

On dit aussi f° <u>affine</u> : $x \mapsto \alpha x + \beta$

$$f(x) = \begin{vmatrix} \lambda+x & a+x & \cdots & a+x \\ b+x & \lambda+x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a+x \\ b+x & \cdots & b+x & \lambda+x \end{vmatrix} = \alpha x + \beta$$

Ce qui est dû c'est que $f \in \mathbb{C}[x]$

mais $f \in \mathbb{C}_n[X]$

$n = 3$

$$f(x) = \begin{vmatrix} \lambda+x & a+x & a+x \\ b+x & \lambda+x & a+x \\ b+x & b+x & \lambda+x \end{vmatrix}$$

$=$

$C_2 \leftarrow C_2 - C_1$

$C_3 \leftarrow C_3 - C_1$

$$\begin{vmatrix} \lambda+x & a-\lambda & a-\lambda \\ b+x & \lambda-b & a-b \\ b+x & 0 & \lambda-b \end{vmatrix} = (\lambda+x)\begin{vmatrix} \lambda-b & a-b \\ 0 & \lambda-b \end{vmatrix}$$

$$+(b+x)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a-\lambda & a-\lambda \\ 0 & \lambda-b \end{vmatrix}$$

$$+(b+x)(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a-\lambda & a-\lambda \\ \lambda-b & a-b \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+x)\alpha + (b+x)\beta + (b+x)\gamma$$

$$= Ax + B$$

dvp % L_1

$$f(x) = \begin{vmatrix} \lambda+x & a+x & \cdots & a+x \\ b+x & \lambda+x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a+x \\ b+x & \cdots & b+x & \lambda+x \end{vmatrix} = \text{même procédure}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda+x & a-\lambda & a-\lambda & \cdots & a-\lambda \\ b+x & \lambda-b & a-b & \cdots & a-b \\ \vdots & 0 & \lambda-b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a-a \\ b+x & 0 & \cdots & 0 & \lambda-b \end{vmatrix} = \text{Somme de pol. de degré} \leq 1 \quad \alpha x+\beta$$

dvp % C1

d'où le résultat