L1 CUPGE - Gpe 4 - Semaine 9 / TD 4

le 01/04/2021

15h50

Exercice 5 - 3

$$\lim_{x \to +\infty} \underbrace{\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} \right)^{x \ln(x)}}_{f(x)} = ?$$

du type " 1^∞ " indéterminé

$$\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln(x+1) - \ln(x)$$

$$f(x) = a^b = \exp(b \ln a)$$

$1+u$, $u \to 0$ $\longrightarrow 1$

$$\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}.$$

$$f(x) = \exp\left\{ x \ln(x) \cdot \ln\left[\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} \right] \right\}$$

- $$\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)} = \frac{\ln\left[x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]}{\ln(x)} = \frac{\ln(x) \overset{?}{+} \ln(1+1/x)}{\ln(x)}$$

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2) \quad (u \to 0)$$

On a donc $$\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} = 1 + \frac{\ln(1+1/x)}{\ln(x)}$$

$$\ln\Big(1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{\underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0}\Big) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{on reporte :}$$

$$= \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)} = 1 + \frac{1}{x\ln(x)} \overbrace{- \frac{1}{2x^2\ln(x)} + o\left(\frac{1}{x\ln x}\right)}^{\times x \ln x} \quad DL_2$$

$$= 1 + \frac{1}{x\ln x} + o\left(\frac{1}{x\ln x}\right) \quad DL_1$$

On peut écrire :

$$f(x) = \exp\left\{ x\ln(x) \ln\left[1 + \frac{1}{x\ln x} + o\left(\frac{1}{x\ln x}\right)\right]\right\}$$

$$f(x) = \exp\left\{ x\ln(x) \ln\left[1 + \underbrace{\frac{1}{x\ln x} + o\left(\frac{1}{x\ln x}\right)}_{u \xrightarrow[x\to\infty]{} 0} \right] \right\}$$

$$\ln(1+u) = u + o(u)$$

$$= \exp\left\{ x\ln(x) \cdot \left(\frac{1}{x\ln x} + o\left(\frac{1}{x\log x}\right) \right) \right\}$$

$$= \exp\left(\underbrace{1}_{} + \underbrace{x\ln x \cdot o\left(\frac{1}{x\ln x}\right)}_{\xrightarrow[x\to\infty]{} 0} \right\}$$

$$u\, o(1/u)$$

$u \to 0$

$e \cdot \exp u$

$\shortparallel$

$1 + u + o(u)$

$\shortparallel$

$e + \underline{eu} + o(u)$

$$\boxed{\text{Donc la limite vaut } e^1 = e}$$

$\underline{\text{def}}$: $\dfrac{o(1/x\ln x)}{1/x\ln x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

$\shortparallel$

$x\ln x\, o\left(\frac{1}{x\ln x}\right)$

Exercice 2 $f(x) = x^{2n}$. Calculer $f^{(n)}(x)$ de deux manières $\neq$ pour en déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

$$\left(x^{2n}\right)^{(n)} =$$

$$\left(x^{2n}\right)' = 2n\, x^{2n-1}$$

$$\left(x^{2n}\right)'' = 2n(2n-1)\, x^{2n-2}$$

$$\boxed{\left(x^{2n}\right)^{(k)} = 2n(2n-1)\dots(2n-k+1)\, x^{2n-k}}$$

faire une récurrence

Donc $\left(x^{2n}\right)^{(n)} = 2n(2n-1)(2n-2)\cdots(2n-n+1)\,x^{2n-n}$

$= 2n(2n-1)(2n-2)\cdots(n+1)\,x^{n}$

$= 2n(2n-1)\cdots(n+1)\dfrac{n(n-1)\cdots 4.3.2.1}{n(n-1)\cdots 4\,3\,2.1}\,x^{n}$

$= \boxed{\dfrac{(2n)!}{n!}\,x^{n} = f^{(n)}(x)}$

$g\,h'''$

$(gh)^{'''} = \binom{n}{0} g^{(0)} h^{(3)} + \binom{n}{1} g' h'' + \binom{n}{2} g'' h' + \binom{n}{3} g''' h$

Autre méthode

$f(x) = x^{2n} = x^{n} \cdot x^{n} = g(x)\,h(x)$

$f^{(n)} = (g\,h)^{(n)}$

Formule de Leibniz (Exercice 1) $\longrightarrow$ $= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)} h^{(n-k)}$

Donc

$$\left(x^{2n}\right)^{(n)} = \left(\underbrace{x^n}_{g} \cdot \underbrace{x^n}_{h}\right)^{n} \overset{\text{Leibnitz}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(x^n\right)^{(k)} \left(x^n\right)^{(n-k)}$$

<u>on a vu :</u>

$$\left(x^n\right)^{(p)} = n(n-1)\ldots\overbrace{(n-p+1)}\, x^{\underline{n-p}} \qquad (p \leq n)$$

$$= n(n-1)\ldots(n-p+1)\frac{(n-p)(n-p-1)\ldots 3\,2\,1}{(n-p)(n-p-1)\ldots 3\,2\,1} \cdot x^{n-p}$$

$$\boxed{\left(x^n\right)^{(p)} = \frac{n!}{(n-p)!}\, x^{n-p}} \quad (p \leq n) \quad (\text{si } p > n : 0)$$

<u>ex</u> $\left(x^{13}\right)^{(7)} = 13 . 12 . 11 \ldots (13-7+1)\, x^{13-7}$.

$= 13 \ldots 8\, 7 . x^6 = \frac{13!}{6!} x^6$

$$(x^{2n})^{(n)} = (\underbrace{x^n}_{g} \cdot \underbrace{x^n}_{h})^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x^n)^{(k)} (x^n)^{(n-k)}$$

$$[x^n]^{(k)} = \frac{n!}{(n-p)!} x^{n-p} \quad (*)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \cdot \frac{n!}{\underbrace{(n-(n-k))!}_{k!}} \underbrace{x^{n-(n-k)}}_{= x^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{\frac{n!}{(n-k)!} \frac{n!}{k!}}_{= \binom{n}{k}\, n!} \cdot \underbrace{x^{n-k} x^k}_{x^n}$$

$$\binom{n}{k} \cdot \underbrace{\frac{n!}{k!(n-k)!}}_{\binom{n}{k}} \, n!$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \cdot n! \, x^n$$

On identifie les 2 calculs :

$$f^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{n!} \cdot x^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 n! \underbrace{x^n}$$

$$= x^n \left\{ \sum_{0}^{n} \binom{n}{k}^2 \cdot n! \right\}$$

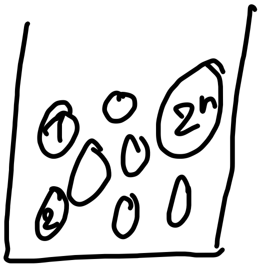
$$\frac{(2n)!}{n!} = \sum_{0}^{n} \binom{n}{k}^2 \cdot \underline{\underline{n!}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!^2} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2}$$

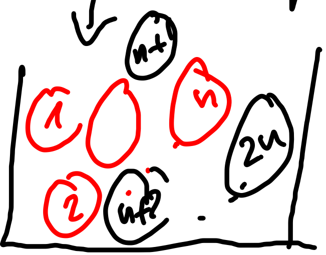
Victoire !

Autre approche $\binom{2n}{n} = \sum_{0}^{n} \binom{n}{k}^2$

$\binom{2n}{n}$: Nombre de manières de tirer n boules parmi $2n$



même chose

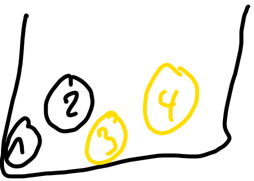


nbre de tels tirages $= \binom{2n}{n} =$ nbre des tirages avec 0 rouge $+$ 1 rouge $+$ 2 rouges $+ \dots +$ n rouges

$= \sum_{k=0}^{n}$ (tirage n boules avec k rouges, n-k blanches)

$$\frac{(2n)}{(n!)^2} \quad \frac{4!}{2!^2} = \frac{4!}{4} = 6$$

$n = 4$



$$\left.\begin{array}{l}12\end{array}\right] \ 2b$$
$$\left.\begin{array}{l}13\\14\\23\\24\end{array}\right) \ 1b$$
$$\left.\begin{array}{l}34\end{array}\right) \ 0b$$

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\text{tirage } n \text{ boules avec } k \text{ rouges, } n-k \text{ blanches} \right) = \frac{(2n)!}{n!^2}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}$$

$\binom{n}{k}$: choisir k rouges parmi les n

$\binom{n}{n-k}$: $n-k$ parmi les n blanches

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,(n-(n-k))!}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$$= \sum_{0}^{n} \binom{n}{k}^2 \quad \text{Victoire !}$$

Exo 4 – 11 $DL_{2,0}$ de $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x+1+\sqrt{1+x^2}}$

$$\sqrt{1+\underbrace{x^2}_{u}} = 1+\alpha u + o(u) = 1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$

$\alpha = 1/2$

Donc $f(x) = \dfrac{1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x+1+1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)} = \underbrace{\qquad}_{DL_{2,0}}$

$$= \left(1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\cdot\frac{1}{2+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)}$$

$$\frac{1}{2+u} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{u}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\cdot\frac{1}{1+\boxed{\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+o(x^2)}} \quad = v \to 0$$

$$\frac{1}{1+v} = 1-v+v^2+o(v^2)$$

$$= \left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \cdot \frac{1}{2 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}$$

$\frac{1}{2+u} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{u}{2}}$

$u \to 0$

$\frac{1}{1+v} = 1 - v + v^2 + o(v^2)$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \cdot \frac{1}{1 + \boxed{\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + o(x^2)}} \quad = v \to 0$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + o(x^2)\right)^2\right)$$

$$\left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + o(x^2)\right)^2 = \frac{x^2}{4} + o(x^2)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(1 - \frac{x}{2} + o(x^2)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right] = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{4} + o(x^2)$$

$f(0) = \frac{1}{2}$

Exercice 13. *(Taylor-Lagrange, Approximation numérique).* On définit, pour tout $n \geq 0$ et $x \geq 0$, $S_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$.

1) Montrer que, pour tout $n \geq 0$ et $x \geq 0$,

$$S_n(x) \leq e^x \leq S_n(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^x.$$

2) En déduire que pour tout $x \geq 0$ la suite $(S_n(x))_n$ converge vers e^x.

3) Montrer que $e \leq 4$. [*Indication : on pourra prendre $x = 1$ et $n = 1$.*]

4) Déterminer n tel que $S_n(1)$ soit une approximation à 10^{-3} près de e. Calculer $S_n(1)$ pour cette valeur de n.

5) Utiliser la même idée pour obtenir une approximation à 10^{-3} près de $\sin(1)$.

6) De même, trouver une valeur approchée à 10^{-5} près de $\cos(3/2)$.

7) De même, trouver une valeur approchée à 10^{-2} près de $\ln(3/2)$.

Solution rapide

2) Conséquence immédiate de la question précédente.

3) Il suffit d'encadrer le reste dans la formule de Taylor-Lagrange .

4) Conséquence du théorème des gendarmes.

5) $e^1 \leq 1 + 1 + e^1/2$ entraîne $e \leq 4$.

6) $n = 6$ (car $4/5040 < 10^{-3}$) donne $[2{,}718\,28 \approx]e \approx 1957/720[\approx 2{,}718\,05]$.

7) $n = 7$ (car $7! = 5040 > 10^3$) donne $[0{,}841\,47 \approx] \sin(1) \approx 101/120[\approx 0{,}841\,66]$.

8) $n = 12$ (car $(3/2)^12/12! < 3 \cdot 10^{-7}$) donne $[0{,}070\,737\,2 \approx] \cos(3/2) \approx 3\,245\,071/45\,875\,200[\approx 0{,}070\,736\,93]$.

9) En développant ln en 1, on prend $n = 4$ (car $1/(5 \cdot 2^5) < 10^{-2}$) donne $[0{,}405\,4 \approx] \ln(3/2) \approx 77/192[\approx 0{,}401\,0]$.