Atelier Problèmes. 31 mars 2021.

A propos de la feuille précédente sur les équations différentielles linéaires d'ordre 2 (ainsi que d'**autres exercices à partir de la page 8**) vous pouvez aussi regarder avec profit le cours/vidéo sur le lien

https://www.youtube.com/watch?v=vUon9Q7-SZA&list=PL024XGD7WCIENmP2GOx7B93ezN7JzIuTU&index=4&t=0s

ainsi que les vidéos **d'exercices résolus** sur ce thème qui suivent.

L'objectif de ces notes est de vous présenter à travers quelques exemples les méthodes pour la résolution des **systèmes différentiels linéaires** dans le cas simple où la matrice est diagonalisable.
Suivent ensuite quelques exercices d'entrainement avec solutions afin de vérifier vos calculs.

1. Systèmes différentiels linéaires d'ordre 1 sans second membre.

Soient $y_1, y_2, \ldots, y_n$, des fonctions dérivables, on note $Y(t)$ le vecteur colonne $Y(t) = (y_i(t))_{i=1}^n$.
Un **système linéaire différentiel** d'ordre 1 sans second membre est une équation différentielle vectorielle en la variable Y de la forme

$$(\bigstar) \qquad \boxed{Y'(t) = A \cdot Y(t), \quad \text{où} \quad A \in M_n(R).}$$

On va voir sur des exemples (la démonstration dans le cas général se conduit exactement de la même manière) comment résoudre de telles équations lorsque la matrice A est diagonalisable.

1.1. **Un premier exemple.** Il s'agit de résoudre le système différentiel

$$\boxed{(\mathscr{S}) \ : \quad \begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) + 4y_2(t) \\ y_2'(t) = y_1(t) + y_2(t) \end{cases}}$$

On procède par étapes :

(1) On écrit $(\mathscr{S})$ sous la forme $(\bigstar)$:

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) + 4y_2(t) \\ y_2'(t) = y_1(t) + y_2(t) \end{cases} \iff \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$
$$\iff \quad Y'(t) = A \cdot Y(t)$$

avec

$$\boxed{Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \quad Y'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

(2) On diagonalise A (ce sera toujours le cas pour nous, lorsque la matrice A n'est pas diagonalisable c'est un peu plus compliqué mais hors programme).
- Le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A(x) = \det(A - xI_2) = \begin{vmatrix} 1-x & 4 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} = x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1).$$

Il admet deux valeurs propres distinctes 3 et -1, donc A est diagonalisable.
• On cherche les sous-espaces propres (**vérifiez les calculs !**) :

$$E_3 = \ker(A - 3I_2) = \ker \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} := \mathbb{R}\, U_3$$

$$E_{-1} = \ker(A + I_2) = \ker \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} := \mathbb{R}\, U_{-1}$$

Où

$$U_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad U_{-1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

est la base des vecteur propres de A.

(3) Les **solutions** du système différentiel ($\mathscr{S}$) sont alors données comme des combinaisons linéaires des $e^{\lambda t} U_\lambda$ où λ est une valeurs propres de A et U_λ un vecteur propre associé :

$$\boxed{Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = a e^{3t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + b e^{-t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.}$$

ou encore

$$(\text{✘}) \qquad \boxed{\begin{aligned} y_1(t) &= 2ae^{3t} - 2be^{-t}, \\ y_2(t) &= ae^{3t} + be^{-t}, \qquad a, b \in \mathbb{R}. \end{aligned}}$$

(4) Si vous voulez comprendre pourquoi les solutions sont de cette forme, voici les explications : La matrice de passage de la base canonique à la base (U_3, U_{-1}) est $P = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a donc :

$$A = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On considère alors la nouvelle variable $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := P^{-1}Y$ soit $Y = PX$ et $Y' = PX$. Le système s'écrit

$$Y' = PX' = AY = PDP^{-1}Y = PDX \Leftrightarrow X' = DX$$

Ce dernier système s'écrit (car D est diagonale !)

$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 \\ x_2' = -x_2 \end{cases}$$

on retrouve des équations différentielles linéaires d'ordre 1 étudiées au début du module, soit :

$$\begin{cases} x_1(t) = ae^{3t} \\ x_2(t) = be^{-t} \end{cases}$$

Enfin, comme $Y = PX$, on en déduit Y :

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = PX(t) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ae^{3t} \\ be^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ae^{3t} - 2be^{-t} \\ ae^{3t} + be^{-t} \end{pmatrix}$$

et on retrouve bien les solutions annoncées dans (✘)

(5) Si on nous demande parmi ces solutions lesquelles satisfont à la condition initiale $y_1(0) = y_2(0) = 1$. On fait $t = 0$ dans (✘) ce qui nous conduit au système

$$\left\{\begin{array}{l} 2a - 2b = 1 \\ a + b = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \frac{3}{4} \\ b = \frac{1}{4} \end{array}\right.$$

La solution de ce problème de Cauchy est donc

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} y_1(t) = \frac{3}{2}e^{3t} - \frac{1}{2}e^{-t} \\ y_2(t) = \frac{3}{4}e^{3t} + \frac{1}{4}e^{-t} \end{array}\right.}$$

$\blacksquare$

Comme dans ce cas particulier on démontre le cas général : pour résoudre un système différentiel de la forme $Y' = AY$ où $A \in M_n(\mathbb{C})$ est **diagonalisable** et admet $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ comme valeurs propres de vecteurs propres associés $U_{\lambda_1}, \dots, U_{\lambda_n}$. Alors les solutions de $Y' = AY$ sont les fonctions

$$\boxed{Y(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} \cdot U_{\lambda_1} + \cdots + a_n e^{\lambda_n t} \cdot U_{\lambda_n}, \qquad a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}.}$$

1.2. **Un second exemple (avec cette fois un second membre).**

Exercice 1. *Résoudre le système différentiel $X'(t) = AX(t) + B(t)$ d'inconnue $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ avec*
$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ *et* $B(t) = \begin{pmatrix} -t \\ -2t+2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Solution : On écrit $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, il s'agit donc du système différentiel

$$\left\{\begin{array}{ll} x'(t) & = 3x(t) - 2y(t) - 4z(t) - t \\ y'(t) & = -2x(t) + 3y(t) + 2z(t) - 2t + 2 \\ z'(t) & = 3x(t) - 3y(t) - 4z(t) - 1 \end{array}\right.$$

Comme toujours on commence par **chercher la solution générale de l'équation sans second membre** $X'(t) = AX(t)$ à laquelle on ajoutera une solution particulière de l'équation génnérale $X'(t) = AX(t) + B(t)$.

• Solution générale de l'équation sans second membre $X'(t) = AX(t)$. Le polynôme caractéristique de A est **(faire le calcul)** $\chi_A(x) = -(x-2)(x-1)(x+1)$, la matrice A, carrée d'ordre 3 est donc diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$. On trouve sans peine **(faire le calcul)** les vecteurs propres :

$$V_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les solutions de l'équation sans second membre sont donc de la forme

$$\boxed{X_0(t) = \alpha e^{-t}V_{-1} + \beta e^t V_1 + \gamma e^{2t} V_2 = \begin{pmatrix} \alpha e^{-t} + \beta e^t \\ \beta e^t - 2\gamma e^{2t} \\ \alpha e^{-t} + \gamma e^{2t} \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.}$$

• Il reste à déterminer une solution particulière $X_p(t)$ du système

$$\begin{cases} x'(t) & = 3x(t) - 2y(t) - 4z(t) - t \\ y'(t) & = -2x(t) + 3y(t) + 2z(t) - 2t + 2 \\ z'(t) & = 3x(t) - 3y(t) - 4z(t) - 1 \end{cases}$$

Comme pour les ED2, vu la forme de second membre $B(t)^t = \begin{pmatrix} -t, & -2t+2, & -1 \end{pmatrix}^t$ donc les coordonnes sont des polynômes de degré au plus 1, on cherche une solution particulière donc les coordonnées sont aussi des polynômes de degré 1 : $x(t) = at + b, y(t) = a't + b', z(t) = a''t + b''$:

$$\begin{cases} a & = (3a - 2a' - 4a'' - 1)t + 3b - 2b' - 4b'' \\ a' & = (-2a + 3a' + 2a'' - 2)t + 2 - 2b + 3b' - 4b'' \\ a'' & = (3a - 3a' - 4a'')t - 1 + 3b - 3b' - 4b'' \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} 3a - 2a' - 4a'' & = 1 \\ -2a + 3a' + 2a'' & = 2 \\ 3a - 3a' - 4a'' & = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3b - 2b' - 4b'' & = a \\ 2b + 3b' - 4b'' & = a' - 2 \\ 3b - 3b' - 4b'' & = a'' + 1 \end{cases}$$

Le premier système donne $a = -1, a' = 1, a'' = -3/2$. On reporte dans le second système pour trouver $b = 1, b' = -1/2, b'' = 5/4$. Les solutions du système sont donc :

$$\boxed{X(t) = X_0(t) + X_p(t) = \begin{pmatrix} \alpha e^{-t} + \beta e^t - t + 1 \\ \beta e^t - 2\gamma e^{2t} + t - 1/2 \\ \alpha e^{-t} + \gamma e^{2t} - 3t/2 + 5/4 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.}$$

■

1.3. **Un troisième exemple.**

Exercice 2. *Résoudre le système différentiel*

$$(\mathscr{S}) \quad \begin{cases} x' & = & x + 2y - z \\ y' & = & 2x + 4y - 2z \\ z' & = & -x - 2y + z \end{cases}$$

Solution : • $(\mathscr{S})$ s'écrit $X'(t) = AX(t)$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $X(t)^t = (x(t), y(t), z(t))$.

• Le polynôme caractéristique de A est **(faire le calcul)** $\chi_A(t) = t^2(t-6)$.

• **(faire les calculs)** 0 est valeur propre double, mais $\ker(A)$ est de dimension 2 et admet pour base les vecteur $U_1^t = (1, 0, 1)$, $U_2^t = (2, -1, 0)$ (je met des transposées pour éviter d'écrire verticalement les vecteurs, ca prend moins de place...).

Enfin $\ker(A-6I_3)$ est de dimension 1 et admet pour base $U_3^t=(1,2,-1)$.
• Les solutions de $(\mathscr{S})$ sont donc de la forme

$$\boxed{X(t)=ae^{0\cdot t}U_1+be^{0\cdot t}U2+ce^{6t}U_3=\begin{pmatrix}a+2b+ce^{6t}\\-b+2ce^{6t}\\a-ce^{6t}\end{pmatrix}\quad a,b,c\in\mathbb{R}.}$$

■

1.4. **Un avant dernier exemple.**

On considère le système différentiel

$$(\mathscr{S})\qquad\begin{cases}x'(t)&=-x(t)+3y(t)\\y'(t)&=-2x(t)+4y(t).\end{cases}$$

(1) Écrire $(\mathscr{S})$ sous la forme $X'(t)=AX(t)$ avec $A\in M_2(\mathbb{R})$.
(2) Montrer que A est diagonalisable et donner une matrice diagonale D, une matrice inversible P vérifiant $A=PDP^{-1}$.
(3) Résoudre $(\mathscr{S})$.
(4) Chercher une solution particulière du système

$$(\mathscr{S}')\qquad\begin{cases}x'(t)&=-x(t)+3y(t)+e^t\\y'(t)&=-2x(t)+4y(t).\end{cases}$$

de la forme $x_p(t)=(at+b)e^t, y_p(t)=(ct+d)e^t$.
(5) En déduire les solutions de $(\mathscr{S}')$.

Solution :

(1) $X'(t)=AX(t)$ avec $A\begin{pmatrix}-1&3\\-2&4\end{pmatrix}$.
(2) $\chi_A(t)=(t-1)(t-2)$, les valeurs propres de A sont simples : A est donc diagonalisable et une base de vecteurs propres est $V_1=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}, V_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. Donc $A=PDP^{-1}$ avec $P=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$.
(3) Les solutions du système sont donc de la forme :

$$X(t)=\alpha e^tV_1+\beta e^{2t}V_2=\begin{pmatrix}3\alpha e^t+\beta e^{2t}\\2\alpha e^t+\beta e^{2t}\end{pmatrix},\quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

(4) On cherche une solution particulière de $(\mathscr{S}')$ de la forme $x(t)=(at+b)e^t, y(t)=(ct+d)e^t$. Donc $x'(t)=(at+b+a)e^t,\ y'(t)=(ct+d+c)e^t$ et si on remplace dans $(\mathscr{S}')$ il reste après simplification par e^t qui est non nul :

$$\begin{cases}t(2a-3c)+a+2b-3d-1&=0,\\t(2a-3c)+2b+c-3d&=0\end{cases}$$

qui nous conduit au système

$$\begin{cases} 2a - 3c & = 0 \\ a + 2b - 3d - 1 & = 0, \\ 2b + c - 3d & = 0. \end{cases}$$

On trouve sans peine $\boxed{a = 3, c = 2}$ et $\boxed{2b - 3d = -2}$. On cherche une solution particulière donc $b = d = 2$ conviennent ce qui donne la forme générale des solutions de $(\mathscr{S}')$:

$$\boxed{X(t) = \begin{pmatrix} 3\alpha e^t + \beta e^{2t} + (3t+2)e^t, \\ 2\alpha e^t + \beta e^{2t} + (2t+2)e^t \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.}$$

■

1.5. Un dernier exemple avec des valeurs propres complexes.

Exercice 3. *Donner les solutions réelles du système différentiel $X' = AX$ lorsque*

$$(\mathscr{S}) \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution : • Il s'agit donc du système

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) + y(t) \\ -x(t) + 2y(t) + z(t) \\ x(t) + z(t) \end{pmatrix}.$$

• **(faire les calculs)** Les valeurs propres de A sont $2, 1+i, 1-i$. (deux à deux distinctes A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.
• **(faire les calculs)** Le sous espace propre $\ker(A - 2I_3)$ est de dimension 1 et admet pour base les vecteurs $U_2^t = (1, 1, 1)$.
Enfin, pour les valeur propres non réelles $1+i, 1-i$ (qui sont conjuguées car A est réelle) il suffit de chercher le vecteur propre associé à la première U_{1+i} (celui associé à $1-i$ sera son conjugué : $U_{1-i} = \overline{U_{1+i}}$. On trouve $U_{1+i} = \begin{pmatrix} -i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
• Les solutions de $(\mathscr{S})$ sont alors de la forme **(souvenez vous pour le cas complexe ! !**) :

$$\boxed{\begin{aligned} X(t) &= ae^{2t}U_2 + b\,\mathrm{Re}(e^{(1+i)t}U_{1+i}) + c\,\mathrm{Im}(e^{(1+i)t}U_{1+i}) \\ &= \begin{pmatrix} ae^{2t} + be^t\cos(t) + ce^t\sin(t) \\ ae^{2t} + be^t\sin(t) + ce^t\cos(t) \\ ae^{2t} + be^t\sin(t) - ce^t\cos(t) \end{pmatrix} \quad a, b, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}}$$

■

Feuille ED-3 31 mars 2021.

Exercice 4. *Résoudre le système différentiel* $X' = AX + B(t)$ *d'inconnue* $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *avec* $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ *et* $B(t) = \begin{pmatrix} -t \\ -2t+2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5. *Résoudre le système différentiel* $X' = AX$ *d'inconnue* $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *avec* $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

Suivent quelques autres systèmes différentiels analogues aux types précédents pour vous entrainer. La solution suit chaque équation **(merci de signaler les éventuelles coquilles)**.

(1) $X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, **Solution :** $X(t) = \begin{pmatrix} ae^t + c\cos(t) + b\sin(t) \\ ae^t + be^{2t} \\ be^{2t} \\ -c\sin(t) + d\cos(t) \end{pmatrix}$.

(2) $\left\{\begin{array}{lcl} x'(t) & = & y(t) + t^2 \\ y'(t) & = & x(t) - t^2 \end{array}\right.$, **Solution :** $\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & ae^t - be^{-t} + t^2 - 2t + 2 \\ y(t) & = & ae^t + be^{-t} - t^2 + 2t - 2 \end{array}\right.$

(3) $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & y + z \\ y' & = & -x + 2y + z \\ z' & = & x + z \end{array}\right.$, **Solution :** $X(t) = \begin{pmatrix} a + ce^{2t} \\ a - be^t + ce^{2t} \\ -a + be^t + ce^{2t} \end{pmatrix}$.

(4) $X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix}$, **Solution :** $X(t) = \begin{pmatrix} ae^t - b\sin(t) + c\cos(t) \\ -3ae^t + b\cos(t) + csin(t) \\ -4ae^t + 2b\cos(t) + 2csin(t) \end{pmatrix}$.

(5) $\begin{cases} x'(t) & = x(t) + 2y(t) - z(t) \\ y'(t) & = 2x(t) + 4y(t) - 2z(t) \\ z'(t) & = -x(t) - 2y(t) + z(t) \end{cases}$, **Solution :** $\begin{cases} x(t) & = \alpha + 2\beta - \gamma e^{6t} \\ y(t) & = -\beta + 2\gamma e^{6t} \\ z(t) & = \alpha - \gamma e^{6t} \end{cases}$

Feuille ORAL 4 31 mars 2021.

Exercice 6. *Montrer que le déterminant d'une matrice antisymétrique réelle est positif ou nul.*

Exercice 7. *Que dire d'une matrice* $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ *vérifiant* $A^5 + A^3 + A - 3I_n = O$ *?*

Exercice 8. *(Navale-PSI, 2012). Soit* $A \in M_n(\mathbb{R})$. *S'il existe* $p \in \mathbb{N}^\star$ *tel que* $(A + {}^tA)^p = O_{M_n(\mathbb{R})}$, *montrer que* A *est antisymétrique.*

Exercice 9. *La matrice symétrique* $\begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ *est-elle diagonalisable ?*

Exercice 10. *Déterminer les matrices symétrique de* $M_2(\mathbb{C})$ *qui ne sont pas diagonalisables (on pourra commencer par par observer qu'une matrice symétrique de* $M_2(\mathbb{C})$ *n'est pas diagonalisable si et seulement si elle possède une valeur propre double et n'est pas semblable à une homothétie).*

Exercice 11. *Montrer que* $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2 n^4}$ *est une fonction continue sur* $\mathbb{R}$, *de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^\star$ *et étudier sa dérivabilité à l'origine.*

Exercice 12. *Étudier* $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$ *sur son domaine de définition, continuité, dérivabilité (en particulier montrer que* f *est dérivable à droite en* $0_+ \ldots$*).*

Atelier Problèmes. 31 mars 2021.

Le thème de cette partie est cette fois de montrer, sur des exemples, diverses techniques pour résoudre une équation différentielle qui ne fait pas partie des deux types (équation différentielle linéaire du premier ordre, équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants) que nous avons appris à résoudre ces derniers mois.

Devoir maison 3 : Faire l'exercice 2.
À « rendre » par les moyens habituels la semaine du 6 au 12 avril après la fin des « vacances ».

2. Le changement d'inconnue.

Dans une équation différentielle l'inconnue que l'on cherche, c'est la fonction $t \mapsto y(t)$ solution de l'équation. Cette méthode consiste à remplacer l'inconnue y par une nouvelle z vérifiant une équation différentielle que nous sommes en mesure de résoudre. Ensuite on en déduit y.

Exercice 13. *Résoudre l'équation différentielle*

$$✘ \qquad y''(t) + 4ty'(t) + (3 + 4t^2)y(t) = 0,$$

à l'aide du changement d'inconnue $z(t) = e^{x^2}y(t)$.

Solution : $z(t) = e^{t^2}y(t)$ équivaut à $y(t) = e^{-t^2}z(t)$. On a donc

$$y'(t) = e^{-t^2}\left(z'(t) - 2tz(t)\right), \qquad y''(t) = e^{-t^2}\Big(z''(t) - 4tz'(t) + (4t^2 - 2)z(t)\Big).$$

On reporte alors dans ✘ :

$$\begin{aligned} 0 &= y''(t) + 4ty'(t) + (3 + 4t^2)y(t) = \\ &= e^{-t^2}\Big(z''(t) - 4tz'(t) + (4t^2 - 2)z(t)\Big) + 4te^{-t^2}\left(z'(t) - 2tz(t)\right) + (3 + 4t^2)e^{-t^2}z(t) \\ &= e^{-t^2}\left(z''(t) + z(t)\right). \end{aligned}$$

Après simplification par $e^{-t^2} \neq 0$ on tombe sur l'équation vérifiée par z :

$$✔ \qquad z''(t) + z(t) = 0.$$

C'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants sans second membre d'équation caractéristique $r^2 + 1 = 0$. Nous savons que les solutions de ✔ sont de la forme

$$z(t) = a\cos(t) + b\sin(t), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Comme $y(t) = e^{-t^2}z(t)$, les solutions de ✘ sont

$$\boxed{y'(t) = e^{-t^2}[a\cos(t) + b\sin(t)], \quad a, b \in \mathbb{R}.}$$

CQFD ■

Exercice 14.

(1) Résoudre sur $\mathbb{R}_+^\star$ l'équation différentielle

$$ty''(t) + 2y'(t) + ty(t) = 1, \quad ✘$$

à l'aide du changement d'inconnue $z(t) = ty(t)$.

(2) Existe-t-il des solutions sur $\mathbb{R}_+^\star$ qui se prolongent continument en $t = 0$?

(3) L'équation admet-elle des solutions sur $\mathbb{R}_+$?

Solution :

(1) Pour $t \neq 0$, $z(t) = ty(t)$ équivaut à $y(t) = z(t)/t$, donc

$$y'(t) = \frac{z'(t)}{t} - \frac{z(t)}{t^2}, \qquad z''(t) = \frac{z''(t)}{t} - 2\frac{z'(t)}{t^2} + 2\frac{z(t)}{t^3}.$$

On reporte alors dans ✘, il reste

$$z''(t) + z(t) = 1$$

qui admet pour solution (classique)

$$z(t) = 1 + a\cos(t) + b\sin(t), \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Donc les solutions de ✘ sur $\mathbb{R}_+^\star$ sont

$$y(t) = \frac{z(t)}{t} = \frac{1 + a\cos(t) + b\sin(t)}{t}, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

(2) Soit $y(t) = \frac{1+a\cos(t)+b\sin(t)}{t}$ une solution sur $\mathbb{R}_+^\star$. On a lorsque x tend vers 0 :

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1 + a\cos(t) + b\sin(t)}{t} = y(t) = \frac{1 + a(1 - t^2/2 + o(t^2)) + b(t + o(t^2))}{t} \\ &= \frac{1 + a + bt - at^2/2 + o(t^2)}{t} \end{aligned}$$

qui admet une limite lorsque t tend vers 0_+ si et seulement si $a = -1$. Dans ce cas, la limite est b. Par conséquent, les solutions sur $\mathbb{R}_+^\star$ qui se prolongent continument en $t = 0$ sont les fonctions de la forme

$$y(t) = \frac{1 - \cos(t) + b\sin(t)}{t}, \qquad y(0) = b, \qquad b \in \mathbb{R}.$$

(3) Vu ce qui précède lorsque $t \to 0$: : $y(t) = b + t/2 + o(t)$ On en déduit immédiatement que y ainsi prolongée à l'origine est dérivable en $t = 0$ avec $y'(0) = 1/2$.
De même un nouveau DL nous donne $y'(t) = 1/2 - bt/3 + o(t)$ qui assure que y est deux fois dérivable en 0 avec $y''(0) = -b/3$. enfin comme en $t = 0$: $ty''(t) + 2y'(t) + ty(t)$ vaut $2y'(0) = 2(1/2) = 1$ la fonction y ainsi prolongée est bien solution même en 0 donc sur $\mathbb{R}_+$. ■

3. Le changement de variable.

Dans une équation différentielle, il y a l'inconnue y et la variable que nous notons ici t. Le changement de variable, comme son nom l'indique consiste à remplacer l'ancienne variable t par une nouvelle variable, disons v soit donc $t = \varphi(v)$ où φ sera une fonction régulière. Du coup, $y(t) = y(\varphi(v)) := z(v) = z(\varphi^{-1}(t))$ ou et la nouvelle inconnue sera z.

Exercice 15. *Résoudre sur* $]-1,1[$ *l'équation différentielle*

✘ $$(1-t^2)y''(t) - ty'(t) + 4y(t) = \arccos(t),$$

à l'aide du changement de variable $t = \cos(v) = \varphi(v)$.

Solution : Comme $t \in]-1,1[$, on a $v = \arccos(t) = \varphi^{-1}(t) \in]-\pi/2, \pi/2[$. $y(t) = y(\cos(v)) = z(v) = z(\varphi^{-1}(t))$ nous donne

$$\begin{aligned}
y'(t) &= [z(\varphi^{-1}(t))]' = [\varphi^{-1}(t)]' z'(\varphi^{-1}(t)) = [\arccos(t)]' z'(\varphi^{-1}(t)) \\
&= -\frac{z'(\varphi^{-1}(t))}{\sqrt{1-t^2}} = -\frac{z'(v)}{\sqrt{1-v^2}} \\
y''(t) &= -\left(\frac{z'(\varphi^{-1}(t))}{\sqrt{1-t^2}}\right)' = -\left(\frac{[z'(\varphi^{-1}(t))]'\sqrt{1-t^2} - z'(\varphi^{-1}(t))[\sqrt{1-t^2}]'}{1-t^2}\right) \\
&= -\left(\frac{-\frac{z''(\varphi^{-1}(t))}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \sqrt{1-t^2} - z'(\varphi^{-1}(t))\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}}{1-t^2}\right) \\
&= \frac{z''(v)}{1-\cos^2(v)} - \frac{\cos(v)z'(v)}{(1-\cos^2(v)}^{3/2}.
\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à remplacer dans ✘ et $(1-t^2)y''(t) - ty'(t) + 4y(t) = \arccos(t)$ devient

$$(1-\cos^2(v))\left(\frac{z''(v)}{1-\cos^2(v)} - \frac{\cos(v)z'(v)}{(1-\cos^2(v))^{3/2}}\right) + \cos(v)\frac{z'(v)}{\sqrt{1-\cos^2(v)}} + 4z(v) = v$$

soit après simplifications, pour $v \in]-\pi/2, \pi/2[$:

✔ $$z''(v) + 4z(v) = v.$$

qui classiquement admet pour solutions

$$z(v) = a\cos(2v) + b\sin(2v) + \frac{t}{4}, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Sachant que $v = \arccos(t)$ et $y(t) = z(\arccos(t))$, les solutions de ✘ sur $]-1,1[$ sont

$$\boxed{y(t) = a\cos(2\arccos(t)) + b\sin(2\arccos(t)) + \frac{\arccos(t)}{4}, \qquad a, b \in \mathbb{R},\ t \in]-1,1[.}$$

À l'aide des formules $\cos(2u) = \cos^2(u) - \sin^2(u)$ et $\sin(2v) = 2\sin(v)\cos(v)$, ces solutions s'écrivent aussi (exercice !) sous la forme :

$$\boxed{y(t) = a(2t^2-1) + 2bt\sqrt{1-t^2} + \frac{\arccos(t)}{4}, \qquad a, b \in \mathbb{R},\ t \in]-1,1[.}$$

CQFD ■

Exercice 16. *Résoudre sur* $\mathbb{R}_+^\star$ *l'équation différentielle*

✘ $$t^2y''(t) + ty'(t) + y(t) = 0,$$

à l'aide du changement de variable $t = e^v$.

Solution : Équation en z : $z''(v) + z(v) = 0$ puis $y(t) = a\cos(\ln(t)) + b\sin(\ln(t))$. ■

Exercice 17. *Résoudre sur* $\mathbb{R}$ *l'équation différentielle*

✘ $$(1+t^2)^2y''(t) + 2(t-1)(t^2+1)y'(t) + y(t) = 0,$$

à l'aide du changement de variable $t = \tan(v)$.

Solution : Équation en z : $z''(v) - 2z'v) + z(v) = 0$ puis $y(t) = (a\arctan(t) + b)e^{\arctan(t)}$. ■

Exercice 18. *Résoudre sur* $\mathbb{R}_+^\star$ *l'équation différentielle*

✘ $$ty''(t) - y'(t) - t^3y(t) = 0,$$

à l'aide du changement de variable $t^2 = v$.

Solution : Équation en z : $4z''(v) - z(v) = 0$ puis $y(t) = ae^{t^2/2} + be^{-t^2/2}$. ■

4. Recherche de solutions développables en séries entières.

Tout est dans le titre, on cherche une solution de l'équation différentielle sous la forme $y(t) = \sum_n a_nt^n$, on remplace dans l'équation différentielle et on identifie sachant que si deux séries entière coïncident sur un intervalle elles ont les mêmes coefficients. Si on arrive a déterminer les coefficients on s'assure enfin que le rayon de convergence n'est pas nul....

Exercice 19. *Chercher une solution développable en série entière au voisinage de l'origine pour l'équation différentielle :*

✘ $$y''(t) + 2ty'(t) + 2y(t) = 0.$$

Et préciser les solution paires.

Solution : • Avec $y(t)=\sum_n a_n t^n$, ✘ devient

$$\begin{aligned}y''(t)+2ty'(t)+2y(t) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} + 2t\sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} + 2\sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n,\end{aligned}$$

afin de regrouper les sommes avec une même ppuissance pour t, on fait le changement d'indice $n=2+k$ dans la première

$$\begin{aligned}y''(t)+2ty'(t)+2y(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} (2+k)(1+k)a_{k+2}t^k + 2\sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n,\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [(2+n)(1+n)a_{n+2} + 2na_n + 2a_n]t^n\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [(2+n)(1+n)a_{n+2} + 2a_n(n+1)]t^n.\end{aligned}$$

Et ✘ s'écrit

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(2+n)(1+n)a_{n+2} + 2a_n(n+1)]t^n = 0,$$

soit

$$a_{n+2} = -\frac{2}{n+2}a_n, \qquad \forall\, n\in\mathbb{N}.$$

Pour en déduire a_n en fonction des premiers termes, il faut distinguer la parité de n :
• Si $n=2p$ est pair :

$$\begin{aligned}a_{2p} &= -\frac{2}{2p}a_{2p-2} = \frac{(-1)^2 2^2}{2p(2p-2)}a_{2p-4}\\ &= \cdots = \frac{(-1)^p 2^p}{2p(2p-2)(2p-4)\cdots 4\cdot 2}a_0 = \frac{(-1)^p}{p!}a_0.\end{aligned}$$

• De même, si $n=2p+1$ est impair

$$\begin{aligned}a_{2p+1} &= -\frac{2}{2p+1}a_{2p-1} = \frac{(-1)^2 2^2}{(2p+1)(2p-1)}a_{2p-3}\\ &= \cdots = \frac{(-1)^p 2^p}{(2p+1)(2p-1)(2p-3)\cdots 5\cdot 3}a_1\\ &= \frac{(-1)^p 2^p (2p)(2p-2)\ldots 4\cdot 2}{(2p+1)(2p)(2p-1)(2p-2)(2p-3)\cdots 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}a_1 = \frac{(-1)^p 2^{2p} p!}{(2p+1)!}a_0.\end{aligned}$$

• Pour tout $t\in\mathbb{R}$, la série $\sum_n a_n t^n$ converge car

$$a_{2p} = O(1/p!) \qquad \text{et} \quad a_{2p+1} \simeq \frac{e^{p-1}}{2^{3/2} e\, p^{p+1}}$$

(pour le second équivalent, utilisez la formule de Stirling : $n! \simeq n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ et pour la convergence d'Alembert) donc son rayon de convergence est $R=+\infty$.
Vu ses coefficients, cette série entière est bien solution sur $\mathbb{R}$ de notre équation différentielle.
• Pour que cette solution soit paire il faut et il suffit que les termes dans la série de degré impair en t soient nuls, donc vu les calculs précédents que $a_1=0$. dans ce cas il reste

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}t^{2n} = a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}t^{2n} = a_0\exp(-t^2).$$

■

Exercice 20.

(1) Montrer que l'équation différentielle

$$\text{✘} \qquad ty''(t) + y'(t) + y(t) = 0,$$

admet une unique solution développable en série entière à l'origine et vérifiant $y(0) = 1$.

(2) Montrer que $g(t) = y'(t)^2 + y^2(t)$ admet une limite finie notée l en $+\infty$.

(3) En déduire que y est bornée sur $\mathbb{R}_+$ et que $\lim_{t\to+\infty} f'(x) = l$.

Solution :

(1) Comme dans l'exercice précédent, on remplace dans ✘ l'inconnue y par la série entière$\sum_n a_n t^n$ de rayon de convergence R. Puis, après des changements d'indices on peux (observez bien que la première somme sur la quatrième ligne commence pour $k = 0$ alors quelle commençait dans la ligne précédente par $k = 1$: ce n'est pas une erreur c'est parce que le terme correspondant à $k = 0$ est nul !!) regrouper les sommes :

$$\begin{aligned} ty''(t) + y'(t) + y(t) &= t\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} na_n t^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} na_n t^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)a_{k+1} t^k + \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)a_{k+1} t^k + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k+1)a_{k+1} t^k + \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)a_{k+1} t^k + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} [(k+1)^2 a_{k+1} + a_k] t^k = 0. \end{aligned}$$

Par unicité d'un développement en série entière, y sera solution de ✘ si et seulement si

$$(n+1)^2 a_{n+1} = -a_n, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

On en déduit facilement que pour tout entier n :

$$a_n = \frac{-a_{n-1}}{n^2} = \frac{(-1)^2 a_{n-2}}{n^2(n-1)^2} = \cdots = \frac{(-1)^n a_0}{n!^2} = \frac{(-1)^n}{(n!)^2},$$

puisque $y(0) = a_0 = 1$.
La série entière $y(t) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} t^n$ possède un rayon de convergence infini. C'est donc l'unique solution de ✘ qui est développable en série entière à l'origine avec $y(0) = 1$.

(2) C'est de l'analyse, y arriverez vous ? (montrez que g est décroissante minorée).

(3) Montrer que $|y(t)| \leq 1$ et que $|y'(t)| \leq 1/\sqrt{t}$... ■

■

Exercice 21. *Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle*

Montrer que l'équation différentielle

✘
$$y''(t) - ty(t) = 0,$$

admet une solution développable en série entière à l'origine autre que la fonction identiquement nulle.

Solution : On trouve $y(t) = \sum_n a_n x^n$ avec

$$a_{3n} = \frac{(3n-2)(3n-5)\dots 4\cdot 1}{(3n)!}, \quad a_{3n+1} = \frac{(3n-1)(3n-4)\dots 5\cdot 2}{(3n+1)!}, \quad a_{3n+2} = 0.$$

Observez bien qu'il n'y pas unicité de la solution malgré les conditions initiales $y^{(k)}(0) = 0$....
■

L2CUPGE - Ateliers Plumes

Semaine 11 - TD2

Gpe 2

le 7/4/21

10^{h}

Système diff. linéaire d'ordre 1

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} x'(t) = 2x(t) + 3y(t) \\ y'(t) = x(t) - y(t) \end{cases}$$

x et y deux fonctions inconnues

$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ $\quad X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$= A\,X(t) + B(t)$$

Sy. D. lin d'ordre 1

$\rightsquigarrow$ A diago λ_1, λ_2 vp

$U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2}$ vect p.

Sol : $\boxed{X(t) = e^{\lambda_1 t} U_{\lambda_1} + e^{\lambda_2 t} U_{\lambda_2}}$

voir page 2 (§4)

Exercice : Résoudre le système différentiel $X' = AX$

où $A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -4 & 4 & 2 \\ -4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$

$$X'(t) = AX(t) \iff \begin{cases} x'(t) = -3x(t) + 3y(t) + 2z(t) \\ y'(t) = \dots \\ z'(t) = \dots \end{cases}$$

• Déterminer les vp de A :

$$\chi_A(t) = \det(A - tI_3) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 3 & 2 \\ -4 & 4-\lambda & 2 \\ -4 & 3 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{=} \begin{vmatrix} -3-\lambda & 3 & 2 \\ -4 & 4-\lambda & 2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{C_2 \leftarrow C_2 + C_3}{=} \begin{vmatrix} -3-\lambda & 5 & 2 \\ -4 & 6-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -3-\lambda & 5 \\ -4 & 6-\lambda \end{vmatrix}$$

peu sportif

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 5 & 2 \\ -4 & 6-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -3-\lambda & 5 \\ -4 & 6-\lambda \end{vmatrix}$$

peu sportif

$$\underset{C_1 \leftarrow C_1 + C_2}{=} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 5 & 2 \\ 2-\lambda & 6-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{=} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 5 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)^1 (1-\lambda)^2$$

Donc $Sp(A) = \{1, 2\}$ $\qquad$ $E_1 = \mathrm{Ker}(A - I_3)$

• Déterminer bases des sous espaces propres $\qquad$ $E_2 = \mathrm{Ker}(A - 2I_3)$

A priori $\begin{cases} \dim E_1 = 1 \text{ ou } 2 : 2 \text{ si } A \text{ est diago} \\ \dim E_2 = 1 \end{cases}$

• $E_1 = \mathrm{Ker}(A - I_3)$ $\qquad A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -4 & 4 & 2 \\ -4 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$

$V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A - I_3) \iff (A - I_3)V = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$\iff \begin{pmatrix} -4 & 3 & 2 \\ -4 & 3 & 2 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -4a + 3b + 2c = 0 \\ -4a + 3b + 2c = 0 \\ -4a + 3b + 2c = 0 \end{cases}$$

Donc $V \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in E_1 \iff -4a + 3b + 2c = 0$

$$\iff 4a = 3b + 2c$$

$$\iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3b}{4} + \frac{2c}{4} \\ b \\ c \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathrm{Ker}(A - I_3) = \mathrm{Vect}\left\{ \underset{u}{\begin{pmatrix} 3/4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \underset{v}{\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\} = \boxed{\mathrm{Vect}\left\{ \underset{4u}{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{2v}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}} \right\}}$$

• $E_1 = \mathrm{Ker}(A - I_3)$ $\qquad$ $A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -4 & 4 & 2 \\ -4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

$$V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A - 2I_3) \iff (A - 2I_3)V = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\iff \begin{pmatrix} -5 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -5a + 3b + 2c = 0 \\ -4a + 2b + 2c = 0 \\ -4a + 3b + c = 0 \end{cases}$$

On trouve $a = b = c$: $V \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$E_2 = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

On a donc $E_2 = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$, $E_1 = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right\}$

A est donc diagonalisable : $A = P \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix} P^{-1}$

avec $P = \begin{pmatrix}3&1&1\\4&0&1\\0&2&1\end{pmatrix}$

$\begin{matrix}1&1&2\end{matrix}$

Les solutions de $X' = AX$ sont

$$\boxed{X(t) = \alpha e^{t}\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix} + \beta e^{t}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + \gamma e^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix}3\alpha e^{t} + \beta e^{t} + \gamma e^{2t}\\ 4\alpha e^{t} + \gamma e^{2t}\\ 2\beta e^{t} + \gamma e^{2t}\end{pmatrix}$$

Avec un second membre : Résoudre $X(t)' = AX(t) + B(t)$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -4 & 4 & 2 \\ -4 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad B(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t+1 \end{pmatrix}$$

$X' = AX + B$

$$\begin{cases} x'(t) = -3x(t) + 3y(t) + 2z(t) + t \\ y'(t) = -4x(t) + 4y(t) + 2z(t) \\ z'(t) = -4x(t) + 3y(t) + 3z(t) + t + 1 \end{cases}$$

Lorsqu'il y a un second membre : la procédure est la suivante :

1) Résol. de l'équation sans 2e membre $X' = AX$
2) Recherche d'une sol. part. X_p
3) Les sol sont : $X(t) = X_0(t) + X_p(t)$

$$(\mathcal{E})\quad \begin{cases} x'(t) = -3x(t) + 3y(t) + 2z(t) + t \cancel{+1} \\ y'(t) = -4x(t) + 4y(t) + 2z(t) \\ z'(t) = -4x(t) + 3y(t) + 3z(t) + t + 1 \end{cases}$$

On cherche des sol par $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ pol. de degé 1

$x(t) = at + b$

$y(t) = ct + d$ on reporte dans $(\mathcal{E})$

$z(t) = et + f$

$$\begin{cases} a = -3(at+b) + 3(ct+d) + 2(et+f) + t \\ c = -4(at+b) + 4(ct+d) + 2(et+f) \\ e = -4(at+b) + 3(ct+d) + 3(et+f) + \underline{t} + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = t(-3a + 3c + 2e + 1) \cancel{+} -3b + 3d + 2f \\ c = t(-4a + 4c + 2e) - 4b + 4d + 2f \\ e = t(-4a + 3c + 3e + 1) - 4b + 3d + 3f + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = t(-3a+3c+2e+1) \cancel{+} -3b+3d+2f \\ b = t(-4a+4c+2e) \quad -4b+4d+2f \\ e = t(-4a+3c+3e+1) \quad -4b+3d+3f-1 \end{cases}$$

on identifie les coef des pol :

$$\begin{cases} a = -3b+3d+2f \\ -3a+3c+2e+1=0 \\ c = -4b+4b+2f \\ -4a+4c+2e=0 \\ e = -4b+3d+3f-1 \\ -4a+3c+3e+1=0 \end{cases}$$

6 équations & 6 inconnues

ya de l'espoir

Calcul pénible : mieux vaut le programmer.

Feuille oral 4 - Exo 9 $A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

c'est une matrice symétrique ${}^tA = A$
est-elle diagonalisable ?

- On sait que toute matrice réelle symétrique est diagonalisable dans une BON.
Ici A symétrique mais non réelle : donc on ne peut rien dire à priori.
- $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & i \\ i & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(2-\lambda) - i^2$
$= \lambda^2 - 2\lambda + 1$
$= \boxed{(\lambda - 1)^2 = \chi_A(\lambda)}$

donc $\boxed{Sp(A) = \{1\}}$

Donc A sera diagonalisable ssi $\dim \operatorname{Ker}(A - I_2) = 2$

$$A - I_2 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \neq 0 \quad \operatorname{rg}(A - I_2) \geq 1$$

$\Updownarrow$

$A = I_2$
ce qui est absurde !

$i C_1 = C_2 \Rightarrow$ les colonnes sont liées

$\Rightarrow \dim \operatorname{Im}(A - I_2) \leq 1$

$\dim \operatorname{Im}(A - I_2) = 1$

Sol 3 $\quad \det(A - I_2) = \begin{vmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{vmatrix} = -1 - i^2 = -1 + 1 = 0$

$\Longrightarrow \operatorname{Ker}(A - I_2)$ dim ≥ 1 !

<u>Sol</u> : 1 est l'unique valeur propre de A

donc si A est diagonalisable, il existe $P \in GL_2(\mathbb{C})$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = P \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{vp de } A} P^{-1} = PP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

absurde !