Calcul Matriciel : Mardi 22 septembre ~ Groupe 6 — $13^h45 / 15^h45$

Exercice 7. (page 20)

B) $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = x_3 + x_4 \ \& \ x_1 = x_4\}$.

$V \subset \mathbb{R}^4$, V est-il un sev de $\mathbb{R}^4$?

- V n'est pas vide car $0_{\mathbb{R}^4} = (0,0,0,0) \in V$
- $X = (a, b, c, d)$, $Y = (e, f, g, h) \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$: $\boxed{X + \lambda Y \in V\ ?}$

(*) $\left.\begin{array}{l} a+b = c+d \\ a = d \end{array}\right\} X \in V$ $\qquad$ $\begin{array}{l} e+f = g+h \\ e = h \end{array}$ (**)

$$X + \lambda Y = (a, b, c, d) + \lambda(e, f, g, h)$$

$$= (\underbrace{a+\lambda e}_{x_1}, \underbrace{b+\lambda f}_{x_2}, \underbrace{c+\lambda g}_{x_3}, \underbrace{d+\lambda h}_{x_4}) \in U \iff x_1 + x_2 = x_3 + x_4 \ \underline{\text{et}} \ x_1 = x_4$$

- $\boxed{x_1 + x_2} = a + \lambda e + b + \lambda f = a + b + \lambda(e+f)$

$$= \underbrace{c+d}_{(*)} + \lambda \underbrace{(g+h)}_{(**)} = c + d + \lambda g + \lambda h$$

$$= \underbrace{\boxed{c+\lambda g}} + \underbrace{d + \lambda \cancel{f}\, h}$$

$$= \underline{x_3 + x_4}$$

- $x_1 = a + \lambda e = d + \lambda h = x_4$

$X \in U_{(*)}$: $a = d$; $Y \in U$: $e = h \ (**)$

Donc U est bien un sev de $\mathbb{R}^4$

Question Subsidiaire

$X = (a, b, c, d) \in V$

$$\boxed{\begin{array}{c} \cancel{a}+b=c+\cancel{d} \\ \& \quad a=d \end{array}}$$

$$X \overset{?}{=} a \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix} + \cancel{d}\,b \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

$a=d$

$\boxed{b=c}$

$$X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ a \end{pmatrix} = \longrightarrow = \begin{pmatrix} a \\ b \\ b \\ a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in V} + b \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in V}}$$

On vient de démontrer que tout vecteur X de V est combinaison linéaire des 2 vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$(1, 0, 0, 1) \in M_{1,4}(\mathbb{R})$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in M_{4,1}(\mathbb{R})$

---

c) exo 7 page 20 $\quad V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & d \\ 0 & e & 0 \end{pmatrix} \text{ où } a, b, c, d, e \in \mathbb{R} \right\}$

$V \subset M_3(\mathbb{R})$. Est-il un sev de $M_3(\mathbb{R})$?

$V = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = x_4, x_1 + x_2 = x_3 + x_4$

$V = \{ (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}} : a_{13} = 0, a_{21} = a_{31} = a_{33} = 0 \}$

• $V \neq \emptyset$ car $0_{M_3(\mathbb{R})} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in V$

• $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & d \\ 0 & e & 0 \end{pmatrix} \in V \subset M_3(\mathbb{R})$, $B = \begin{pmatrix} a' & b' & 0 \\ 0 & c' & d' \\ 0 & e' & 0 \end{pmatrix} \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$A + \lambda B \in V$?

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$: $\alpha + \lambda \beta \in \mathbb{R}$

$$A + \lambda B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & d \\ 0 & e & 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\lambda \begin{pmatrix} a' & b' & 0 \\ 0 & c' & d' \\ 0 & e' & 0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \lambda a' & \lambda b' & 0 \\ 0 & \lambda c' & 0 \\ 0 & \lambda e' & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} a+\lambda a' & b+\lambda b' & \boxed{0} \\ \boxed{0} & c+\lambda c' & d+\lambda d' \\ \boxed{0} & e+\lambda e' & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

V

Donc V est un sev de E

c')

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a^2 & b & 0 \\ 0 & c & d \\ 0 & e & 0 \end{pmatrix} \dots \right\} \subset M_3(\mathbb{R})$$

V est-il un sev de $M_3(\mathbb{R})$?

$\to$ V n'è doit pas être un sev

Il faut chercher un contre exemple :

1 $\to$ Trouver $A \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda A \notin V$

2 $\to$ ——— $A, B \in V$: $A+B \notin V$

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & b & 0 \\ 0 & c & d \\ 0 & e & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a'^2 & b' & 0 \\ 0 & c' & d' \\ 0 & e' & 0 \end{pmatrix} : A+B = \begin{pmatrix} a^2+a'^2 & b+b' & 0 \\ 0 & c+c' & d+d' \\ 0 & e+e' & 0 \end{pmatrix} \in V !$$

$a^2+a'^2 = \left(\sqrt{a^2+a'^2}\right)^2$

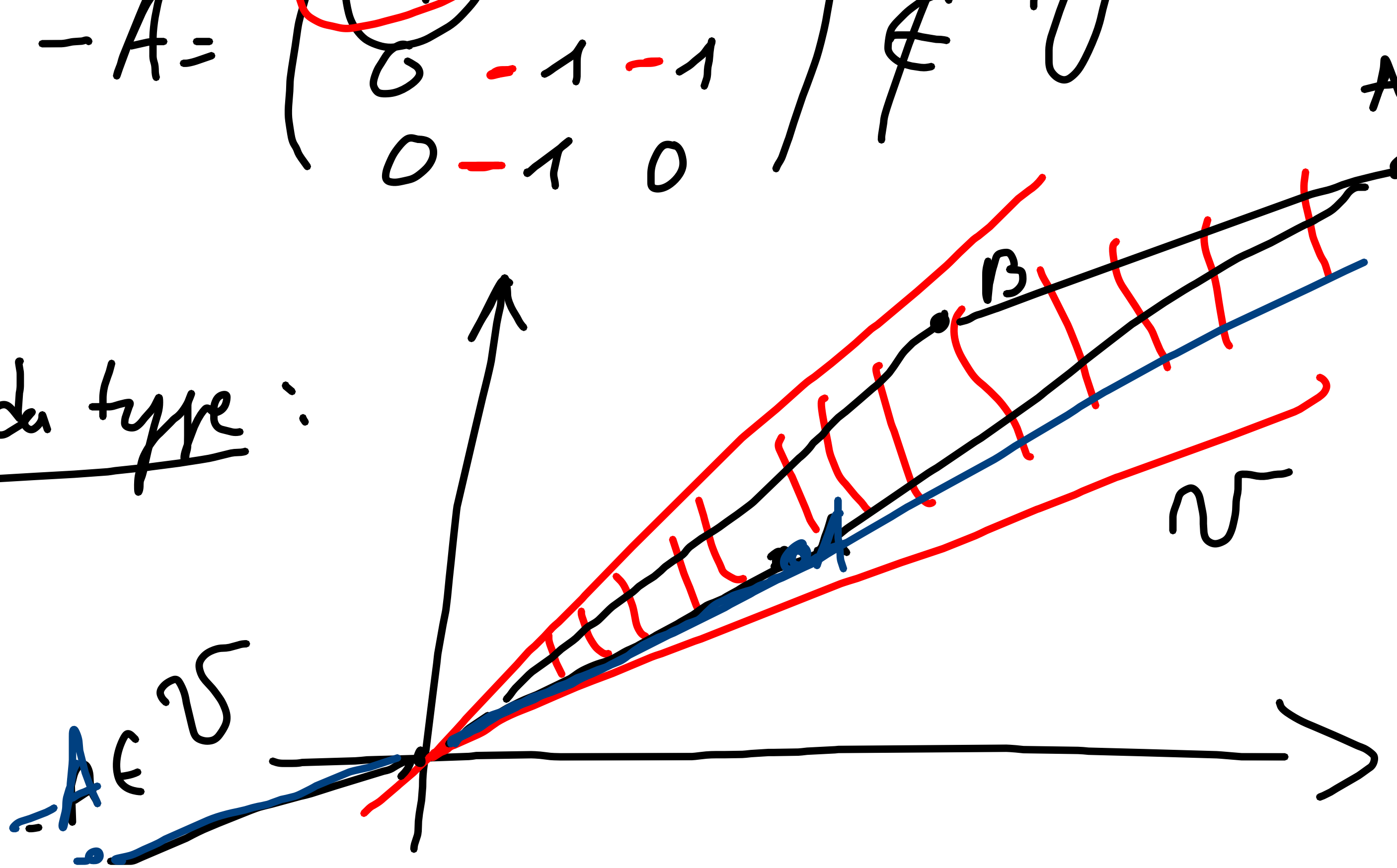
donc 2 marche toujours

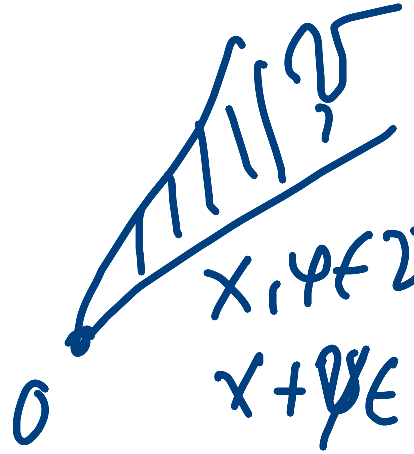
$\lambda \in \mathbb{R}$, $\quad A = \begin{pmatrix} \underbrace{4}_{=2^2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{V} \qquad \lambda a^2 = (\sqrt{\lambda}\, a)^2 \quad \lambda > 0$

$A \in \mathcal{V}, \lambda \in \mathbb{R} : \lambda A \in \mathcal{V}$

$(-1)A = -A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \notin \mathcal{V}$ car $-4 < 0$

<u>$\mathcal{V}$ est du type</u> :





$x, y \in \mathcal{V}$

$x + y \in \mathcal{V}$

$x \in \mathcal{V}$

$\lambda x \in \mathcal{V}$

$\forall \lambda > 0$

$\mathbb{R}^2$

D)

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ |a| & 0 \end{pmatrix}, \ a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset M_2(\mathbb{R})$$

<u>V est-il un sev de</u> $M_2(\mathbb{R})$?

La valeur absolue suggère que V ne sera pas un sev de $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} -\pi & 8 \\ |-\pi| = \pi & 0 \end{pmatrix} \in V \qquad a = -\pi \quad b = 8$$

$$\begin{pmatrix} \pi & -8 \\ -\pi & 0 \end{pmatrix} \cancel{\in} V$$

$A \in V$ et $-A \notin V$

Si V est un e.v. $\quad -A = \begin{pmatrix} +\pi & -8 \\ -\pi & 0 \end{pmatrix} \in V$ $\quad$ V n'est pas

Absurde !!

Donc V n'est pas un sev de $M_2(\mathbb{R})$.

Fin

Exercice : Preuve du th. 8 au bas de la page 11

E un e.v. F et G deux sev de E. Alors

1) $F \cap G$ est un sev de E SEV

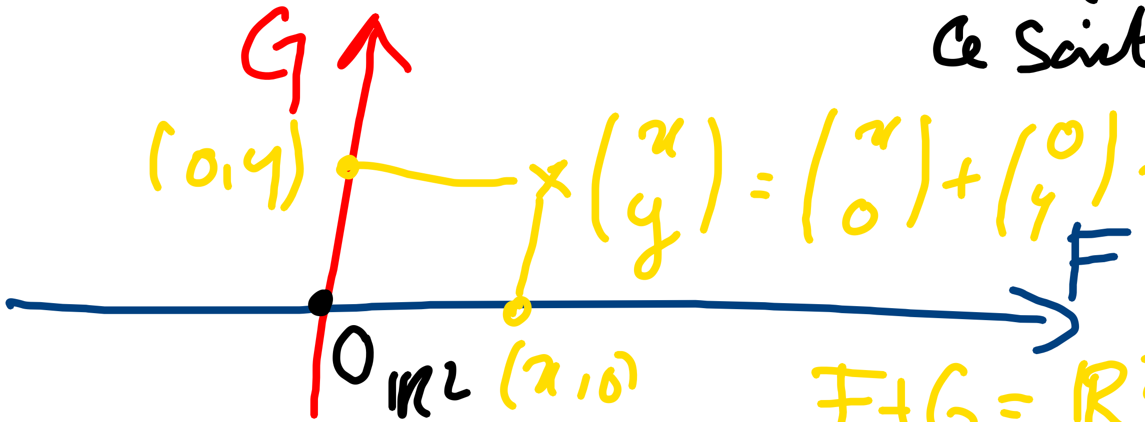
2) $F+G = \{x+y \text{ avec } x \in F,\ y \in G\}$

⚠ A ne pas confondre avec la réunion

ex Dans $E = \mathbb{R}^2$ $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R} \right\}$, $G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix},\ y \in \mathbb{R} \right\}$

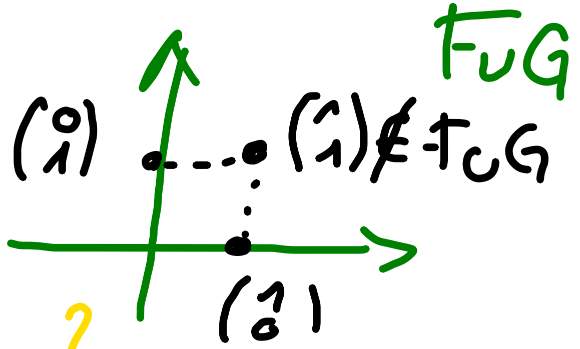
Ce sont deux SEV de $\mathbb{R}^2$

$? = F+G$



$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \in F+G$

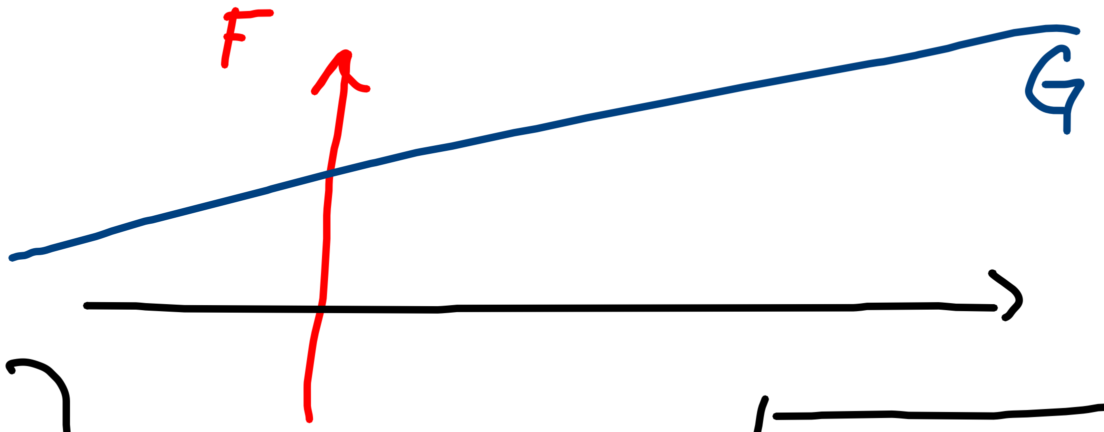
$F \cup G$: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin F \cup G$



$F+G = \mathbb{R}^2$ $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$

•1 F, G sev de E. <u>But</u> MQ $F \cap G$ est un SEV de E.

(•) MQ $F \cap G \neq \emptyset$



F est un <u>SEV de E</u> : $0_E \in F$

G est un <u>SEV de E</u> : $0_E \in G$

$\Rightarrow 0_E \in F \cap G$: $\boxed{F \cap G \neq \emptyset}$

(•) $x \in F \cap G$, $y \in F \cap G$, $\lambda \in \mathbb{R}$: $x + \lambda y \in F \cap G$?

- Montrons que $x + \lambda y \in F$, x et $y \in F \cap G$: x et y sont dans F mais F est sev de E donc <u>$x + \lambda y \in F$</u>, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

De même $x, y \in F \cap G \Rightarrow x, y \in G$ sev de $E \Rightarrow x + \lambda y \in G$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ <u>$x + \lambda y \in F \cap G$</u>

$F \cap G$ est <u>bien un sev de E</u>

② Montrons que $F+G$ est un sev de E

- $F+G \neq \emptyset$. F, G sont 2 sev de E : $0_E \in F$, $0_E \in G$

Donc $\underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G} = 0_E \in F+G$: $\underline{F+G \neq \emptyset}$

Cours

- $\underbrace{X \in F+G}$, $\underbrace{Y \in F+G}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ Montrons que $\boxed{X + \lambda Y \in F+G}$

$X = \underbrace{x_F}_{\in F} + \underbrace{x_G}_{\in G}$ $\quad$ $Y = \underbrace{y_F}_{\in F} + \underbrace{y_G}_{\in G}$

$\underline{\text{Donc}}$ $X + \lambda Y = x_F + x_G + \lambda(\overbrace{y_F + y_G}^{Y}) = \overbrace{(x_F + \lambda y_F)}^{\in F}_{\text{car } F \text{ sev}} + \overbrace{(x_G + \lambda y_G)}^{\in G \text{ car } G \text{ sev}} \in F+G$

$\boxed{F+G \text{ est bien un sev}}$

Devoir : Exercice 5, 8

Exercice 9 page 20

(A) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

d° x y z   d° x y z

$X = (x, y, z) \longmapsto T(x, y, z) = (x - 2y\ ,\ x + z)$ est-elle linéaire ?

$$\begin{cases} T(\lambda X) = \lambda T(X) \\ T(X + Y) = T(X) + T(Y) \end{cases} \iff T(X + \lambda Y) = T(X) + \lambda T(Y)$$

Montrons que T est linéaire $X = (x, y, z)$ $Y = (x', y', z')$, $\lambda \in \mathbb{R}$

il faut montrer que $T(X + \lambda Y) = T(X) + \lambda T(Y)$

$$T(X) = (x - 2y, \underbrace{x + z}) \qquad T(Y) = (x' - 2y', x' + z')$$

donc

$$T(X) + \lambda T(Y) = (x - 2y, x + z) + \lambda (x' - 2y', x' + z')$$

$$= (x - 2y + \lambda(x' - 2y'), x + z + \lambda(x' + z'))$$

$$= (x + \lambda x' - 2(y + \lambda y'), x + \lambda x' + z + \lambda z')$$

$$T(X + \lambda Y) = T(x + \lambda x', y + \lambda y', z + \lambda z')$$

$$= (x + \lambda x' - 2(y + \lambda y'), x + \lambda x' + z + \lambda z')$$

$// \leftarrow T(X) + \lambda T(Y) = T(X + \lambda Y)$

T est bien linéaire

$\boxed{B}$ $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (\underbrace{a+b}, \underbrace{c+d}) \in \mathbb{R}^2$ est linéaire (exercice)

même idée que pour $\boxed{A}$. Alors : $T \in \mathcal{L}(M_2(\mathbb{R}), \mathbb{R}^2)$

$\boxed{C}$. $T : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto T(A) = \boxed{abcd.} \neq$ comb. linéaire de a, b, c, d

<u>T est-elle linéaire ?</u>

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ $\lambda \in \mathbb{R}$

$A + \lambda A' = \begin{pmatrix} a+\lambda a' & b+\lambda b' \\ c+\lambda c' & d+\lambda d' \end{pmatrix}$

$T(A) + \lambda T(A') = abcd + \lambda a'b'c'd'$

$\| \to ???$

$T(A+\lambda A') = (a+\lambda a')(b+\lambda b')(c+\lambda c')(d+\lambda d')$

Ca va pas marcher, on cherche un contre-exemple.

$\underline{T(2A) = 2T(A)}$ ... $T(B+A) = T(B) + T(A)$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $T(A) = abcd$

T n'est pas linéaire !

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $A+B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$T(A) = 1.0.1.0 = 0$

$T(B) = 0.1.0.1 = 0$

$T(A+B) = 1.1.1.1 = 1$

$T(A) + T(B) = 0 \neq 1 = T(A+B)$

<u>Ou bien</u>

- $\underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\underline{T(C) = 1}$ $2C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$T(2C) = 2.2.2.2 = 16$

$2T(C) = 2.\underline{1} = 2$