L1 CUPGE – Gpe 4.

Semaine 12

TD 4

le 29 Avril 2021

Exercice 10 - F2 : $A \in M_2(\mathbb{R})$

$u : M \in M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow u(M) = AM$

1) Montrer que u est un endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$.

(1) • Comme $A \in M_2(\mathbb{R})$ & $M \in M_2(\mathbb{R})$: $AM \in M_2(\mathbb{R})$

donc $u : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$

Remarque : Si $A \in M_2(\mathbb{R})$ 2x2 2x6 6,3

$\varphi : M \in M_{2,6}(\mathbb{R}) \longrightarrow \varphi(M) = AMB$

$\varphi : M_{2,6} \longrightarrow \cancel{M_{2,6}}\ M_{2,3}$

(2) • u est linéaire : $M, N \in M_2(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$u(M + \lambda N) = A(M + \lambda N)$

$= AM + \lambda AN = u(M) + \lambda u(N)$

(1)+(2) $\Leftrightarrow$ u endomorphisme.

② u <u>bijective</u> $\Longleftrightarrow$ A est <u>inversible</u>

$$u : \begin{array}{ccc} M_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & u(M) = AM \end{array}$$

u endo de $M_2(\mathbb{R})$ de dimension finie

u bijective $\Longleftrightarrow$ u inj $\Longleftrightarrow$ u surjective

$$\Updownarrow$$

$\forall N \in M_2(\mathbb{R})$

$\exists M \in M_2(\mathbb{R}) : u(M) = N$

$\underline{\underline{AM}} = \underline{\underline{N}}$

On suppose u bijective, donc u est surjective :

$$\underline{u(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \ni I_2$$

En particulier $\exists M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : u(M) = I_2$

$\exists M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : AM = I_2$

$\Downarrow$

M est inversible et $A^{-1} = M$

ou bien

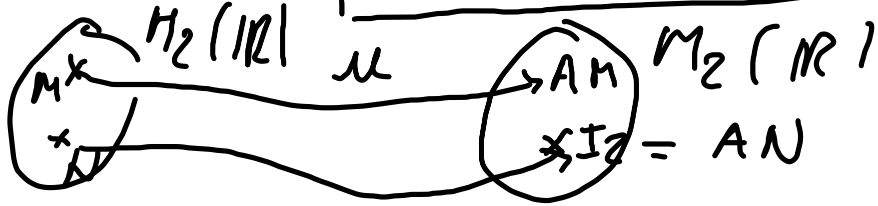
$AM = I_2$

$\Downarrow$

$$\det(AM) = \det(A)\det(M) = \det(I_2) = 1$$

$\hookrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow$ $\underline{A \text{ inversible}}$

On a démontré que $\boxed{u \text{ bijective} \Rightarrow A \text{ inversible}}$



Réciproquement : On suppose A inversible, montrons que u est bijective.

$\Leftrightarrow u$ inj $\Leftrightarrow u$ surje.

- u surjective ? A inversible : $\exists A^{-1} : AA^{-1} = I_2$

Il faut montrer que $\forall N \in M_2(\mathbb{R})$, $\exists M \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $u(M) = A\underbrace{M}_{\text{inconnue}} = \underbrace{N}_{\text{donnée}}$

$\longrightarrow AM = N \Longrightarrow M = A^{-1}N$

A inv. $\quad u(A^{-1}N) = A(A^{-1}N)$
$= N$

On bien $N \in M_2(\mathbb{R})$

$$\underline{\underline{N}} = AA^{-1}N = A(A^{-1}N) = \underline{\underline{u}}(\underbrace{A^{-1}N}) \in \mathrm{Im}(u)$$

donc u est injective donc u est bijective

donc

[illegible]

- ou bien on montre que u injective

$\overset{\text{def}}{\iff}$

$u(X) = u(Y)$ alors $X = Y$

$\iff$

$\operatorname{Ker} u = \{ 0_{M_2(\mathbb{R})} \}$

$u(X) = u(Y)$

$\iff AX = AY$

$\iff A^{-1}AX = A^{-1}AY$

$\iff X = Y$

$M \in \operatorname{Ker}(u)$

$u(M) = AM = O_2$

$\underbrace{A^{-1}A}_{I_2} M = A^{-1} O_2 = O_2$

$M = O_2$

• Remarque : Si A inversible, $N \in M_2(\mathbb{R})$

$$u(M) = N$$

$$\Leftrightarrow \quad AM = N$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{M = A^{-1}N}$$

1) $\forall N \in M_2(\mathbb{R})$ possède un antécédent (surj)

2) cet antecedent est unique (inject)

3) $\det(u) = \det(\text{mat}_B(u)) = \det(A)^2$

$\det(u) \neq 0 \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

$\Leftrightarrow$ u bijective $\Leftrightarrow$ A inversible

une autre preuve de 2

Calculons $\det(u) = ?$

Il faut commencer par trouver $M_{\mathcal{B}}(u) \in M_4(\mathbb{R})$

$f \in \mathcal{L}(E)$ $\dim E = n$ $\dim M_2(\mathbb{R}) = 4$

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & \cdots & f(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \in M_n(\mathbb{R})$$

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{11}} + \beta \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{12}} + \gamma \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{21}} + \delta \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_{22}}$$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{array}{c c} \begin{array}{cccc} u(E_{11}) & u(E_{12}) & u(E_{21}) & u(E_{22}) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix} & \begin{array}{c} E_{11} \\ E_{12} \\ E_{21} \\ E_{22} \end{array} \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$u(E_{11}) = AE_{11} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = aE_{11} + cE_{21}$$

$$u(E_{12}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} = aE_{12} + bE_{22}$$

$$u(E_{21}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}$$

$$u(E_{22}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

Donc

$$\det(M_{\mathcal{B}}(u)) = \begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{vmatrix} \overset{?}{=} \det(A)^2 = (ad-bc)^2$$

dvp % C_1

$$= a(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & d & 0 \\ c & 0 & d \end{vmatrix} + c\underbrace{(-1)^{3+1}}_{=1} \begin{vmatrix} 0 & b & 0 \\ a & 0 & b \\ c & 0 & d \end{vmatrix}$$

$$= a\left\{ d\underbrace{(-1)^{2+2}}_{=1} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \right\} + cb\underbrace{(-1)^{1+2}}_{-1} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$= ad(ad-bc) - bc(ad-bc)$$

$$= (ad-bc)^2 = \det(A)^2$$