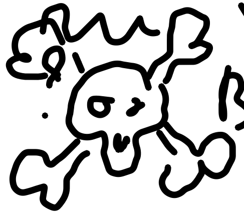
Calcul Matriciel groupe 6 (TD 4 - 23/09 - 13h45)

Exercice 9 (fin :D)

$$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$X=(x,y,z) \longmapsto T(X) = \max\{\underbrace{x+y}_{\text{Bon}}, \underbrace{x+z}_{\text{Bon}}\}$$



Q : $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$?

ex $X = \begin{pmatrix}1\\-1\\6\end{pmatrix}$ $\quad T(X) = \max\{1-1, 1+6\} = \max\{0, 7\} = 7$

$$|x| = \max\{x, -x\}$$

On pense que T ne va pas être linéaire : $X \in \mathbb{R}^3, \alpha \in \mathbb{R} : f(\alpha X) \neq \alpha f(X)$

ou bien

trouver $X, Y \in \mathbb{R}^3 : f(X+Y) \neq f(X) + f(Y)$

• $X=(1,0,1)$ $\quad Y=(2,0,2)$ $\quad X+Y=(3,0,3)$

$T(X)=\max\{1,2\}=2$
$T(Y)=\max\{2,4\}=4$ $\quad T(X+Y)=2+4=6$

$T(X+Y)=\max\{3,6\}=6=T(X)+T(Y)$: pas le bon choix

• $X=(1,-1,6)$ $\quad T(X)=\max\{0,7\}=7=T(X)$

$T(\alpha X)=T(\alpha,-\alpha,6\alpha)$ $\quad \alpha T(X)=7\alpha$

$=\max\{0,7\alpha\}$

$= ?$ $\quad = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha<0 \\ 7\alpha & \text{si } \alpha\geq 0 \end{cases}$

$\alpha=-2$

$T(-2X)=T(-2,2,-12)$

$=\max\{0,-14\}$

$=0\neq -14=-2\cdot 7=-2T(X)$ $\Longrightarrow$ T n'est pas linéaire ou bien $X=(1,0,3)$ $Y=(0,3,1)$ $X+Y=(1,3,4)$

$T(X)=\max\{1,4\}=4$

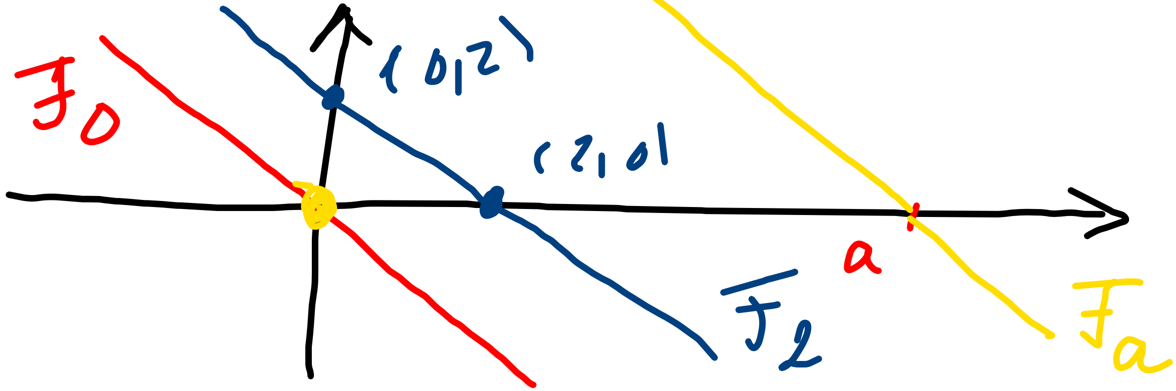
$T(Y)=\max\{3,1\}=3$

$T(X+Y)=\max\{4,5\}=5 \neq 7 = 3+4 = T(X)+T(Y)$

Exercice 5 : $a \in \mathbb{R}$, $F_a = \{X=(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1+x_2+\dots+x_n = a\} \subset \mathbb{R}^n$

1) mq F_a sev de $\mathbb{R}^n \iff a=0$.

Exemple dans $\mathbb{R}^2$ $F_2 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x+y=2\}$ $F_0 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x+y=0\}$



$y=-x+2$

1) Si $a \neq 0$ alors F_a n'est pas un sev de $\mathbb{R}^n$

$a = 8$ $\quad F_8 = \{X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + \dots + x_n = 8\}$

$O_{\mathbb{R}^n} = (0, 0, \dots, 0) \notin F_8$ car $0 + \dots + 0 = 0 \neq 8$

donc F_8 et plus généralement F_a, $(a \neq 0)$ n'est pas un sev de $\mathbb{R}^n$

- Ou bien $X = (8, 0, \dots, 0) \in F_8$
  $Y = (0, 8, 0 \dots 0) \in F_8$

$X + Y = (\underbrace{8, 8, 0 \text{---} 0}_{\sum \text{coor} = 16 \neq 8}) \notin F_8$

donc F_8 n'est pas un sev de $\mathbb{R}^n$

2) MQ F_0 est un sev de $\mathbb{R}^n$

- $0_{\mathbb{R}^n} = (0, \dots, 0) \in F_0$ (évident) donc F_0 n'est pas vide.
- $X = (x_1, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, \dots, y_n) \in F_0$, $\alpha \in \mathbb{R}$

il faut vérifier que $X + \alpha Y \in F_0$

$$X + \alpha Y = (x_1, \dots x_n) + (\alpha y_1, \dots, \alpha y_n) = (x_1 + \alpha y_1, \dots, x_n + \alpha y_n)$$

La somme des coord. de $X + \alpha Y$:

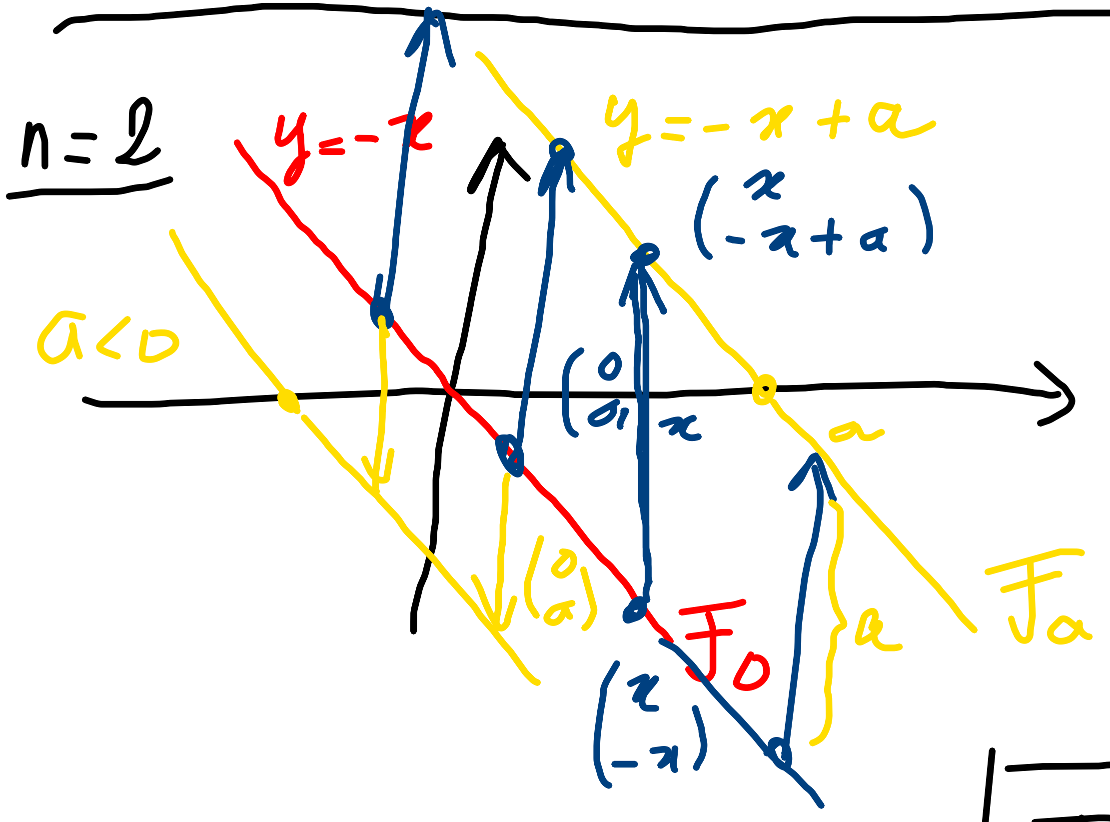
$$x_1 + \alpha y_1 + x_2 + \alpha y_2 + \dots + x_n + \alpha y_n = \underbrace{(x_1 + \dots + x_n)}_{\substack{=0 \\ \text{car } X \in F_0}} + \alpha \underbrace{(y_1 + \dots + y_n)}_{\substack{=0 \\ \text{car } Y \in F_0}} = 0$$

donc $\boxed{X + \alpha Y \in F_0}$

F_0 est bien un SEV de $\mathbb{R}^n$

B] Relation entre F_a et F_0 ?

$n=2$



$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in F_a \; : \; x+y=a$

$y=-x+a$

Donc : $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\-x+a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\a\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x\\-x\end{pmatrix}$

$F_a \nearrow$

$= \begin{pmatrix}0\\a\end{pmatrix} + \underbrace{x\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}}_{\in F_0}$

$F_0 = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} : x+y=0\right\}$ $\hookrightarrow y=-x$

$= \left\{\begin{pmatrix}x\\-x\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}\right\}$

$= \left\{x\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}\right\}$

$$\boxed{F_a = \begin{pmatrix}0\\a\end{pmatrix} + F_0}$$

se déduit de F_0 par une translation de vecteur $\begin{pmatrix}0\\a\end{pmatrix}$

De même on montre que $F_a = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a \end{pmatrix} + F_0$

Pour le montrer : double inclusion. Par exemple si $X \in F_0$

alors $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a \end{pmatrix} + X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n + a \end{pmatrix} \in F_a$ ect....

c) $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in F_0$: $v = v_1 \boxed{?} + v_2 \boxed{?} + \dots + v_{n-1} \boxed{?}$

$v_1 + v_2 + \dots + v_n = 0 \Rightarrow v_n = -v_1 - v_2 - \dots - v_{n-1}$

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ -v_1 - v_2 - \dots - v_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -v_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -v_2 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v_{n-1} \\ -v_{n-1} \end{pmatrix}$$

$v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1} + v_n = 0 \Rightarrow v_n = -v_1 - v_2 - \dots - v_{n-2} - v_{n-1}$

Donc

$$\boxed{V = v_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}} + v_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}} + \dots + v_{n-1} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}}$$

Exercice 8 page 20

$X, Y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ — $\boxed{?}$ $\longrightarrow$?

$$\begin{pmatrix} y_1 + \lambda x_1 \\ y_2 + \lambda x_2 \\ y_3 + \lambda x_3 \\ \vdots \\ y_n + \lambda x_n \end{pmatrix} = Y + \lambda X$$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$y_i \leftarrow y_i + \lambda \cdot x_i$

$2n$ opérations

1 1

Retour au cours page 14 – 4

Opérations usuelles sur les applications linéaires

1) E, F deux EV, $f, g \in \mathcal{L}(E,F)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

- Alors : $f+g : E \longrightarrow F$

$$x \in E \longmapsto (f+g)(x) = \underbrace{f(x)}_{\in F} + \underbrace{g(x)}_{\in F} \in F$$

F ev

$$f : \overset{x}{E} \longrightarrow \overset{f(x)}{F}$$

$x \in E$

$f(x) \in F$

Alors $\boxed{f+g \in \mathcal{L}(E,F)}$ 2

preuve : exercice $(f+g)(x+\lambda y) = ?$

- De même 3 $\alpha f : E \to F$

$x \in E \mapsto (\alpha f)(x) = \alpha . f(x)$ est encore linéaire

Rappel (Notation : $\mathcal{L}(E,F)$ = ensemble de toutes les applications linéaires de E dans F).

Remarque $\mathcal{L}(E,F) \neq \emptyset$ ① car l'application nulle :

$$N : \begin{array}{l} E \longrightarrow F \\ x \in E \longmapsto N(x) = 0_F \end{array}$$ est bien linéaire

① + ② + ③ $\Leftrightarrow$ L'ensemble $\mathcal{L}(E,F)$ est toujours un espace vectoriel

6)

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & F \arrow[r, "g"] & G \end{tikzcd}$$

$f \in \mathcal{L}(E,F)$

$g \in \mathcal{L}(F,G)$

Alors $g \circ f : E \to G$ est linéaire $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Mtre : $g \circ f(x + \alpha y) \overset{def}{=} g(f(x+\alpha y))$

$= g(f(x) + \alpha f(y))$ car f linéaire

$= g(f(x)) + \alpha g(f(y))$ car g linéaire

$= (g \circ f)(x) + \alpha g \circ f(y)$

Def-th : $f \in \mathcal{L}(E,F)$ on pose

$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E,\ f(x) = 0_F\}$$

c'est le <u>noyau de f</u>

c'est un sous-espace vectoriel de E

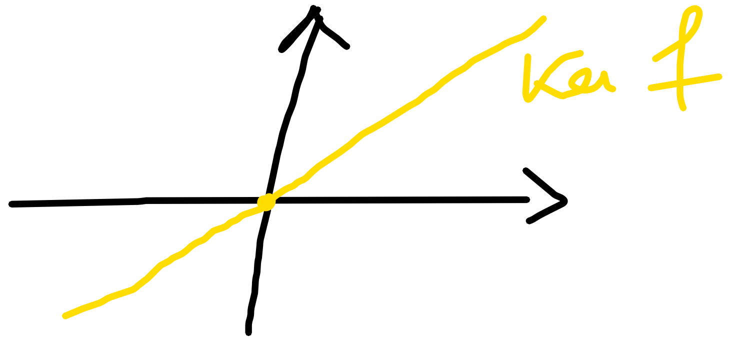
Exemple :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$X = (x,y) \longmapsto f(X) = x - y$$

$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ (forme linéaire)

Ker f ? $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker} f \iff f(X) = x - y = 0_{\mathbb{R}}$

$\iff \boxed{x = y} \rightarrow \mathrm{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R} \right\}$



Montrons que $Ker(f)$ est bien un SEV de E

- $Ker f$ n'est pas vide : $0_E \in Ker f$ car $f(0_E) = 0_F$
découle de la linéarité de f (page 12 après la déf 1)

- $x, y \in Ker(f)$, $\alpha \in \mathbb{R}$: $\boxed{x + \alpha y \in Ker f \,?}$

$$f(x + \alpha y) \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ linéaire}}}{=} \underbrace{f(x)}_{0_E} + \alpha \underbrace{f(y)}_{0_E} = 0_F + \alpha 0_F = 0_F$$

donc $x + \alpha y \in Ker f$
qui est bien un sev de E

Remarque (importante) Vu ce qui précède si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ alors $\mathrm{Ker} f$ sera toujours un SEV de E. C'est un moyen très efficace pour montrer qu'un ensemble est un SEV de E

Par exemple (exo 5) $F_0 = \{ X = (x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n : \underbrace{x_1 + \dots + x_n}_{\varphi(X)} = 0 \}$

si $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$X : (x_1 \dots x_n) \longmapsto \varphi(X) = x_1 + \dots + x_n$

$\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ (c'est clair ?)

Alors $F_0 = \mathrm{Ker}\, \varphi$

donc F_0 sev de $\mathbb{R}^n$.

<u>EXO</u> : $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}$

$P \longmapsto \varphi(P) = P(1)$

φ est bien entendu linéaire $\varphi(P+\lambda Q) = (P+\lambda Q)(1)$

$= P(1) + \lambda Q(1)$

$\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R})$ $= \varphi(P) + \lambda \varphi(Q)$

c'est ici une forme linéaire

$\boxed{\operatorname{Ker} \varphi = ?}$ $\underline{P = ax^2 + bx + c} \in \operatorname{Ker} \varphi \iff \varphi(P) = P(1) = 0_{\mathbb{R}}$

$f \in \mathcal{L}(E, F) : \operatorname{Ker} f = \{ X \in E : f(X) = 0_F \}$

$\operatorname{Ker} \varphi \ni P = ax^2 + bx + c \iff P(1) = 0 = a + b + c$

$$\operatorname{Ker} \varphi = \{ ax^2+bx+c \text{ où } a+b+c=0 \} = \{ P : P(1) = 0 \}$$

$a+b+c=0$

$c=-a-b$

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= ax^2+bx-a-b \\ &= a(x^2-1)+b(x-1) \\ &= a(x-1)(x+1)+b(x-1) \\ &= (x-1)[ax+a+bx-b] \\ &= \underbrace{(x-1)}\,\underbrace{(\alpha x+\beta)} \end{aligned}$$

polynôme qui admet 1 comme racine

Pour la prochaine fois

1) Chercher le noyau dans l'exo 9 cas A et B

2) Exo 10 : linéaire, si oui chercher le noyau

3) 12 et 13 ($f \circ g$ ...).